

12

Análise do volume da esfera e do cubo

Sphere and cube volume analysis

José Silvio Filho

DOI: 10.47573/aya.5379.2.72.12

RESUMO

Este estudo tem como objetivo analisar os cálculos dos volumes da Esfera e do Cubo. Trata-se de um estudo coerente desenvolvido a partir da revisão de estudos publicados e de medições caseiras. Analisaremos os conceitos atuais da capacidade da esfera e do Cubo. Revisaremos o conceito da constante Pi como um número Irracional. Veremos que a potencialização simples não atende à expansão dos volumes da Esfera e do Cubo. A história de pesos e medidas também contribui para a conferência desses valores, pois fundamenta-se em apenas uma medição na Idade Média em condições que não refletem a precisão que temos hoje. A coerência aponta que, para se entender expansão do volume da água numa esfera ou cubo, várias medições em tamanhos diferentes seriam necessárias. Uma reta ou uma parábola não é definida por apenas um ponto. Veremos que o Côvado é uma grandeza ideal para pesquisas nesta área.

Palavras-chave: cubo. dividido. por dois. igual. esfera.

ABSTRACT

This article aims to analyze the calculations of the Sphere and Cube volumes. This is a coherent study developed from a review of published studies and home measurements. We will review current concepts of Sphere and Cube capacity. We will review the concept of the constant Pi as an irrational number. We will see that simple potentiation does not meet the expansion of Sphere and Cube volumes. The history of weights and measures also contributes to the verification of these values, as it is based on just one measurement in the Middle Ages under conditions that do not reflect the precision we have today. Consistency points out that, to understand expansion of the volume of water in a sphere or cube, several measurements in different sizes would be necessary. A line or a parabola is not defined by just one point. We will see that the Côvado is an ideal magnitude for research in this area.

Keywords: sphere. divided by two. equal. basin.

INTRODUÇÃO

Revisaremos o estudo do cálculo do volume da esfera para melhor compreensão da pesquisa.

Capacidade da esfera.

Segundo o Portal Matemática Básica temos:

$$V_e = \frac{4}{3} \pi r^3$$

V_e é o volume da esfera, r é o raio e $\pi = 3,1428$

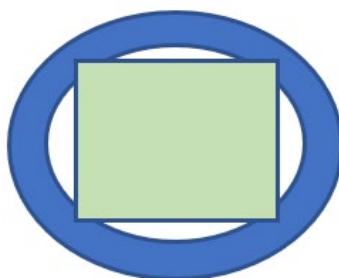
Cálculo do volume de uma esfera de 29,6 cm.

$$V_e = \frac{4}{3} (14,8)^3 \times 3,1428$$

$$V_e = 3.241,792 \times 4 \times 3,1428 / 3$$

$$V_e = 13.584,4052$$

Volume da bacia, ou seja, esfera dividido por dois igual a 6.792,20 ml.



Vista de cima da bacia onde:

Linha Azul é extremidade da bacia ou da borda azul. Segundo Mundo educação (2022), para Arquimedes, seu tamanho linear é 29,6 vezes 3,1428... que é igual a 93,02688... de perímetro. Linha Branca circular é a linha da parte de dentro da bacia que toca na água. Segundo Sílvio Filho (2020), o perímetro da Circunferência é igual a três vezes o diâmetro. Assim seu valor é 88,8 cm uma diferença de 4,2268 cm para o de Arquimedes.

A constante do Perímetro igual a 3 torna o volume da bacia igual à quarta parte do cubo, conforme vemos:

$$V_e = 4 \cdot r^3 \cdot \frac{3}{3} \quad V_e = 4r^3 \quad r = d/2 \quad V_e = 4 \cdot (d/2)^3 \quad V_e = (d^3/8) \cdot 4 \quad V_e = d^3/2$$

$$\text{Bacia de } V_e = (d^3/2) \times \frac{1}{2} \quad \text{Bacia de } V_e = d^3/4.$$

Onde V_e é volume da esfera, r é o raio e d é o diâmetro.

História do Sistema Métrico decimal- litro/quilo

“Diz a lenda que o Rei Edgar, inglês, do décimo século, decretou que a jarda fosse a distância da ponta de seu nariz real até a ponta do dedo médio de sua mão estendida. Pode imaginar como a régua de jarda deve ter variado de rei para rei!

Os ingleses também fizeram outras tentativas de chegar a alguma espécie de padrão no meio da mixórdia de pesos e medidas que prevalecia no decorrer dos séculos. Já no século quatorze, o Rei Eduardo II decretou que uma polegada era o comprimento combinado de três grãos de cevada, redondos e secos, retirados do centro da espiga, e colocados ponta com ponta.”

A confusão reinava em todo o mundo durante anos até quando chegou a hora de comercializar, esses padrões imprecisos e mutáveis. As medidas variavam de país em país, e de aldeia em aldeia, ou até mesmo dum comerciante para outro” Desperta! — 1977 g77 8/6 p. 20-23.

Em 9 de março de 1790, foi apresentada, na Assembleia Nacional Francesa, uma proposta de unificação de pesos e medidas. A Academia de Ciências Francesa foi encarregada da execução do projeto. Contudo, a tentativa de um acordo entre Inglaterra, Estados Unidos, Espanha e outros não produziram resultados esperados e a França foi obrigada a conduzir sozinha seu projeto de unificação. Assim fixou-se, entre outras unidades, o volume e peso da unidade básica que é Litro/Quilo. Assim, um cubo de 1 decímetro ou 10 cm de aresta de água em condições especiais a ser determinada é igual a 1000 mililitros ou 1000 gramas. Essa proposta da Academia de Ciências Francesa foi transmitida à Assembleia Nacional e aprovada em 26 de março de 1791 e transformada em lei por Luiz XVI em 30 de março do mesmo ano. Silva (2010,

p. 84).

“Uma vez estabelecidos o comprimento do metro e seu método decimal de escala para mais e para menos, as unidades de peso e volume se derivaram dele. Um cubo de um centímetro de aresta se tornou o mililitro, $1/1.000$ da unidade básica de volume, o litro. O grama se tornou o peso deste mesmo mililitro cheio de água!”. Despertai! — 1977 g77 8/6 p. 20-23.

“O sistema métrico acabou conquistando toda a Europa, não só por ser mais prático e lógico, mas na esteira das vitórias militares de Napoleão Bonaparte. Napoleão ainda permitiu o uso do sistema antigo na França. Mas as vantagens do sistema métrico prevaleceram e, em 1840, ele foi declarado o único sistema legal do país – o que de novo ajudou a espalhar o metro pelo mundo. Trinta e cinco anos depois, tornou-se oficial também no Brasil.”

[...] O Brasil no tempo da colônia e mesmo no Império, tinha um sistema de medidas muito confuso e diversificado. O comprimento, por exemplo era medido em palmos, côvados, varas, braças e léguas; o peso (ou a massa) em libras, onças e quintais; a área, em jeiras e alqueires. Em 1862, dom Pedro II determinou a adoção do sistema métrico decimal. Em 1875, o Brasil foi um dos vinte países que assinaram, em Paris, o Tratado do Metro, ratificando o uso oficial do novo sistema. Apesar do pioneirismo, o sistema métrico não é absoluto no país até hoje. Tintas e solventes industriais, por exemplo, são geralmente vendidos não em litros, mas em latas de 1 galão (4,54 litros, padrão inglês, ou 3,78 litros, padrão americano); barras de ferro e tubulações para a construção civil são comercializados não em centímetros, mas em polegadas (2,54 cm).”(SUPER ABRIL, 2022).

Embora os esforços de periodicamente fazerem conferências nacionais e internacionais sobre pesos e medidas e vários órgãos de controle e fiscalização no mundo, precisamos primeiro saber o quanto estamos fiscalizando.

Segundo Super Abril (2022) “O engenheiro José Carlos de Castro Waeny, do Instituto de Pesquisas Tecnológicas de São Paulo, vai mais longe: “Todo progresso científico e tecnológico está amarrado ao progresso dos sistemas de medidas.”

Cálculo do volume da esfera considerando a borda.

Temos poucas referências de estudos que consideram a borda, para examinarmos na História. Vamos analisar dois muito conhecidos. O primeiro estudo que analisaremos é do terceiro século AC, cujo autor é Arquimedes, matemático grego que considerava seu valor como único e proporcional ao diâmetro da circunferência e entre os valores $22/7 < \pi < 223/71$, conseguido através de divisões sucessivas dos perímetros de polígonos regulares inscritos e circunscritos conforme o site mundoeducacao.com.br .

Na primeira opção da faixa de números de Pi e a que é a mais conhecida do seu estudo, 22 dividido por sete, que é 3 inteiros + $1/7$, sendo três o perímetro e a borda igual a 0,14285714 dividido por 3, e segundo Sílvio, Filho (2020)

Exemplo: Perímetro de 29,6.

$29,6 \times 3 \frac{1}{7}$ ou $29,6 \times 3 + 29,6 \times \frac{1}{7}$

$88,8 + 4,228 = 93,0285$ Perímetro.

Borda: 4,228 dividido por 3 igual a 1,409333.

Assim teremos: 1,40933 dividido por 2 = 0,7046

No diâmetro: $0,7046 + 29,6 + 0,7046 = 31,0092$

Perímetro de 7 cm.

$7 \times 3 \frac{1}{7}$ ou $7 \times 3 + 7 \times \frac{1}{7}$

$21 + 1 = 22$ cm Borda igual a $\frac{1}{3}$. Dividido por 2 para distribuir no novo diâmetro.

No diâmetro igual a $\frac{1}{6} + 7 + \frac{1}{6}$ que é $7 + \frac{1}{3}$.

$7 + \frac{1}{3}$ que é $\frac{22}{7}$.

Como visto acima, o Pi não é irracional, pois pode ser escrito em fração simples que é $\frac{22}{7}$.

A segunda referência que temos foi construída por Hirão, hebreu-fenício, evidentemente foi chamado de Mar de Fundição por causa da grande quantidade de água que podia conter. Este vaso, também de cobre, media “dez côvados de uma borda à sua outra borda, circular em volta; e tinha a altura de cinco côvados e requeria um cordel de trinta côvados para circundá-lo em toda a volta, com borda da largura da mão que é 4 dedos e com capacidade de 3000 Batos (66.000 litros). Inaugurado em 1026 AC no 12.º ano do reinado de Salomão.

Dimensão do côvado usado.

“É possível que eles tenham usado o côvado mais longo, de cerca de 51,8 cm. — No Segundo Livro de Crônicas capítulo 3 versículo 3 fala de um “comprimento em côvados, segundo a medida anterior”, esta talvez sendo uma medida mais longa do que o côvado que veio a ser comumente utilizado.” Estudo Perspicaz das Escrituras, Vol. 2 p. 1092

Escrito por Esdras por volta de 460 AC registrado no Segundo Livro de 2 Crônicas capítulo 4 dos versículos 2 a 5.

Dessa forma convertendo o Mar de Fundição para centímetros temos:

Côvado= 51,8 cm 10 Côvados igual a 518 cm.

Perímetro $30 \times 51,80$ que é igual a 1554 cm.

Dedo= 1,85 cm

Borda 4 dedos 4 vezes 1,85 que é igual a 7,40 cm.

Largura $10 \times 51,8$ que é 518 cm.

Altura igual a $5 \times 51,8$ que é 259 cm.

1 Bato igual a 22.000 ml. Se considerarmos o Bato, um valor referente a grandeza do Côvado, teremos 22.200ml.

A correlação da borda de Hirão e o Pi de Arquimedes são parecidas, pois 7,40 dividido por 518 igual a 0,01428571 que é a de Hirão e 22 dividido por 7 igual a $3 + 0,14285714$ a de Arquimedes, ou seja, a de Hirão é 10 vezes menor.

A diferença é que, no caso de Arquimedes, o Pi foi usado para o cálculo do perímetro da esfera e também do volume, e, no caso de Hirão, a constante usada é a borda da esfera, conforme veremos à frente.

Atualmente, o volume do Mar de Fundição, conforme dados acima é:

Altura da bacia ao cubo vezes 4 vezes 3,1416 dividido por 3.

O Mar de Cobre de raio igual a 259 cm.

$$(259)^3 \times 4 \times 3,1416/3$$

72.776.123,2 ml. Bacia igual a 36.388.061,6

$$518 \times 22/7 = 1628. \quad 518 \times 3 = 1554.$$

Perímetro de Arquimedes menos 3 vezes o diâmetro igual 74.

Novo diâmetro ou borda + diâmetro + borda.

$$12,333 + 518 + 12,333 = 542,66 \times 3 = 1627,98... \text{ cm}$$

Usando as mesmas medidas acima onde Côvado de 51,8 cm vezes 10, temos:

518 cm e o Dedo igual a 1,85 cm vezes 4 igual a 7,40 cm, temos:

$$518 - 7,4 = 510,6 \text{ ao cubo igual a } 133.119 \text{ litros a esfera.}$$

133.119 dividido por 2 igual a 66.559 litros a bacia.

3000 Batos vezes 22.000

66.000 litros.

E, se usarmos o Bato de 22.200, teremos 66.600 litros.

Dessa descoberta deduz a seguinte fórmula para volume da esfera.

$$V(\text{esfera}) = (x - 7,4)^3 \text{ para } x \geq 37 \text{ cm}$$

Volume de 37 cm. O primeiro número inteiro do côvado e também o limite inferior para a aplicação da fórmula, pois o próximo valor não é mais possível

$$29,6 - 7,4 = 22,2$$

$$(22,2)^3 = 10.941,048$$

Veze 2 é igual a 21.882,096.

Este valor é menor que 29,6 ao cubo que é 25.934,336 que é o Cubo de 29,6 cm.

Atualmente, o volume da Esfera de 37 cm é:

$$[(r)^3 \times 4 \times 3,1416]/3$$

$$[(18,5)^3 \times 4 \times 3,1416]/3$$

$$[6.331,625 \times 4 \times 3,1416]/3$$

26.521,91.,

Usando a fórmula acima

Primeira maneira de calcular:

$$X = 37 \text{ Esfera } V_x = (X - 7,4)^3$$

$$V_x = (37 - 7,4)^3 \quad V_x = 25.934,336.$$

Bacia igual a 12.967,168.

A diferença entre os perímetros é sempre 22,2 cm ou sejam 7,4 vezes 3.

$$29,6 \times 3 = 88,8 \text{ e } 37 \times 3 = 111.$$

$$111 - 88,8 = 22,2. \text{ Dividido por 3 igual a } 7,4 \text{ de borda.}$$

Cubo da diferença. Segunda maneira de calcular.

Igual ao cubo da primeira parcela, menos três vezes o quadrado da primeira pela segunda, mais três vezes a primeira pelo quadrado da segunda, menos o cubo da segunda parcela.

$$V(x) = (X - 7,4)^3$$

$$X^3 - 3x \cdot 7,4 \cdot X^2 + 3 \cdot X \cdot 54,76 - 405,224.$$

$$X^3 - 22,2x^2 + 164,28X - 405,224$$

$$X = 37$$

$$50653 - 22,2 \cdot x^2 + 164,28X - 405,224k$$

$$50653 - 30391,8 + 6.078,36 - 405,224.$$

$$25.934,336.$$

$$\text{Igual a } (37 - 7,4)^3$$

$$(29,6)^3 = 25.934,336$$

$$= 518 \text{ Mar de Cobre}$$

$$(518)^3 - 22,2 \times 268.324 + 85.097,04 - 405,224.$$

$$133.120,541$$

Bacia é a esfera dividido por 2. 66.560,270,5

Esfera de 37 cm de diâmetro. Círculo rosa.

$$(X - 7,4)^3 = (37 - 7,4)^3 \quad (29,6)^3 = 25.934,336$$

A diferença entre os perímetros é sempre 22,2 cm ou seja 7,4 vezes 3.

$$29,6 \times 3 = 88,8 \text{ e } 37 \times 3 = 111.$$

$$111 - 88,8 = 22,2. \text{ Dividido por 3 igual a } 7,4 \text{ de borda.}$$

$$3,7 + 29,6 + 3,7 = 37 \text{ cm.}$$

Um cubo de 29,6 cm dentro de uma esfera de 37 cm.

Cubo de 29,6 = 25.934,336.

Esfera igual a 25.934,336

Bacia igual a 12.967,168

Esfera de 44,4 cm de diâmetro. Círculo azul.

$44,4 - 7,4$ ao cubo.

37 ao cubo igual a 50653.

A diferença entre os perímetros é sempre 22,2 cm ou seja 7,4 vezes 3.

$44,4 \times 3 = 133,2$ e $37 \times 3 = 111$.

$133,2 - 111 = 22,2$. Dividido por 3 igual a 7,4 de borda.

$3,7 + 37 + 3,7 = 44,4$ cm.

Cubo de 37 = 50.653

Esfera de 44,4 cm igual a 50.563

Bacia igual a 25.326,50

Esfera de 51,8 cm de diâmetro. Círculo amarelo.

$3,7 + 44,4 + 3,7 = 51,8$

O cubo de 44,4 cm é igual a 87.528,384

A diferença entre os perímetros é sempre 22,2 cm ou seja 7,4 vezes 3.

$51,8 \times 3 = 155,4$ e $44,4 \times 3 = 133,2$

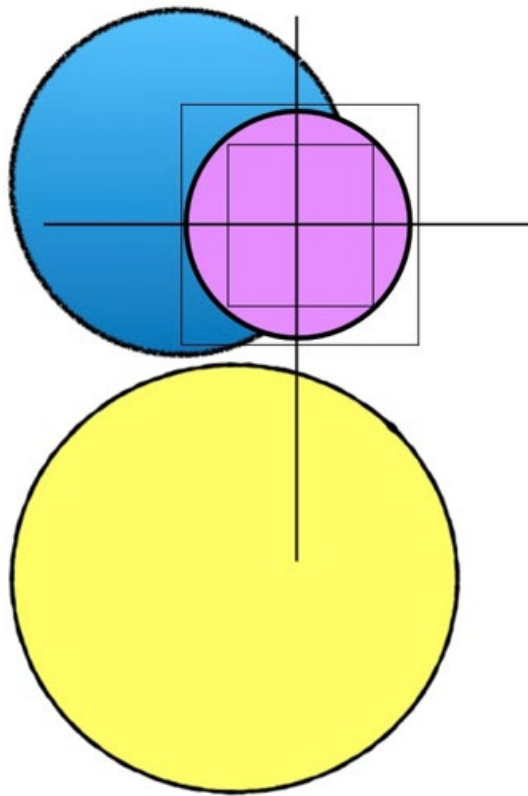
$155,4 - 133,2 = 22,2$. Dividido por 3 igual a 7,4 de borda.

$3,7 + 44,4 + 3,7 = 51,8$ cm.

Esfera igual a 87.528,384

Bacia igual a 43.764,192

Cubo igual a 175.056,768



Cálculo de volume do Cubo no Sistema Métrico.

Segundo o Matemática Básica o volume do cubo é igual ao produto das arestas. Assim $V_c = a \times a \times a$ $V_c = a^3$

Segundo o Portal Toda Matéria temos:” Propriedades da Potenciação.

No produto de potências de mesma base devemos conservar a base e somar os expoentes.

$$a(m) \cdot a(n) = a(m + n)$$

$$\text{Exemplo: } 2(2) \cdot 2(3) = 2(2+3) = 2(5) = 32 \text{ “}.$$

Assim temos.

512 (Quinhentos e doze que é 8 ao Cubo).

$$8 \times 8 \times 8 = 512$$

$$2(3) \times 2(3) \times 2(3) = 2(9) = 512.$$

$(512)^3$ - Quinhentos e doze ao cubo temos:

$$[2(3) \times 2(3) \times 2(3)][2(3) \times 2(3) \times 2(3)][2(3) \times 2(3) \times 2(3)]$$

Aplicando o conceito acima temos:

$$2(3+3+3+3+3+3+3+3+3+3) = 2(27) \text{ que é } 134.217.728.$$

Aplicando o uso de borda acima de 8 cm é similar ao Sistema Métrico.

Limite mínimo igual a 40 cm.

$(40 - 8)^3 = (32)^3 = 32.768$ é a esfera. Vezes dois 2 igual ao cubo de 40 cm.

65.530 ml.

$4 + 32 + 4 = 40$

512 cm. $4 + 504 + 4 = 512$ Ve = $(512 - 8)^3 = (504)^3 = 128.024.064$ a esfera.

Vezes dois igual ao cubo 256.048.132 ml. Bacia $\frac{1}{4}$ do Cubo 64.012.033.

A diferença é que no Còvado o Perímetro varia de 22,2 cm ($3 \times 7,4$) no Métrico 24cm (3×8).

$504 \times 3 = 1512$ e $512 \times 3 = 1536$ $1536 - 1512 = 24$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme acima, é necessário medir volumes em tamanhos diferentes para que se entenda a expansão do volume tanto da esfera como do cubo. Esta feita com o mesmo material e mesmo tamanho da borda.

O princípio matemático do Sistema Métrico foi elaborado por uma única medição do cubo e há mais de 2 séculos. A referência moderna não é cúbica nem esférica e, sim, cilíndrica e está depositado em Sèvres na França. Vimos que Pi é um número Racional.

REFERÊNCIAS

Sociedade Torre de Vigia de Bíblias e Tratados, 1977. Métrico – o melhor sistema. Despertai. Disponível em: <https://www.jw.org/finder?srcid=jwlshare&wtlocale=T&prefer=lang&docid=101976844&par=0>. Acesso em: 25 de fevereiro de 2022.

Sociedade Torre de Vigia de Bíblias e Tratados, - 2015 - Medidas -Bíblia de Estudo. Disponível em: <https://www.jw.org/pt/biblioteca/biblia/biblia-de-estudo/livros>. Acesso em: 25 de Fevereiro de 2022.

Sociedade Torre de Vigia de Bíblias e Tratados – 2020 – Dimensão do Còvado usado. Estudo Perspicaz das Escrituras. Disponível em: <https://wol.jw.org/pt/wol/d/r5/lp-t/1200004359#h=7:0-7:506> Acesso em: 25 de Fevereiro de 2022.

SILVA, Irineu da, 2010. Histórias dos Pesos e Medidas. p. 84.

Matemáticabásica.net -Volume da Esfera. Disponível em: <https://matematicabásica.net/volume-da-esfera/>. Acesso em: 25 de Fevereiro de 2022.

Super Abril.com. Disponível em <https://super.abril.com.br/historia/pesos-e-medidas-as-dimensoes-do-metro>. Acesso em: 25 de fevereiro de 2020.

Valor do Pi. Mundo Educação. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/valor-pi>.

htm Acesso em: 25 de Fevereiro de 2020.

FILHO, José Sílvio – 2020. Análise do Perímetro da Circunferência. Disponível em: <https://acervomais.com.br/index.php/artigos/article/view/2828>. Acesso em 25.02.2022

Todamateria.com. Disponível em:- <https://www.todamateria.com.br/potenciacao/>Acesso em: 25 de Fevereiro de 2020.

Matemácticabásica.com, Disponível em: <https://matematicabásicahttps://matematicabásica.net/cubo/.net/cubo/>Acesso em: 25 de Fevereiro de 2020.

AGRADECIMENTOS

À Sociedade Torre de Vigia de Bíblia e Tratados pelas excelentes publicações que subsidiaram a pesquisa.

ANEXOS

Volume da Esfera, Bacia e Cubo decrescente.

Ta- ma- nho	4 De- dos	Esfera	Bacia	Cubo	Ta- ma- nho	8	Esfera	Bacia	Cubo
	518				520	512			
	-7,4				0	-8			
518	510,6	133119,731016	66559,865508	266239,462032	512	504	128024,064	64012,032	256048,128
510,6	503,2	127415,392768	63707,696384	254830,785536	504	496	122023,936	61011,968	244047,872
503,2	495,8	121876,385912	60938,192956	243752,771824	496	488	116214,272	58107,136	232428,544
495,8	488,4	116500,279104	58250,139552	233000,558208	488	480	110592	55296	221184
488,4	481	111284,641	55642,3205	222569,282	480	472	105154,048	52577,024	210308,096
481	473,6	106227,040256	53113,520128	212454,080512	472	464	99897,344	49948,672	199794,688
473,6	466,2	101325,045528	50662,522764	202650,091056	464	456	94818,816	47409,408	189637,632
466,2	458,8	96576,225472	48288,112736	193152,450944	456	448	89915,392	44957,696	179830,784
458,8	451,4	91978,148744	45989,074372	183956,297488	448	440	85184	42592	170368
451,4	444	87528,384	43764,192	175056,768	440	432	80621,568	40310,784	161243,136
444	436,6	83224,499896	41612,249948	166448,999792	432	424	76225,024	38112,512	152450,048
436,6	429,2	79064,065088	39532,032544	158128,130176	424	416	71991,296	35995,648	143982,592
429,2	421,8	75044,648232	37522,324116	150089,296464	416	408	67917,312	33958,656	135834,624
421,8	414,4	71163,817984	35581,908992	142327,635968	408	400	64000	32000	128000
414,4	407	67419,143	33709,5715	134838,286	400	392	60236,288	30118,144	120472,576
407	399,6	63808,191936	31904,095968	127616,383872	392	384	56623,104	28311,552	113246,208
399,6	392,2	60328,533448	30164,266724	120657,066896	384	376	53157,376	26578,688	106314,752
392,2	384,8	56977,736192	28488,868096	113955,472384	376	368	49836,032	24918,016	99672,064
384,8	377,4	53753,368824	26876,684412	107506,737648	368	360	46656	23328	93312
377,4	370	50653	25326,5	101306	360	352	43614,208	21807,104	87228,416
370	362,6	47674,198376	23837,099188	95348,396752	352	344	40707,584	20353,792	81415,168
362,6	355,2	44814,532608	22407,266304	89629,065216	344	336	37933,056	18966,528	75866,112
355,2	347,8	42071,571352	21035,785676	84143,142704	336	328	35287,552	17643,776	70575,104
347,8	340,4	39442,883264	19721,441632	78885,766528	328	320	32768	16384	65536

340,4	333	36926,037	18463,0185	73852,074	320	312	30371,328	15185,664	60742,656
333	325,6	34518,601216	17259,300608	69037,202432	312	304	28094,464	14047,232	56188,928
325,6	318,2	32218,144568	16109,072284	64436,289136	304	296	25934,336	12967,168	51868,672
318,2	310,8	30022,235712	15011,117856	60044,471424	296	288	23887,872	11943,936	47775,744
310,8	303,4	27928,443304	13964,221652	55856,886608	288	280	21952	10976	43904
303,4	296	25934,336	12967,168	51868,672	280	272	20123,648	10061,824	40247,296
296	288,6	24037,482456	12018,741228	48074,964912	272	264	18399,744	9199,872	36799,488
288,6	281,2	22235,451328	11117,725664	44470,902656	264	256	16777,216	8388,608	33554,432
281,2	273,8	20525,811272	10262,905636	41051,622544	256	248	15252,992	7626,496	30505,984
273,8	266,4	18906,130944	9453,065472	37812,261888	248	240	13824	6912	27648
266,4	259	17373,979	8686,9895	34747,958	240	232	12487,168	6243,584	24974,336
259	251,6	15926,924096	7963,462048	31853,848192	232	224	11239,424	5619,712	22478,848
251,6	244,2	14562,534888	7281,267444	29125,069776	224	216	10077,696	5038,848	20155,392
244,2	236,8	13278,380032	6639,190016	26556,760064	216	208	8998,912	4499,456	17997,824
236,8	229,4	12072,028184	6036,014092	24144,056368	208	200	8000	4000	16000
229,4	222	10941,048	5470,524	21882,096	200	192	7077,888	3538,944	14155,776
222	214,6	9883,008136	4941,504068	19766,016272	192	184	6229,504	3114,752	12459,008
214,6	207,2	8895,477248	4447,738624	17790,954496	184	176	5451,776	2725,888	10903,552
207,2	199,8	7976,023992	3988,011996	15952,047984	176	168	4741,632	2370,816	9483,264
199,8	192,4	7122,217024	3561,108512	14244,434048	168	160	4096	2048	8192
192,4	185	6331,625	3165,8125	12663,25	160	152	3511,808	1755,904	7023,616
185	177,6	5601,816576	2800,908288	11203,633152	152	144	2985,984	1492,992	5971,968
177,6	170,2	4930,360408	2465,180204	9860,720816	144	136	2515,456	1257,728	5030,912
170,2	162,8	4314,825152	2157,412576	8629,650304	136	128	2097,152	1048,576	4194,304
162,8	155,4	3752,779464	1876,389732	7505,558928	128	120	1728	864	3456
155,4	148	3241,792	1620,896	6483,584	120	112	1404,928	702,464	2809,856
148	140,6	2779,431416	1389,715708	5558,862832	112	104	1124,864	562,432	2249,728
140,6	133,2	2363,266368	1181,633184	4726,532736	104	96	884,736	442,368	1769,472
133,2	125,8	1990,865512	995,432756	3981,731024	96	88	681,472	340,736	1362,944
125,8	118,4	1659,797504	829,898752	3319,595008	88	80	512	256	1024
118,4	111	1367,631	683,8155	2735,262	80	72	373,248	186,624	746,496
111	103,6	1111,934656	555,967328	2223,869312	72	64	262,144	131,072	524,288
103,6	96,2	890,277128	445,138564	1780,554256	64	56	175,616	87,808	351,232
96,2	88,8	700,227072	350,113536	1400,454144	56	48	110,592	55,296	221,184
88,8	81,4	539,353144	269,676572	1078,706288	48	40	64	32	128
81,4	74	405,224	202,612	810,448	40	32	32,768	16,384	65,536
74	66,6	295,408296	147,704148	590,816592	32	24	13,824	6,912	27,648
66,6	59,2	207,474688	103,737344	414,949376	24	16	4,096	2,048	8,192
59,2	51,8	138,991832	69,495916	277,983664	16	8	0,512	0,256	1,024
51,8	44,4	87,528384	43,764192	175,056768	8	0	0	0	0
44,4	37	50,653	25,3265	101,306					
37	29,6	25,934336	12,967168	51,868672					
	22,2	10,941048	5,470524	21,882096					
	14,8	3,241792	1,620896	6,483584					
	7,4	0,405224	0,202612	0,810448					