MÉTODOS E PRÁTICAS PEDAGÓGICAS:

estudos, reflexões e perspectivas

2

Marcos Pereira dos Santos
(Organizador)

AYA EDITORA
2021

Direção Editorial
Prof.° Dr. Adriano Mesquita Soares

Executiva de Negócios
Ana Lucia Ribeiro Soares

Organizador
Prof.° Dr. Marcos Pereira dos Santos

Produção Editorial
AYA Editora

Capa
AYA Editora

Imagens de Capa
br.freepik.com

Revisão
Os Autores

Área do Conhecimento
Ciências Humanas

M9399 Métodos e práticas pedagógicas: estudos, reflexões e perspectivas 2. / Marcos Pereira dos Santos (org.). -- Ponta Grossa: Aya, 2021. 300 p. – ISBN: 978-65-88580-67-7

Inclui biografia
Inclui índice
Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader.
Modo de acesso: World Wide Web.
DOI 10.47573/aya.88580.2.42

1. Educação. 2. Educação especial - Legislação. 3. Educação física (Ensino fundamental). 4. Ensino médio. 5. Meritocracia. 6. Minorias - Educação – Brasil. 6. Educação de jovens e adultos. 7. Tecnologia educacional. 8. História da educação. 9. Inclusão escolar I. Santos, Marcos Pereira. II. Título

CDD: 370.7

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Bruna Cristina Bonini - CRB 9/1347

International Scientific Journals Publicações de Periódicos e Editora EIRELI
AYA Editora©
CNPJ: 36.140.631/0001-53
Fone: +55 42 3086-3131
E-mail: contato@ayaeditora.com.br
Site: https://ayaeditora.com.br
Endereço: Rua João Rabello Coutinho, 557
Ponta Grossa - Paraná - Brasil
84.071-150

22

Matemática: um ensaio filosófico-especulativo

Sandoval Amui

DOI: 10.47573/aya.88580.2.42.22

Resumo

Ao expressar algebricamente o comportamento dos fenômenos estudados pelas demais ciências, a matemática se torna a linguagem científica universal, a ferramenta que todas essas outras ciências precisam e usam. Não por acaso é considerada a "Rainha das Ciências". Isso, todavia, não significa que a matemática não tenha imperfeições e que não possa ser aprimorada. Mesmos conceitos já consagrados por milênios podem ser revistos e, talvez, aperfeiçoados. Contudo, uma tarefa de tal natureza só pode ser levada a efeito mediante uma abordagem especulativa, até filosófica, que permita questionar conceitos e teorias consagrados, assim como sugerir novos entendimentos desses conceitos e teorias, o que implica também estar com a mente aberta, despida de verdades absolutas, na análise de quaisquer proposições inovadoras. Essa foi a linha adotada neste texto, que discute certas estranhezas da matemática e apresenta três proposições inovadoras: a extensão do significado do Teorema de Pitágoras, uma demonstração para a Conjectura de Fermat e um novo Axioma Fundamental da Álgebra.

Palavras-chave: Teorema de Ptolomeu. Teorema de Pitágoras. Conjectura de Fermat. Axioma Fundamental da Álgebra. Números. números imaginários. representação cartesiana de figuras geométricas e equações e raízes.

Abstract

When mathematically expressing the behavior of the phenomena the other sciences deal with, math works as the universal scientific language, the tool such other sciences often need and use. That is why we refer to math as the “Queen of Sciences”. However, it does not mean that math is a perfect science nor that math researchers cannot review and perhaps improve concepts and theories, even those accepted since ancient times. The performance of such a task will certainly require a speculative and philosophical approach, which would allow us to question entrenched concepts and theories, as well as to suggest new understandings of said concepts and theories. Additionally, it implies an open-minded view, without absolute truths in the analysis of innovative propositions. In line with these principles, this text discusses certain math oddities and three innovative propositions: an extension of the meaning of the Pythagoras Theorem, a proof for Fermat’s Conjecture, and a new Fundamental Axiom of Algebra.

Keywords: : Theorem of Ptolemy. Theorem of Pythagoras. Fermat’s Conjecture. Fundamental Axiom of Algebras. Numbers. imaginary numbers. Cartesian representation of geometric figures and equations and roots.

INTRODUÇÃO

O saber humano se apresenta dividido em áreas de conhecimento. Há áreas que foram criadas pelo ser humano para se dedicar ao estudo de um objeto pré-existente, como a física, que cuida dos fenômenos físicos naturais. Outras áreas, como a matemática, são linguagens, criadas para dar suporte às demais áreas. Como linguagem universal, nesse mister de dar suporte às demais áreas do saber humano, a matemática (sem transgredir suas próprias regras) tem que assimilar as leis que regem o objeto de estudo de cada área servida.

No caso da geometria, a matemática permite quantificar as propriedades das figuras geométricas (perímetro, área e volume) e representar algebricamente essas figuras geométricas posicionadas em um sistema de eixos cartesiano, mas a interação entre a matemática e a geometria é de tal intensidade que as duas áreas de estudos se fundem e se confundem, gerando subáreas de estudos, como geometria algébrica, geometria analítica, geometria fractal, topologia e outras.

Cada área do conhecimento humano cuida de um assunto específico, o seu objeto de estudos. A matemática, ademais de cuidar de seus próprios recursos, ferramentas e métodos, cumpre o importante papel de assistir todas as demais áreas. Talvez por isso, como meio de expressão imprescindível a todas essas outras ciências, a matemática é considerada a “Rainha das Ciências”. Isso, porém, não significa que a matemática não possa e não deva ser aprimorada.

ABORDAGEM DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

A abordagem de um problema matemático pode ser dividida em cinco fases: i) a formulação adequada do problema; ii) a escolha da ferramenta que pode resolver o problema; iii) a seleção e uso de dados apropriados; iv) a manipulação dos dados, que é a fase dos cálculos; e v) a interpretação correta dos resultados. Equívocos podem ocorrer em qualquer uma dessas fases.

Um equívoco pode ocorrer quando formulamos o problema com base em premissas inconsistentes. Outro, quando usamos o recurso matemático inapropriado para resolver o problema formulado. Tanto no primeiro caso quanto no segundo podemos chegar a resultados estranhos ou a impasses. Nesses casos, não devemos culpar a matemática, mas questionar as premissas aceitas e os recursos aplicados, de modo a chegar a resultados consistentes.

Tenho para mim que algumas conjecturas não provadas e alguns problemas sem solução podem estar nessa condição de enunciados afetados por vícios de fundamentos.

Uma terceira questão, já apontada por especialistas e que está a merecer a atenção dos educadores, reside na orientação atualmente adotada no ensino da matemática, que dá ênfase à fase dos cálculos, exatamente a menos importante, puramente mecânica, que pode ser realizada por calculadoras e computadores com inigualáveis rapidez e exatidão. Um enfoque didático que coloca em plano secundário o raciocínio e a lógica. Se matemática é lógica, vamos ver as coisas sob enfoque lógico, vamos raciocinar, não atuar mecanicamente como robôs. Isso, porém, implica questionamento, coisa não muito apreciada pelo ser humano.

ESTRANHEZAS DA MATEMÁTICA

Curiosidades

Quem tem alguma familiaridade com a matemática sabe que esse ramo do conhecimento humano convive com certas estranhezas, questões mal explicadas, conjecturas não provadas e problemas não resolvidos. Como exemplos de estranhezas e questões mal explicadas, podemos lembrar que[1]:

- Ao resolver uma equação irracional, a álgebra pode nos levar a uma raiz que não satisfaz a equação resolvida. A explicação aceita é que ocorreu uma "raiz estranha".

- A combinação de certos conceitos, considerados verdadeiros, pode nos levar a conclusões absurdas, como a de que 2 + 2 = 5.

- Pela regra de sinais, ao elevar (+5) e (-5) ao quadrado temos o mesmo resultado, (+25).

- A raiz quadrada de um número negativo é uma coisa abstrata, chamada de número complexo, de significado e utilidade discutíveis.

- Uma equação de grau "n" tem "n" raízes; a expressão "$x^n - 1 = 0$" deveria ter "n" raízes para qualquer valor de "n", mesmo "n" igual a um trilhão. Ora, só há uma resposta, "x = 1".

- Uma mesma parábola, de propriedades geométricas constantes, pode supostamente gerar infinitas equações do 2° grau (uma expressão algébrica para cada uma das infinitas posições em que essa única parábola pode ser desenhada no gráfico cartesiano). Pelos conceitos atuais, há duas raízes para cada uma dessas infinitas equações do 2º grau; uma mesma parábola com infinitas raízes.

Entretanto, essas imperfeições em nada diminuem a importância da matemática, nem comprometem os resultados de seu uso na prática. Não obstante, podem ser analisadas com o objetivo de encontrar as suas causas e adotar as medidas saneadoras aplicáveis, aperfeiçoando ainda mais esse instrumento fantástico.

Neste texto procurei as respostas para três questões

a) Quais as causas dessas estranhezas?

b) Que medidas podem ser implementadas para eliminá-las?

c) Como melhorar o aprendizado da matemática, reconhecidamente considerada a disciplina mais difícil dos cursos de formação de jovens, minimizando também a aversão que a maioria das pessoas declara nutrir por essa magnífica ferramenta?

1 SILVA, Astyages Brasil, *"Um ensaio de matemática na era da unidade"*, Rio de janeiro-RJ, 2017.

Imprescindível e bela, mas não perfeita:

A matemática tem inquestionáveis importância e beleza e, sem ela, ainda estaríamos na Idade da Pedra Lascada. Precisamos dela para quase tudo. O seu estudo nos envolve e cativa. Todavia, e ao contrário do que muitos pensam, a matemática não é uma ciência perfeita, nem mesmo exata. Na linha de cunho filosófico-especulativo ora adotada, podemos dizer que alguns dos conceitos fundamentais que a sustentam ainda carecem de esclarecimentos. Abaixo, três conceitos que se enquadram nesse questionamento:

a) Quando lidamos com os números reais, que respondem pela maioria dos casos práticos, só obtemos resultados aproximados. Resultados exatos só ocorrem quando dados e resultados são números inteiros. A conclusão é que, na vida real, temos que estabelecer tolerâncias e conviver com aproximações;

b) O emprego do "zero" não está perfeitamente explicado e quando envolvido nas operações aritméticas pode gerar situações estranhas;

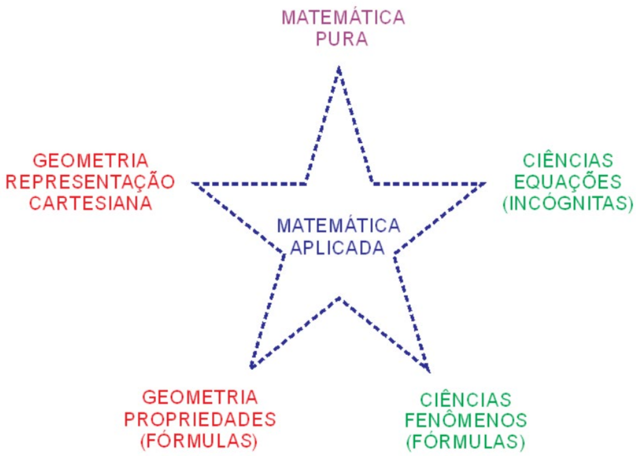
c) O entendimento atual é que números têm sinais, que podem ser positivos e negativos, e que números negativos têm tratamento diferente do tratamento dado aos números positivos. Isso nos impõe desdobramentos conceituais discutíveis, como a aceitação da existência de números imaginários.

Sequer me atrevo a comentar os dois primeiros temas. Quanto ao terceiro, temos duas alternativas a considerar: a primeira, que números realmente têm sinais, mas que números negativos devem ser tratados da mesma maneira como tratamos os números positivos; a segunda, que entendemos a mais adequada, que números são elementos neutros, sem sinais, e que podem se apresentar positivos ou negativos como decorrência de situações impostas às expressões aritméticas e algébricas, como igualdades forçadas ou convenções. Voltarei a esse assunto mais adiante.

A "RAINHA DAS CIÊNCIAS"

A Figura 1 ilustra a visão que tenho do importantíssimo papel da matemática, de dar suporte a todas as demais ciências, ao expressar algebricamente o comportamento dos fenômenos de estudos dessas outras áreas de conhecimento humano. A linguagem científica universal.

Figura 1 - Matemática como linguagem científica universal



Em seu viés prático, denominado de “matemática aplicada”, de dar suporte às outras áreas do conhecimento humano, em cada caso a matemática trata de assuntos distintos e segue regras próprias. Nesse mister, a matemática, sem transgredir suas próprias regras, tem que respeitar as leis que regem o objeto da área atendida. Uma das falhas do ensino da matemática é não esclarecer essa peculiaridade aos alunos. Uma mesma letra, seja “x”, por exemplo, em uma expressão matemática, pode ser a incógnita de uma equação a ser resolvida, a propriedade de uma figura geométrica, como o raio na fórmula do volume de uma esfera, a abcissa de um ponto pertencente à representação cartesiana de uma parábola, ou a massa de um corpo na fórmula da lei da atração gravitacional de Newton. Tal letra, seja ela qual for, desempenha papéis diferentes e segue regras diferentes em cada um desses casos citados.

A matemática, no ramo que se denomina “matemática pura”, se ocupa em desenvolver ferramentas internas e teorias, ainda que sem objetivar qualquer aplicação imediata. Nesse caso, serve a si mesma.

EQUAÇÕES

Uma equação é uma igualdade entre duas somas algébricas de uma única variável, a incógnita, cujo valor é a resposta a uma questão previamente formulada[2]. A título de exemplo, imaginemos que os custos totais de impressão de dois livros, “CT1” e “CT2”, expressos em Reais, em função da quantidade “x” de livros impressos, sejam dados pelas expressões:

Para o 1º livro: $C_{T1} = 15(x) + 500$

Para o 2º livro: $C_{T2} = 10(x) + 1000$

Se desejarmos saber a quantidade de exemplares impressos para a qual os custos totais, “C_{T1}” e “C_{T2}”, serão equivalentes, teremos:

$$C_{T1} = C_{T2}$$

$$15(x) + 500 = 10(x) + 1000$$

$$x = 100$$

Nesse exemplo, formamos uma equação (só há uma incógnita, “x”), de primeiro grau (o expoente da variável “x” é a unidade), sendo o valor da incógnita a resposta à questão formulada: 100 livros.

Imagino que é possível a existência de equações de qualquer grau, ou seja, igualdade entre duas somas algébricas nas quais a única variável pode estar condicionada a expoentes diferentes da unidade e até diferentes entre si. Não obstante, a equação será sempre de primeira ordem, dado que formada pela igualdade entre duas somas algébricas de uma única e mesma variável.

Cabe aqui uma observação. Ao igualarmos duas somas algébricas de uma mesma e única variável, no caso denominada de incógnita, criamos uma equação. Ao resolver a equação, a incógnita poderá resultar positiva, negativa ou nula, dado que se trata de uma igualdade forçada, um resultado imposto.

2 MANNARINO, Remo, A Matemática pode ser diferente? Editora CataLivros, Rio de Janeiro-RJ, 2020.

Preconizamos neste texto que uma equação é uma igualdade algébrica de uma única variável (a incógnita), que expressa a condição imposta por um problema, sendo o valor resultante para a incógnita a resposta à questão previamente formulada com o problema. Sendo a equação uma igualdade forçada, o valor resultante para a incógnita poderá ser positivo, negativo ou nulo.

Fórmulas de propriedades de figuras geométricas

A matemática dá suporte à geometria com fórmulas que quantificam e relacionam as propriedades das figuras geométricas, como o comprimento de um segmento de reta, a área de um triângulo ou o volume de um elipsoide. Dado o raio de uma esfera, "R", seu volume, "V" (expresso em um sistema de unidades consistente), estará perfeitamente definido, seja uma figura em minha mente, desenhada em uma folha de papel ou materializada como uma bola de vôlei sobre uma mesa.

$V = (4/3)\pi R^3$

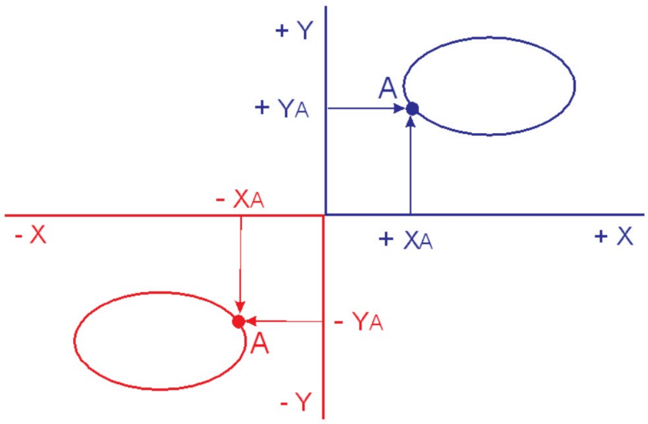
Nessas fórmulas, as grandezas (raio e volume) não têm sinais. A diferença "ΔV" entre os volumes de duas esferas ("V_1" e "V_2", de raios "R_1" e "R_2") nos é dada por "$\Delta V = (4/3)\pi(R_1^3 - R_2^3)$". Não há nenhuma grandeza negativa na citada expressão matemática, apenas uma subtração de grandezas neutras (volumes).

Representação algébrica de figuras geométricas pelo Método Cartesiano

Outra aplicação da matemática à geometria nos permite expressar algebricamente figuras geométricas com o emprego do sistema de eixos cartesiano. Uma mesma figura geométrica pode ocupar infinitas posições nesse sistema e, para cada posição, teremos uma expressão algébrica diferente. Expressão algébrica de figuras geométricas posicionadas no gráfico cartesiano nada tem a ver com equações ou sistemas de equações, como equivocadamente se ensina. Equações são outra aplicação da matemática, mas totalmente distinta da representação cartesiana de figuras geométricas.

As coordenadas que representam pontos de uma figura geométrica no sistema de eixos cartesiano podem ter sinais, uma vez que se trata de imposição do método cartesiano em função da posição em que a figura geométrica é colocada em relação aos eixos. Uma convenção, peculiaridade do método. Um exemplo simples permite demostrar a afirmação, conforme mostra a Figura 2.

Figura 2 - Convenção de sinais

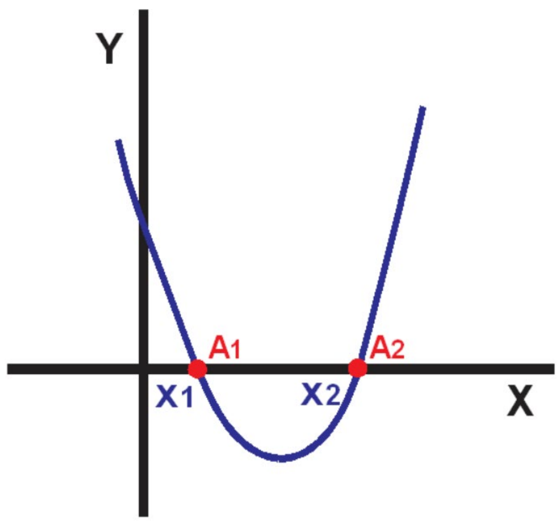


A elipse colocada no 1º quadrante do gráfico cartesiano tem todas as coordenadas positivas. Colocada no 3º quadrante, a mesma elipse tem todas as coordenadas negativas. Em termos absolutos (módulos), as coordenadas são as mesmas, mas de sinal trocado. A conclusão:

A expressão algébrica de figuras geométricas representadas pelo Método de Descartes impõe o emprego de coordenadas cartesianas dotadas de sinais, mera peculiaridade do Método.

Ao igualarmos a zero a variável dependente “y” da expressão algébrica que representa uma figura geométrica em um sistema de eixos cartesiano, como uma parábola, não criamos nenhuma equação e, ao resolver a suposta equação, o valor que porventura resulte para a variável independente (“x_1” e “x_2” na Figura 3) não é raiz de equação, dado que não existe equação. Um valor da variável independente, com o correspondente valor nulo da variável dependente apenas caracterizam um par de valores que determina um ponto pertencente à curva representada, e que se situa no eixo das abcissas (pontos “A_1” e “A_2” no exemplo).

Figura 3 - Representação cartesiana

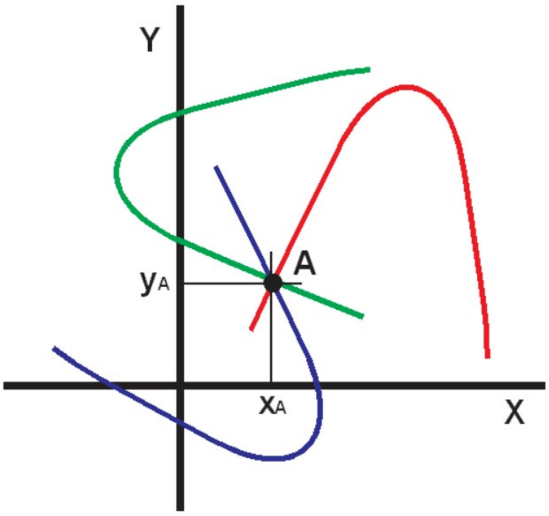


Na construção de um espelho de superfície parabólica para um telescópio refletor, usaremos a definição geométrica da parábola, sua lei de formação, não uma das infinitas expressões algébricas que representam matematicamente a parábola no sistema de eixos cartesiano.

Se posicionarmos uma mesma parábola em três posições diferentes no gráfico cartesiano teremos três expressões algébricas do 2º grau diferentes. Reunidas, essas três expressões algébricas podem formar um suposto sistema de três equações. Podem ocorrer pontos comuns entre as três posições da mesma parábola, como o ponto “A”, de coordenadas “x_A” e “y_A” mostrado na Figura 4, entendidos como raízes do suposto sistema de três equações. Esse exercício só terá utilidade se o aluno souber que está fazendo um trabalho lúdico, sem nenhuma aplicação prática, o que não ocorre no aprendizado da matéria.

A expressão algébrica de uma figura geométrica posicionada no sistema de eixos cartesiano apenas descreve matematicamente a figura na posição em que foi colocada. Não é equação, nem se torna equação quando a variável dependente é igualada a zero. Portanto, não tem raiz. Por extensão, o caso de mais de uma representação algébrica de figuras geométricas no sistema de eixos cartesiano não forma sistema de equações nem tem raízes.

Figura 4 - Sistema de equações



Ressalvado algum exercício lúdico, a bem da verdade, não existem sistemas de equações, exceto se, erroneamente, aceitarmos como equações algum conjunto de fórmulas de alguma ciência, como as fórmulas de Maxwell para o eletromagnetismo.

O número de variáveis em uma expressão algébrica indica a ordem da figura representada, seja uma linha reta, uma curva plana ou uma linha no espaço, e não pode ser maior que três (exceto se considerarmos variação com o tempo, caso em que teríamos quatro variáveis[3]). O expoente da variável (entendido como grau algébrico) mostra tão somente se lidamos como uma figura geométrica típica, de 1°, 2° ou 3° grau (parábola, por exemplo “$y = 2x^2 – 3$”), ou com uma figura modificada (uma curva qualquer, por exemplo “$y = 2x^{2,7} – 3$”, uma parábola modificada[4]), na qual o expoente da variável pode assumir qualquer valor. Nada a ver com extras dimensões.

Convenções operacionais

O emprego de expoentes negativos é outro exemplo de convenção usada em matemática. A expressão “$y = a/x^n$” pode ser escrita como “$y = ax^{-n}$”. A equivalência entre as duas expressões algébricas deste exemplo mostra que não há nenhum número negativo, apenas uma convenção operacional. A convenção funciona porque a operamos de modo reversível, na ida e na volta.

Fórmulas científicas

Assim como dá suporte à geometria, com fórmulas que permitem quantificar e relacionar as propriedades de figuras geométricas, a matemática dá suporte a outras ciências com fórmulas científicas, impropriamente chamadas de equações, como as fórmulas empregadas na física por Galileu, Newton, Maxwell, Einstein e tantos outros expoentes das ciências. Como exemplo, a conhecida fórmula da atração gravitacional de Newton:

$$F_G = k\,(M.m)/D^2$$

Nessas fórmulas científicas, a exemplo das fórmulas que quantificam e relacionam as propriedades de figuras geométricas, as grandezas envolvidas não têm sinais.

3 No caso de descrevermos um bolo que cresce sob efeito do fermento.
4 AMUI, Sandoval, http://www.globalscientificjournal.com/journal, volume8, issue8, August 2020 edition, p6.html.

A matemática a serviço de si mesma

Ao desenvolver recursos, ferramentas e teorias de uso próprio, comumente sem visar aplicações imediatas, a matemática serve a si mesma mediante um segmento denominado de “matemática pura”, de caráter investigativo e especulativo. Isso se dá sobre um alicerce já consagrado, que não é questionado, de modo que – em havendo imperfeições nesse alicerce, os resultados alcançados poderão ficar prejudicados. Ao questionar os fundamentos da matemática que compõem o citado alicerce, este texto repercute sobre o papel e os resultados obtidos com a matemática pura.

A curiosidade é que este texto, por seu caráter investigativo e especulativo, mesmo voltado exclusivamente para os fundamentos da matemática, deve ser entendido como parte da matemática pura.

NOVO ENTENDIMENTO DE CONCEITOS CONSAGRADOS

O fato de que há conceitos consagrados, alguns até por milênios, não basta para assegurar que tais conceitos estejam corretos, especialmente se o seu emprego de modo consistente levar a resultados claramente inconsistentes.

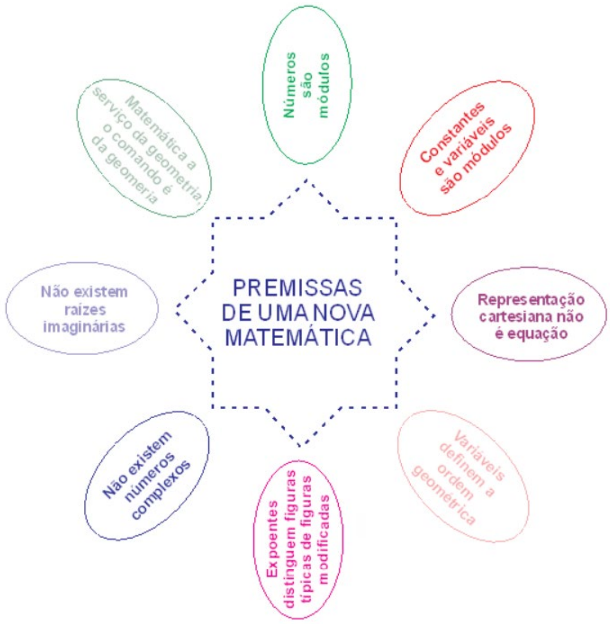
Fiel ao caráter filosófico-especulativo que adotei neste texto, a Figura 5 apresenta novos entendimentos de conceitos que estão consagrados em nossas mentes. São polêmicos, é verdade, mas sem ousar, permaneceremos na mesmice de sempre, insistindo nas estranhezas, nas questões mal explicadas e na aceitação de justificativas simplórias. Ousar e questionar é preciso.

Já apresentamos alguns conceitos divergentes, como os de que números são neutros, não têm sinais, que não existem números complexos[5] e que expressões algébricas de figuras geométricas posicionadas no gráfico cartesiano não são equações nem formam equações. Ao considerar que números têm sinais e, principalmente, ao dar tratamento diferenciado aos números negativos, a matemática introduz enorme e desnecessária complicação nas operações algébricas.

Aceitando-se o entendimento de que números não têm sinais, conclui-se que não existem números imaginários nem raízes imaginárias, o que permite descartar a teoria dos números complexos e todos os seus desdobramentos.

5 MANNARINO, Remo, A Matemática pode ser diferente? Editora CataLivros, Rio de Janeiro-RJ, 2020.

Figura 5 - Novo entendimento de conceitos consagrados

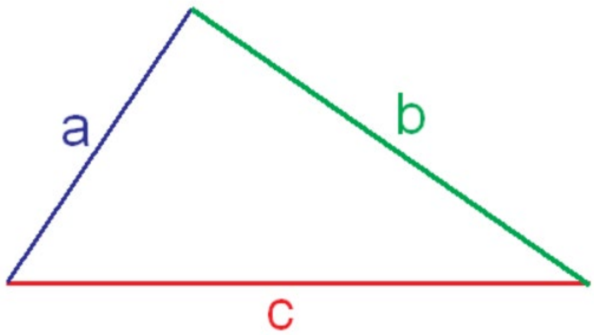


Alguns outros casos ilustram o caráter especulativo deste texto, pela apresentação de novos entendimentos de conceitos já consagrados.

Teorema de Pitágoras

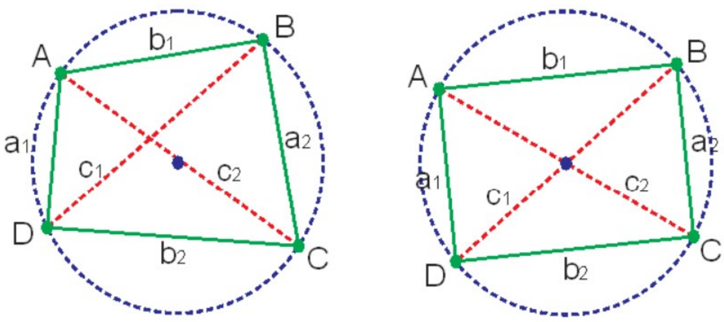
Livros e professores ensinam que existe um milenar teorema, o Teorema de Pitágoras, que é propriedade do triângulo retângulo, sob o (correto) enunciado de que "Em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos ("$a^2 + b^2$") é igual ao quadrado da hipotenusa ("c^2")". A Figura 6 ilustra o Teorema de Pitágoras.

Figura 6 - Triângulo retângulo e o Teorema de Pitágoras



Esse Teorema é um caso particular do Teorema de Ptolomeu, muito mais geral, que reza que "Em todo quadrilátero inscrito em uma circunferência, a soma dos produtos dos lados opostos ("$a_1.a_2$" + "$b_1.b_2$") é igual ao produto das diagonais ("$c_1.c_2$")". A Figura 7 ilustra o que foi afirmado. Quando o quadrilátero se torna um retângulo, "$a_1 = a_2 = a$", "$b_1 = b_2 = b$" e "$c_1 = c_2 = c$" e, portanto, "$a^2 + b^2 = c^2$".

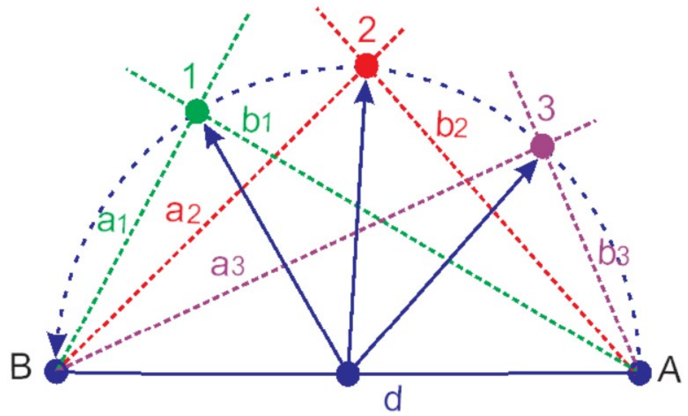
Figura 7 - Teorema de Ptolomeu



O Teorema de Pitágoras é também um caso particular de meu Teorema dos Infinitos Triângulos Retângulos, uma propriedade da circunferência, sob o enunciado de que “A soma dos quadrados de duas cordas que partem de um ponto de uma circunferência (“1, 2, 3” ou qualquer outro) e se unem às extremidades opostas de um diâmetro qualquer (“A e B”) é constante e igual ao quadrado desse diâmetro (“d^2”). Isso está mostrado na Figura 8. Ou:

$$a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = a_3^2 + b_3^2 = \text{constante} = d^2$$

Figura 8 - Teorema dos Infinitos Triângulos Retângulos



As cordas da circunferência (catetos de cada triângulo retângulo formado) podem variar livremente (a_1 e b_1, a_2 e b_2, a_3 e b_3 etc) desde que a soma de seus quadrados seja constante. A expressão algébrica correta para esse teorema, propriedade da circunferência, é:

$$a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = a_3^2 + b_3^2 = \dots = \text{constante}$$

Pela tradição, podemos continuar a usar essa magnífica e bela relação matemática sob o título de "Teorema de Pitágoras", consagrado por milênios, mas tendo esse novo entendimento de que seu alcance é bem mais abrangente e que não é propriedade do triângulo retângulo, mas da circunferência, sob a forma algébrica geral:

$$(a^2 + b^2) = \text{constante}$$

Usei esse conceito no livro “A Circunferência, Pitágoras e Fermat” para demonstrar a Conjectura de Fermat (atualmente “O Último Teorema de Fermat”), mediante a combinação de elementos de geometria (triângulos), complementados por conceitos de álgebra[6]”.

6 AMUI, Sandoval, “A Circunferência, Pitágoras e Fermat”, Editora Catalivros, Rio de Janeiro-RJ, 2019.

Conjectura de Fermat

Embora não tivesse nenhuma utilidade prática, uma conjectura proposta por Pierre de Fermat tornou-se verdadeira obsessão para um enorme contingente de matemáticos e não matemáticos, que se empenharam em provar a conjectura. Uma contenda que durou quase quatro séculos, quando a comunidade de matemáticos aceitou a demonstração do matemático inglês Andrew Wiles como correta.

A demonstração de Wiles ocupa centenas de páginas, envolve centenas de equações e inclui conceitos que nem existiam à época de Fermat. Se de fato está correta, ninguém sabe. Tenho para mim, dado que não me atrevi a estudá-la, que se tal demonstração é puramente algébrica, deve conter algum erro. Proponho (e demonstro) uma Conjectura sobre a Conjectura de Fermat:

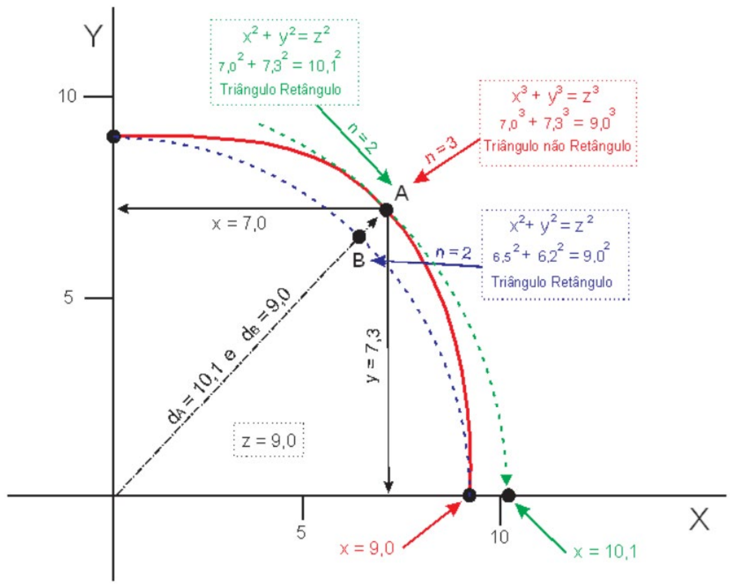
A Conjectura de Fermat não é demonstrável por meios puramente algébricos. Essa Conjectura só pode ser demonstrada pela combinação de geometria e álgebra.

No artigo anteriormente citado, *"A New Math Foundation"*, apresentei outra demonstração para a Conjectura de Fermat, dessa vez partindo de conceitos algébricos e fechando com conceitos geométricos. A demonstração de Wiles faz referência às curvas elípticas, embora em meu entendimento a Conjectura de Fermat se relacione com a hiperelipse (caso particular da superelipse, quando "n" é maior que "2"), conforme se depreende da Figura 9.

Nas duas demonstrações, apliquei a ideia do matemático americano-canadense Robert P. Langrands, de associar diferentes áreas de estudos na solução de problemas. No presente caso, geometria e álgebra. A Figura 9 permite enunciar que:

Para contradizer a Conjectura de Fermat seria necessário existir um triângulo retângulo pitagórico com duas hipotenusas diferentes ou então uma mesma circunferência com dois raios diferentes e expressos por números inteiros. Impossibilidades geométricas óbvias.

Figura 9 - Conjectura de Fermat



ÁLGEBRA

A álgebra é vista como tendo um campo de aplicação que, em realidade, não tem; tornou-se um fim em si mesma e ganhou vida própria, embora seja somente uma ferramenta, um recurso matemático.

A álgebra é a extensão da aritmética.

O entendimento de grau algébrico é particularmente inconsistente. Nada a ver com extras dimensões. Temos três dimensões, como impõe a geometria: 1° grau (variável de expoente unitário), 2° grau (variável de expoente igual a "2") e 3° grau (variável de expoente igual a "3"), simples aplicação do Teorema de Pitágoras. Podemos admitir uma quarta dimensão, o tempo, como no caso de um bolo em que a forma e o tamanho mudam pelo efeito do fermento.

Além desses três graus encontrados na natureza, representados por expoentes inteiros, as variáveis de expressões algébricas podem ostentar expoentes fracionários ou mesmo irracionais, em geral exercícios lúdicos, caracterizando figuras geométricas modificadas, sem haver, necessariamente, correspondentes dessas figuras na natureza ou na geometria clássica.

A vinculação do conceito de equação e de raiz de equação às expressões algébricas de figuras geométricas desenhadas no sistema de eixos cartesiano é outro equívoco. A expressão algébrica de uma figura geométrica posicionada no sistema de eixos cartesiano não é equação e não forma equação ao ser igualada a zero.

Tenho para mim que, ao aceitarmos o entendimento de que números não têm sinais (exceto como resultados de igualdades forçadas e convenções), que a álgebra somente estende a ação da aritmética e que a matemática, como linguagem, cumpre o imprescindível papel de expressar algebricamente o comportamento dos objetos de estudos das demais áreas do saber humano, teremos uma matemática descomplicada e livre de inconsistências e de questões mal explicadas.

Os elementos encontrados na natureza, como livros, carros, moedas e tantos outros, são neutros, não são positivos nem negativos. Contudo, tratados como grandezas pela matemática, podem se apresentar dotados de sinais nas expressões aritméticas e algébricas, como resultado de situações impostas, sejam igualdades forçadas ou convenções. Desse modo, em matemática, lidamos com três tipos de grandezas: grandezas positivas (+), grandezas negativas (-) e grandezas neutras (valores absolutos ou módulos).

Nas expressões aritméticas e algébricas, as grandezas estão sujeitas a operações comandadas por símbolos operacionais de adição (+), subtração (-), multiplicação (x), divisão (:), potenciação (expoente) e radiciação (√). Todas essas operações se aplicam a elementos neutros, a módulos. Decorre então que as operações, aritméticas e algébricas, que envolvem grandezas com os sinais "+" e "-" são, exclusivamente, as de adição e subtração. Vale dizer também dizer que as demais operações preparatórias, de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação, não envolvem grandezas com sinais, sejam números ou letras (constantes ou variáveis). Não teremos, assim, que multiplicar números positivos ou negativos, nem extrair a raiz quadrada de números negativos, apenas para ilustrar o conceito exposto.

A título de exemplos, consideremos algumas expressões algébricas. Na expressão “+

5x – 3y – 2xy”, os números “5”, “3” e “2”, bem como “x” e “y”, são elementos neutros (módulos). Os sinais “+” e “– “ que aparecem na expressão significam apenas adição e subtração de termos neutros.

Nas operações abaixo:

y = + 5(+ 3 – x)”, que dá “y = + (+ 15 – 5x) = + 15 – 5x

e

y = - 5(+ 3 – x)”, que dá “y = – (+ 15 – 5x) = – 15 + 5x

Em ambos os casos, os números “5” e “3” e a grandeza “x” foram tomados como módulos e, assim, efetuadas as operações aritméticas. Ao multiplicar o número “5” pelo número “3” e pela variável “x”, apenas respeitamos os sinais de adição e subtração que precedem cada número e cada grandeza envolvidos na operação. O sinal negativo antes dos parênteses na expressão algébrica “y = – (+ 15 – 5x)” apenas nos diz para trocar os sinais que precedem os módulos que estão dentro dos parênteses (“15” e “5x”), resultando “y = – 15 + 5x”. Nesses exemplos, não houve operações de multiplicação de elementos positivos nem negativos.

Em ambas as expressões algébricas acima temos igualdades forçadas. O valor atribuído a “x” determinará o valor de “y” e vice-versa. O valor de “y” dependerá do valor absoluto (módulo) atribuído a “x”, podendo ser positivo, negativo ou nulo. Se, ao contrário, fixarmos um valor qualquer para “y”, o valor resultante para “x” indicará se, para tal valor de “y” na expressão algébrica, “x” foi tomado como módulo ou não. Neste último caso, resultados como “+ x = + 27” e “– x = – 27”, indicam que “x” não tem sinal na referida expressão algébrica, é módulo (não é positivo, simplesmente não tem sinal); resultados como “+ x = – 27” e “– x = + 27” indicam que “x” não poderá ser módulo na expressão algébrica considerada. Nesse último caso, o fato de “x” não poder ser módulo deve ser a resposta a alguma questão (interpretação da expressão algébrica) ou a expressão algébrica não é verdadeira.

Isso significa que números serão sempre tomados como valores absolutos (módulos), embora possam aparecer precedidos de sinais, como resultado de alguma situação forçada, como em “+ 5 – 7 = – 2” (um déficit de módulos igual a “2”, porque o módulo “5” é menor que o módulo “7”). Letras que representam constantes e letras que representam variáveis podem operar como valores absolutos ou como elementos dotados de sinais, conforme seja a situação imposta, a exemplo dos seguintes casos:

a) Para que igualdades forçadas sejam verdadeiras, como a equação “$+ a_1x – b_1 = + a_2x – b_2$”, a incógnita “x” poderá ser positiva, negativa ou nula, dado que “a_1”, “b_1”, “a_2”, “b_2” e “x” são grandezas sem sinal (neutras). Os sinais “+” e “– “ na expressão matemática apenas significam adição e subtração de grandezas neutras (termos);

b) Por convenção: (i) na representação de figuras geométricas no sistema de eixos cartesiano, por se tratar de imposição do método, caso em que as coordenadas dependerão da posição em que a figura geométrica é colocada no gráfico, e (ii) em expressões algébricas do tipo “$y = a/x^n$”, quando, igualmente por mera convenção operacional, reescrevemos a expressão com o emprego de expoente negativo, na forma “$y = ax^{-n}$”, convenção que funciona por que reversível, ou seja, usada na ida e na volta.

Fazendo uma analogia com créditos (convencionalmente aceitos como positivos) e débitos (convencionalmente aceitos como negativos), quando o sinal de adição ("+") precede um termo precedido do sinal negativo ("–"), significa que estamos acrescentando mais um débito aos débitos, prevalecendo o sinal negativo ("–"). Quando o sinal de subtração ("–") precede um termo precedido do sinal negativo ("–"), significa que estamos deduzindo um débito dos débitos, prevalecendo o sinal positivo ("+"). Por outro lado, podemos multiplicar (ou dividir) um crédito ou um débito, sendo que o multiplicador (ou divisor) será um módulo e, por convenção, o crédito resultante continuará positivo e o débito resultante continuará negativo, dando origem a um crédito ou a um débito maior. Nada a ver com "regra de sinais".

Esse tema é, provavelmente, o mais sútil de todos que apresento neste texto. De um modo geral, meu novo conceito não altera os resultados alcançados com os conceitos operacionais vigentes, quando – pela lógica da aritmética, um módulo se confunde com um valor positivo, o que sugere que não estou apresentando nada de novo. Há, porém, uma tênue diferença, uma nuança filosófica: a distinção entre valor positivo e valor absoluto (módulo).

Um exemplo ilustra essa nuança filosófica:

Admitamos que Maria tenha "x" livros e que José tenha "x^2" livros. Sabendo que José tem 36 livros, quantos livros tem Maria? Pelos conceitos atuais,

$x^2 = 36$, portanto, $x = \sqrt{36} = \pm 6$

Se José tem 36 livros, Maria não poderia ter "– 6 livros", essa resposta não faz sentido (exceto algebricamente). Temos que interpretar que José tem 36 livros (que não são positivos nem negativos) e que Maria tem 6 livros (que, igualmente, não são positivos nem negativos). No exercício, "x" é módulo, não tem sinal.

Podemos ainda dizer que Maria tem 30 livros a menos que José, dado que 6 – 36 = – 30. Todos esses números, 36, 6 e 30, são módulos.

Em exercícios algébricos lúdicos, desvinculados de aplicações práticas, quando as expressões algébricas mostram variáveis com expoentes, como "x^2", "x^3" etc, em situações impostas antes referidas, podemos nos defrontar com operações que envolvam grandezas com sinais[7].

Novo Axioma Fundamental da Álgebra:

Os sinais ("+") e ("–") que aparecem nas somas algébricas são unicamente sinais de adição e subtração de termos (módulos) formados por números e/ou letras, que também são módulos. Os módulos precedidos do sinal ("+") devem ser somados entre si, enquanto os módulos precedidos do sinal ("–") também devem ser somados entre si, o que nos leva a uma diferença forçada entre a soma dos módulos precedidos do sinal de adição ("+") e a soma dos módulos precedidos do sinal de subtração ("–") que pode ser positiva, negativa ou nula (um saldo de módulos positivo, negativo ou nulo). Ademais, números e letras podem se apresentar dotados de sinais nos casos de situações forçadas, como o resultado de equações, e nos casos de convenções, como na representação cartesiana de figuras geométricas e no artifício matemático de usar expoentes negativos para significar fração.

7 Tema discutido no artigo "AMUI, Sandoval, http://www.globalscientificjournal.com/journal, volume8, issue8, August 2020 edition, p6.html".

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tratei neste artigo de temas matemáticos básicos, os fundamentos que sustentam esse fantástico ramo do saber humano. Optei por um enfoque filosófico-especulativo que me permitisse, não apenas questionar conceitos consagrados, mas também propor um novo entendimento para alguns desses conceitos questionados.

Há ramos da matemática, como análise combinatória e probabilidade, bem como as fórmulas que quantificam as propriedades de figuras geométricas (perímetro, área e volume) e as fórmulas das ciências que regem o comportamento de fenômenos naturais, que operam sem problemas, por não dependerem de certos conceitos algébricos. Outros ramos dependentes da álgebra podem revelar estranhezas.

Resta claro que as modificações conceituais ora apresentadas nos levam a uma matemática mais simples que a praticada atualmente. Nessa abordagem especulativa, um tanto filosófica, a álgebra perderá um pouco de seu “charme”. No ensino da matemática, como atividade lúdica, poderemos manipular polinômios, resolver supostos sistemas de equações de figuras geométricas posicionadas no gráfico cartesiano e operar com a regra dos sinais, mas privilegiando o raciocínio e a lógica. O aluno saberá o que faz e porque faz. Teremos uma ferramenta bem mais efetiva e livre das referidas estranhezas antes apontadas, uma matemática menos abstrata, consistente com o mundo real. De quebra, o ensino da matemática poderá ficar mais fácil e seu aprendizado, bem mais efetivo.

É de se esperar ainda que os alunos não terão dificuldades maiores do que as que têm em outras disciplinas, alcançarão nas avaliações notas equivalentes às que obtêm nessas outras disciplinas e que, por fim, as pessoas deixarão de detestar a matemática.

REFERÊNCIAS

AMUI, Sandoval, “A Circunferência, Pitágoras e Fermat”, Editora Catalivros, Rio de Janeiro-RJ, 2019.

AMUI, Sandoval, http://www.globalscientificjournal.com/journal, volume8, issue8, August 2020 edition, p6.html

MANNARINO, Remo, A Matemática pode ser diferente? Editora CataLivros, Rio de Janeiro-RJ, 2020.

MANNARINO, Remo, http://www.globalscientificjournal.com, research paper, The Mathematics of Numerical Expressions.pdf, Volume 8, Issue 7, July 2020.

SILVA, Astyages Brasil, “Um ensaio de matemática na era da unidade”, Rio de janeiro-RJ, 2017.

AYA EDITORA
2021