



Números Irracionais: Entre Construção Histórica e os Desafios do Ensino

Números Irracionais: Entre Construção Histórica e os Desafios do Ensino

Eduardo Abel Coral

Juliana Grandi

Resumo: Este trabalho examina os obstáculos envolvidos na construção histórica do conceito de números irracionais e discute suas possíveis implicações para o ensino fundamental. Por meio de um estudo teórico de caráter bibliográfico, articula a história da matemática, a noção de obstáculo epistemológico e reflexões sobre a aprendizagem matemática. O percurso analisado abrange as concepções pitagóricas de número e medida, o reconhecimento de grandezas incomensuráveis, os problemas relacionados à continuidade e as contribuições de Dedekind (1901) e Cantor (1872) para a fundamentação dos números reais. A discussão evidencia que a ampliação do conceito de número exigiu a revisão de conhecimentos e convicções que se mostraram insuficientes diante de novos problemas. No âmbito educacional, destaca-se a importância de investigar os conhecimentos prévios dos estudantes, distinguir valores exatos de aproximações e analisar os erros como indícios das concepções mobilizadas na aprendizagem. Propõem-se quatro frentes de trabalho: levantamento das ideias dos alunos, identificação dos obstáculos, elaboração de situações de ensino e acompanhamento dos erros. Conclui-se que a articulação entre análise histórico-epistemológica e planejamento didático pode contribuir para uma compreensão dos números irracionais que ultrapasse a classificação de representações e a aplicação de regras operatórias, sem pressupor uma correspondência automática entre o desenvolvimento histórico e a aprendizagem escolar.

Palavras-chave: números irracionais; obstáculos epistemológicos; história da matemática; incomensurabilidade; ensino de matemática.

Abstract: This paper examines the obstacles involved in the historical development of the concept of irrational numbers and discusses their possible implications for elementary and lower secondary mathematics education. Through a theoretical study based on a literature review, it brings together the history of mathematics, the notion of epistemological obstacles, and reflections on mathematics learning. The analysis covers Pythagorean conceptions of number and measurement, the recognition of incommensurable magnitudes, problems concerning continuity, and Dedekind (1901) e Cantor (1872) contributions to the foundations of real numbers. The discussion shows that extending the concept of number required revising knowledge and beliefs that proved insufficient when confronted with new problems. In education, emphasis is placed on investigating students' prior knowledge, distinguishing exact values from approximations, and analyzing errors as evidence of the conceptions used in learning. Four areas of pedagogical work are proposed: eliciting students' ideas, identifying obstacles, designing teaching situations, and monitoring errors. The paper concludes that connecting historical and epistemological analysis with instructional planning can contribute to an understanding of irrational numbers that goes beyond classifying representations and applying computational rules, without assuming an automatic correspondence between historical development and school learning.

Keywords: irrational numbers; epistemological obstacles; history of mathematics; incommensurability; mathematics education.

INTRODUÇÃO

A presença dos números irracionais no currículo escolar nem sempre é acompanhada de uma discussão sobre os problemas que tornaram necessária sua construção. Quando o ensino se concentra na identificação de decimais não periódicos e na aplicação de regras de cálculo com radicais, o conceito pode perder seu significado. Nesse tipo de abordagem, os irracionais parecem cumprir apenas a função de completar os racionais na formação do conjunto dos números reais. A compreensão das razões que levaram à ampliação da ideia de número acaba, assim, subordinada ao domínio de procedimentos.

A história desse conceito oferece outra perspectiva para o ensino. Sua elaboração envolveu impasses que não puderam ser resolvidos com os conhecimentos então disponíveis e exigiu a revisão de convicções profundamente estabelecidas. O que hoje se apresenta nos livros como uma definição breve resultou de um processo marcado por resistências, mudanças de interpretação e novas formas de compreender as relações entre número, medida e grandeza. Recuperar esse percurso permite questionar a aparente simplicidade com que o tema costuma ser tratado e reconhecer sua importância na formação matemática.

É nessa relação entre a construção histórica e a aprendizagem escolar que se situa este trabalho. O objetivo é examinar dificuldades e obstáculos envolvidos na constituição dos números irracionais e discutir suas possíveis implicações didáticas. A análise começa pela noção de obstáculo, que fornece elementos para interpretar a produção do conhecimento. Em seguida, acompanham problemas e mudanças conceituais que atravessaram a história dos irracionais, das concepções pitagóricas à sua sistematização. A discussão se encerra com a proposição de ações para o ensino fundamental, orientadas pela compreensão do conceito e pela atenção às ideias dos alunos.

CONHECIMENTOS ANTERIORES E OBSTÁCULOS À APRENDIZAGEM

As respostas produzidas por um aluno diante de um problema não surgem de maneira isolada. Elas expressam conhecimentos, experiências e modos de raciocinar que ele já possui e procura utilizar na situação apresentada. Ao confrontar esses recursos com novas exigências, o estudante pode ampliá-los, reorganizá-los ou perceber que não são suficientes. Por isso, o erro merece atenção: sua análise permite conhecer o raciocínio empregado e compreender por que uma estratégia aparentemente adequada deixou de funcionar.

A noção de obstáculo epistemológico ajuda a interpretar esse processo. Um conhecimento pode favorecer a compreensão de certas situações e, ao mesmo tempo, dificultar a análise de outras quando seu campo de validade é indevidamente ampliado. A resistência à mudança decorre, em parte, da confiança construída em torno de explicações que já se mostraram eficazes. Aprender exige, nesse

caso, rever o próprio modo de conhecer. Essa forma de noção para o obstáculo epistemológico é utilizada pela primeira vez por Bachelard (1996) ao estudar e identificar os obstáculos da Física. Segundo o autor,

[...] não se trata de considerar obstáculos externos, como a complexidade e a fugacidade dos fenômenos, nem de incriminar a fragilidade dos sentidos e do espírito humano: é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. [...] No fundo, o ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo à espiritualização (Bachelard, 1996, p. 17).

Ao ser incorporada à Didática da Matemática, a discussão dos obstáculos passou a orientar a investigação das condições de compreensão dos conceitos. Conforme Glaeser (1985, p. 30), cabe a esse campo “determinar os obstáculos que se opõem à compreensão e ao aprendizado dessa ciência”. Isso requer distinguir o obstáculo de suas manifestações. Uma dificuldade observável pode ser consequência de uma concepção que permanece implícita na resposta do aluno. Essa distinção está presente na afirmação de Duroux (1982, p. 54) onde trata que “o obstáculo é um conhecimento que, ao tentar se adaptar a outras situações ou a outros valores das variáveis, provocará erros específicos, identificáveis e analisáveis”

Explicar uma dificuldade apenas pelo que o estudante ainda não sabe pode, portanto, ser insuficiente. É preciso investigar também aquilo que ele sabe e o modo como utiliza esse conhecimento. O obstáculo se caracteriza justamente pela persistência de uma compreensão que possui utilidade em determinado domínio, mas produz erros quando mobilizada em outro. Como essa compreensão integra o sistema de conhecimentos do sujeito, sua revisão pode exigir sucessivos confrontos com situações que evidenciem seus limites.

A investigação histórica amplia essa análise ao mostrar que certos obstáculos participam da própria constituição dos conceitos. Sua presença não corresponde somente a falhas individuais, pois relaciona-se a problemas e formas de interpretação que marcaram o desenvolvimento de um conhecimento. Nesse sentido, os obstáculos epistemológicos no sentido de Brousseau são inerentes ao próprio conceito, observados na sua origem e desenvolvimento. Para justificar esse pensamento, o autor propõe que,

Os obstáculos de origem propriamente epistemológica são aqueles dos quais não podemos nem devemos escapar, devido ao seu papel constitutivo no conhecimento visado. Eles podem ser encontrados na própria história dos conceitos. Isso não quer dizer que se deva ampliar seus efeitos nem que se deva reproduzir em ambiente escolar as condições históricas onde eles foram vencidos (Brousseau, 1983, p. 178).

No caso dos números irracionais, a permanência de determinadas concepções de número e de medida ajuda a compreender por que a aceitação de novas

relações encontrou tanta resistência. Em sala de aula, dificuldades semelhantes podem aparecer quando os alunos tentam interpretar um novo objeto com recursos conceituais já conhecidos. A aproximação entre os dois processos deve ser investigada, e não tomada como identidade automática. Conforme Brousseau (1983, p. 190), “os obstáculos em questão são verdadeiramente identificados na história da matemática e seus traços podem ser reencontrados nas produções espontâneas dos alunos.”

Essa perspectiva atribui à análise dos erros uma função pedagógica. Conhecer os impasses enfrentados na elaboração de um conceito pode ajudar o professor a formular perguntas, selecionar problemas e interpretar respostas dos estudantes. A contribuição da história está, assim, na possibilidade de orientar intervenções que enfrentem as dificuldades conceituais, evitando que o ensino apenas substitua uma explicação por uma regra ou mantenha compreensões inadequadas sob uma linguagem aparentemente correta.

A CONSTRUÇÃO HISTÓRICA E EPISTEMOLÓGICA DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

A Compreensão Pitagórica do Número e da Medida

Para compreender os primeiros impasses relacionados à incomensurabilidade, é necessário considerar o lugar ocupado pelos números no pensamento pitagórico. A figura de Pitágoras, situada no século VI a.C., chegou até nós associada a narrativas que combinam realizações matemáticas, tradições filosóficas e elementos lendários. Apesar das dificuldades de atribuição individual, a escola vinculada ao seu nome ocupa posição importante nessa história. As certezas produzidas em seu interior também contribuíram para tornar problemáticos os resultados que contrariavam sua visão de mundo. Isso nos leva à consciência de que a “formação do espírito científico, o primeiro obstáculo é a experiência primeira, a experiência colocada antes e acima da crítica” (Bachelard, 1996, p.29).

O conhecimento era cultivado pelos pitagóricos em uma comunidade submetida a regras de convivência e de transmissão dos ensinamentos. As descobertas pertenciam ao grupo, circunstância que recomenda tratá-las como produções da escola, em vez de atribuí-las indistintamente ao fundador. Nesse ambiente, a Matemática se articulava à reflexão filosófica sobre a ordem do universo. Seu estudo ultrapassava as finalidades práticas presentes nas tradições egípcias e babilônicas e procurava alcançar princípios capazes de explicar a realidade.

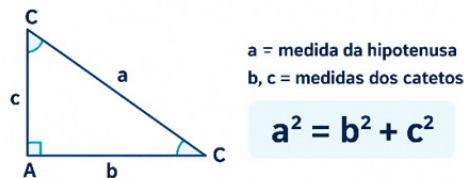
A expressão “tudo é número”, associada aos pitagóricos, sintetiza a confiança na possibilidade de interpretar o mundo por relações numéricas. Essa confiança abrangia tanto a investigação de propriedades matemáticas quanto a atribuição de significados simbólicos aos números. Virtudes, características e fenômenos eram vinculados a eles, assim como se distinguiam números perfeitos, amigos e figurados. Nesse conjunto de práticas, o estudo das relações quantitativas convivia com interpretações místicas.

A ideia de número se organizava em torno dos inteiros positivos e das relações estabelecidas entre eles. As frações permitiam expressar comparações e medidas, embora o estatuto atribuído a essas relações não coincidissem necessariamente com o dos números inteiros. A predominância de unidades discretas também orientava uma explicação para a composição da matéria. Admitia-se que os corpos fossem constituídos por unidades mínimas, as mônadas, cuja reunião tornaria possível compreender as grandezas.

Nessa perspectiva, a unidade gerava os números e a justaposição de mônadas explicava a constituição da matéria. A disposição de unidades em figuras triangulares, quadradas e outras formas reforçava a aproximação entre relações numéricas e configurações geométricas. Entre os resultados tradicionalmente associados à escola, o teorema de Pitágoras tornou-se especialmente conhecido. Sua aplicação, porém, também permitiria identificar uma relação que não se ajustava à expectativa de expressar todas as medidas por inteiros ou por razões entre inteiros.

Considere-se um triângulo retângulo com hipotenusa de medida a e catetos de medidas b e c . O teorema de Pitágoras relaciona essas três medidas pela igualdade $a^2 = b^2 + c^2$, representada na Figura 1.

Figura 1 – Teorema de Pitágoras.

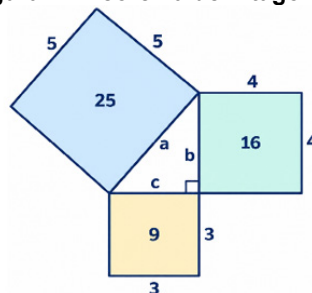


Fonte: Elaborada pelo autor.

A mesma igualdade admite uma interpretação geométrica em termos de áreas. Ao construir um quadrado sobre cada lado do triângulo, a área do quadrado apoiado na hipotenusa corresponde à soma das áreas dos outros dois quadrados.

No exemplo da Figura 2, os lados medem 3, 4 e 5 unidades, e as áreas correspondentes permitem verificar essa relação.

Figura 2 – Teorema de Pitágoras.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

- Ao lado de medida 5 corresponde a um quadrado de área 25.
- Ao lado de medida 4 corresponde a um quadrado de área 16.
- Ao lado de medida 3 corresponde a um quadrado de área 9.

Assim, $25 = 16 + 9$, ou seja, $5^2 = 4^2 + 3^2$.

A dificuldade surge quando se procura estender a explicação baseada em unidades discretas à própria reta. Se um segmento fosse composto por mônadas justapostas, sua medida dependeria da quantidade dessas unidades. Dois segmentos poderiam, então, ser comparados pela contagem das mônadas presentes em cada um.

Suponha-se que o segmento AB contenha a mônada e que o segmento CD contenha b mônadas. Admitindo a mesma unidade mínima para ambos, a comparação de seus comprimentos corresponderia à razão entre essas quantidades.

Segmentos considerados: AB e CD.

Para quantidades finitas de mônadas, essa comparação conduz à seguinte expressão:

$$AB/CD = a/b.$$

Desse modo, ao escolher CD como unidade, o comprimento de AB seria expresso por a/b. O modelo sustentava a expectativa de que toda medida pudesse ser representada por uma razão entre números inteiros.

A força e os limites dessa compreensão aparecem quando se distinguem a busca de uma ordem matemática para o mundo e os significados místicos atribuídos aos números. O reconhecimento dessas duas dimensões permite compreender tanto as realizações da escola quanto sua resistência diante de relações que contrariavam as convicções estabelecidas. Essa ambivalência é expressa na passagem seguinte.

Constitui o lado positivo a sua aspiração para a inteligibilidade, emitindo a ideia grandiosa da ordenação matemática dos Cosmos e dando uma primeira realização dela por algumas leis matemáticas notáveis. Forma o seu lado negativo tudo aquilo que aos números se atribui fora da sua propriedade fundamental de traduzir relações de quantidade (Caraça, 1951, p. 73).

Buscar relações quantitativas favoreceu a formulação de problemas e a produção de resultados matemáticos. Já a atribuição aos números de poderes e significados alheios a essas relações dificultava a revisão das crenças que os envolviam. Quando uma descoberta atingia simultaneamente a explicação matemática e a visão de mundo da comunidade, aceitá-la exigia mais do que reconhecer a validade de um cálculo.

A Incomensurabilidade e os Limites das Explicações Pitagóricas

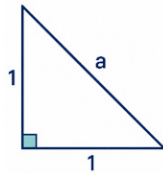
As relações examinadas pelos próprios pitagóricos acabaram por expor uma insuficiência em sua concepção de medida. Ao mesmo tempo, outras escolas

filosóficas questionavam a possibilidade de explicar as grandezas pela reunião de unidades mínimas. Esses dois movimentos tornaram visíveis dificuldades que não se resolviam dentro do quadro conceitual então adotado.

O problema da diagonal do quadrado

Um quadrado de lado unitário oferece uma situação simples para apresentar o impasse. Ao traçar sua diagonal, obtêm-se dois triângulos retângulos isósceles, cada um com catetos de medida 1. A questão é determinar o comprimento da diagonal, que corresponde à hipotenusa desses triângulos.

Figura 3 – A diagonal do quadrado e o triângulo retângulo isósceles.



Fonte: elaborada pelo autor.

Se a representa a diagonal, o teorema de Pitágoras fornece $a^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Portanto, essa medida deve ser um número que, multiplicado por si mesmo, resulte em 2. Nenhum inteiro positivo satisfaz essa condição. Restaria verificar se a medida poderia ser expressa por uma fração, como se esperava das comparações entre grandezas.

Para tal, valeram-se, conforme Ribnikov (1987, p. 59), do método de redução ao absurdo, permitindo examinar essa possibilidade. Admite-se, provisoriamente, que $a = m/n$, com m e n inteiros positivos sem divisor comum maior que 1. A fração está, portanto, em sua forma irredutível. Como $a^2 = 2$, a hipótese exige que $(m/n)^2 = 2$ e, consequentemente, $m^2 = 2n^2$.

O lado direito da igualdade é par; logo, m^2 também deve ser par. Como o quadrado de um número ímpar permanece ímpar, conclui-se que m é par. A condição de que m e n sejam primos entre si impede que ambos sejam pares. Para explicitar a contradição, podem-se examinar as três combinações de paridade ainda possíveis para uma fração irredutível:

- a) m e n ímpares;
- b) m ímpar e n par;
- c) m par e n ímpar.

No primeiro caso, o quadrado de m seria ímpar, enquanto o dobro do quadrado de n seria par. Os dois valores não poderiam ser iguais. Assim, a combinação de dois números ímpares é incompatível com $m^2 = 2n^2$.

No segundo caso, a mesma incompatibilidade permanece. O fato de n ser par não altera a paridade de $2n^2$: esse valor continua par, enquanto m^2 é ímpar. A igualdade inicial também não pode ser satisfeita.

No terceiro caso, como m é par, seu quadrado é divisível por 4. Por outro

lado, n é ímpar, de modo que $2n^2$ é divisível por 2, mas não por 4. Se fossem iguais, m^2 e $2n^2$ teriam de apresentar a mesma divisibilidade por 4, o que não ocorre.

A contradição também pode ser obtida em um único encadeamento. Partindo de $m^2 = 2n^2$, sabe-se que m é par. É possível, então, escrever $m = 2k$, em que k é inteiro, e substituir essa expressão na igualdade inicial.

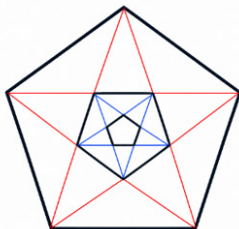
A substituição produz $4k^2 = 2n^2$, de onde resulta $n^2 = 2k^2$. O mesmo argumento de paridade mostra que n também é par. A hipótese inicial exigia uma fração irredutível, mas o raciocínio conduz a dois termos divisíveis por 2. Portanto, tal fração não existe, e a diagonal do quadrado unitário não pode ser expressa como razão entre inteiros.

O alcance desse resultado ultrapassa a impossibilidade de encontrar uma fração particular. Ele mostra que a diagonal e o lado do quadrado não possuem uma unidade de comprimento que caiba um número inteiro de vezes em ambos. São, portanto, grandezas incomensuráveis. A relação existe geometricamente, mas sua medida não encontra representação no domínio numérico admitido pelo modelo pitagórico.

Apresentar essa demonstração não significa afirmar que ela tenha sido o caminho efetivamente percorrido na descoberta histórica. O grau de abstração exigido pelo argumento de paridade alimenta a discussão sobre as circunstâncias em que a incomensurabilidade foi reconhecida. Outra hipótese desloca a atenção do quadrado para o pentágono regular.

Nessa interpretação, Boyer (1974, p. 54) levanta a possibilidade associada a Hipasus: o problema teria surgido da comparação entre o lado e a diagonal de um pentágono. Suas diagonais delimitam um pentágono menor; repetindo a construção, obtêm-se novas figuras, sucessivamente menores, sem que o processo precise terminar. A Figura 4 apresenta essa configuração. Sob essa hipótese, a descoberta estaria ligada a relações que envolvem $\sqrt{5}$, em vez de ter começado pela diagonal do quadrado e pela relação expressa por $\sqrt{2}$.

Figura 4 – Pentágonos concêntricos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A discussão dessa hipótese é defendida por Miguel (1994, p. 55), que remete aos argumentos desenvolvidos por Kurt von Fritz e ao relato de Pappus sobre a origem pitagórica da teoria da incomensurabilidade. Nesse relato, não se identifica um autor específico para a descoberta. Aparece, contudo, a narrativa de que a divulgação desse conhecimento teria sido seguida pela morte, por afogamento, de

um membro da escola. A coexistência dessas versões evidencia as dificuldades de reconstruir o episódio com precisão.

Independentemente da versão adotada para a descoberta, o problema conceitual permanece: certas relações entre grandezas não se deixam reduzir a uma razão entre inteiros. Reconhecer esse resultado colocava em questão o modo de definir número e a expectativa de que a medida sempre pudesse ser obtida pela repetição de uma unidade comum. A resistência não se dirigia apenas a uma nova resposta, mas à necessidade de modificar os critérios usados para aceitar algo como número.

O sigilo é apresentado como uma das reações a esse impasse. Manter a descoberta restrita à comunidade permitiria evitar a exposição de um resultado que afetava suas convicções. A passagem de Plutarco sobre Numa Pompilius, reproduzida no texto de referência, ajuda a situar o sentido atribuído à transmissão reservada dos conhecimentos pitagóricos. Segundo Caraça (1951 p.74), os pitagóricos tentaram fugir diante de tal problema, pois:

(...) Os pitagóricos não queriam pôr as suas obras por escrito, nem suas invenções, mas imprimiam a ciência na memória daqueles que eles reconheciam dignos disso. E como, algumas vezes, comunicaram alguns dos seus mais íntimos segredos e das mais escondidas subtilezas da geometria a algum personagem que não o merecia, eles diziam que os deuses, por presságios evidentes, ameaçavam vingar este sacrilégio e essa impiedade com alguma grande e pública calamidade (Caraça, 1951, p. 75).

O compromisso com uma determinada ordem matemática do universo estava ligado à organização e às crenças da comunidade. Por isso, admitir a incomensurabilidade significava enfrentar consequências que ultrapassavam o cálculo. O pensamento permanecia apoiado em experiências e convicções anteriores, capazes de orientar a investigação, mas também de restringir o que se estava disposto a reconhecer. É nessa resistência à revisão que a experiência primeira pode assumir a função de obstáculo epistemológico.

Outra resposta ao problema consistia em conservar as mônadas e atribuir ao segmento uma quantidade infinita delas. O recurso a um número indefinidamente grande de unidades procurava manter a explicação original, mesmo diante de suas insuficiências. Nessa tentativa, o infinito ainda não recebia um tratamento capaz de resolver a questão da medida. Modificava-se a quantidade admitida de unidades, mas permanecia a dificuldade de compreender a continuidade da reta.

A persistência dessa interpretação mostra como uma explicação pode continuar orientando o pensamento mesmo depois de produzir contradições. A crítica à opinião permite compreender tal resistência: uma convicção não se torna conhecimento científico apenas porque parece evidente ou atende a uma necessidade de explicação. De acordo com Bachelard (1996), a opinião pensa mal; ela não pensa: ela traduz necessidades de conhecimento. Assim, é preciso submetê-la a problemas e argumentos que possam revelar seus limites. A formação

de novas ideias depende, nesse sentido, da possibilidade de interrogar o que antes era tomado como seguro.

Os argumentos de Zenão e a composição da reta

A crítica desenvolvida pelos filósofos de Eleia colocou em discussão o fundamento das explicações apoiadas em unidades mínimas. Parmênides representa uma das principais referências dessa tradição, que submeteu a exame as relações entre o pensamento racional e aquilo que se apresenta à experiência. Nesse ambiente, o problema da composição das grandezas passou a ser tratado como uma questão sobre a coerência das explicações, e não somente sobre a possibilidade de observar ou medir objetos.

Com Zenão, a crítica assumiu a forma de argumentos destinados a mostrar consequências contraditórias de certas concepções de espaço e movimento. Ao considerar uma reta composta por corpúsculos justapostos, o problema recai sobre o que permitiria distingui-los e sobre a possibilidade de inserir novas unidades entre eles. O argumento é apresentado a seguir.

Como querem que a reta seja formada por corpúsculos justapostos? Com efeito, entre dois corpúsculos deve haver um espaço. Se assim não fosse, como distinguiríamos um do outro? Este espaço deve ser maior do que as dimensões dos corpúsculos, pois eles são as menores coisas que existem. Então, entre duas mônadas (A e B, por exemplo) posso intercalar uma terceira. Seja C essa mônada. Entre C e B deve haver ainda um espaço maior do que uma mônada; então posso intercalar outra mônada nesse espaço. Posso repetir este raciocínio indefinidamente de modo que sempre poderei colocar uma mônada entre outras duas. Então, pergunto a vocês, pitagóricos, a que número (quantas mônadas) corresponde o segmento? (Oliveira e Silva, 1968, p. 135).

Se sempre é possível intercalar uma unidade entre outras duas, torna-se difícil sustentar que a reta seja formada por corpúsculos mínimos separados. A objeção pitagórica à imobilidade defendida pelos eleatas também recebeu uma resposta: reconhecer o movimento pela experiência não equivale a explicar racionalmente como ele ocorre. O debate colocava frente a frente a evidência sensível e a coerência exigida pelo raciocínio, como trata Caraça (1951), tem-se a seguinte fala de Zenão:

Nós, eleatas, não o compreendemos, não conseguimos pô-lo de acordo com o resto da explicação racional, mas vós, pitagóricos, julgais compreender e nadais apenas em contradições. Das duas, uma: num segmento da reta, há um número finito de mônadas ou há uma infinidade? (Caraça, 1951, p. 78).

Os paradoxos da flecha e de Aquiles permitem desenvolver esse problema. Ao examinar a flecha, considera-se que ela ocupa uma posição determinada em cada instante. A dificuldade consiste em explicar como o movimento resulta dessa sucessão de posições, especialmente quando espaço e tempo são concebidos

como coleções de unidades isoladas. A identificação das posições não esclarece, por si só, a passagem de uma para outra.

No caso de Aquiles, uma tartaruga inicia a corrida à sua frente. Antes de alcançá-la, o corredor precisa chegar ao ponto de onde ela partiu; enquanto isso, o animal avança e estabelece uma nova distância. O mesmo raciocínio pode ser repetido indefinidamente. A dificuldade não está simplesmente na velocidade dos participantes, mas na relação entre uma sequência infinita de etapas e a realização do movimento. Os dois paradoxos expõem os limites de explicações que tratam o espaço e o tempo como somas imediatas de unidades discretas.

Esses argumentos se aproximam da discussão da incomensurabilidade porque tornam insuficiente a redução das grandezas a unidades contáveis. Para compreender medidas que escapam às frações, seria necessário modificar também a maneira de pensar a reta e suas divisões. As noções de limite e continuidade, elaboradas em outros contextos históricos, ofereceriam recursos para enfrentar essas questões. Sua formulação, entretanto, exigiria um percurso longo de revisão conceitual.

A Ampliação do Conceito de Número e o Problema da Continuidade

Comparar comprimentos por meio de uma unidade comum é um procedimento que parece natural quando se trabalha com medidas. Sua aplicação, porém, conduz a uma pergunta decisiva: sempre será possível encontrar uma unidade que se repita um número inteiro de vezes em dois segmentos dados? Embora não se possa localizar com exatidão o primeiro momento em que essa questão foi enfrentada, ela ajuda a compreender o sentido dos procedimentos elaborados para investigar a comensurabilidade.

Entre esses procedimentos estão as subtrações sucessivas. Compara-se uma grandeza com outra e considera-se o que resta, repetindo a operação em busca de uma medida comum. A chamada regra do polegar e os métodos de diminuição recíproca se situam nesse conjunto de tentativas. A relação com as divisões sucessivas e com o algoritmo euclidiano mostra como a busca de uma unidade compartilhada pode ser organizada por procedimentos matemáticos.

O emprego de varas, cordas e operações sucessivas permitia realizar comparações, mas não garantia a resolução do problema conceitual. Quando a expectativa de encontrar uma medida comum não era satisfeita, a dificuldade atingia a própria maneira de compreender as grandezas. Julgar essas tentativas como simples incapacidade ocultaria o conhecimento que as orientava. O erro, neste caso, segundo Bachelard (1996), não é apenas uma manifestação de ignorância ou de incerteza, nem ocorre por acaso. Ele é o efeito de um conhecimento anterior que tinha a sua validade num determinado momento histórico. Um procedimento eficaz em certas situações pode tornar-se insuficiente em outras; insistir em sua validade universal é o que permite interpretá-lo como manifestação de um obstáculo.

Segundo Miguel (1994), a percepção da existência de segmentos incomensuráveis, tanto no plano histórico quanto no cognitivo, tornou-se possível quando se questionou a crença de que a visão seria suficiente para fundamentar decisões sobre questões próprias da razão. Conforme Bachelard (1996), a superação dessa ilusão permite iniciar a formação de um novo conceito, até então inexistente.

O reconhecimento de grandezas incomensuráveis atingiu, portanto, diferentes aspectos do pensamento pitagórico. No plano aritmético, contrariava a expectativa de representar toda relação por inteiros. No plano geométrico, afastava a certeza de que sempre existiria um pequeno segmento capaz de medir exatamente dois outros. No plano filosófico, abalava a concepção de uma ordem inteiramente explicável pelas relações numéricas já admitidas. A mesma descoberta expunha limites de procedimentos e de convicções.

Dois problemas se tornam centrais nesse percurso. Um deles consiste em compreender o infinito e sua relação com a divisibilidade e o movimento. O outro envolve a própria natureza da reta: se ela não pode ser explicada satisfatoriamente por uma coleção de unidades mínimas, é necessário investigar o que caracteriza sua continuidade. Como diz Caraça (1951, p. 80), há na reta qualquer coisa que ultrapassa uma simples coleção de pontos. Dessa forma, as questões numéricas e métricas passam, assim, a depender de uma concepção mais ampla das grandezas.

Uma resposta desenvolvida na geometria grega foi tratar separadamente os números e as razões entre grandezas. Essa distinção permitiu avançar sem aceitar de imediato todos os objetos que hoje reconhecemos como números. As operações mantinham um significado geométrico: o quadrado de um comprimento correspondia a uma área, e o cubo, a um volume. Por isso, a^2 era associado ao quadrado de lado a e a^3 ao cubo de aresta a . Potências superiores não encontravam, nesse quadro, uma interpretação geométrica direta.

Nas aplicações, era possível recorrer a valores racionais aproximados. Cálculos de astronomia e geometria podiam ser conduzidos dessa maneira, como ocorria na logística grega. A aproximação resolvia necessidades operatórias, mas não esclarecia inteiramente o que eram as grandezas cuja medida exata não se expressava por frações. Permanecia, assim, uma distância entre a possibilidade de calcular e a fundamentação dos objetos utilizados.

O estudo das relações geométricas ampliou o conjunto de exemplos. A razão entre a diagonal e o lado do quadrado conduz a $\sqrt{2}$; no pentágono regular, a razão entre o lado e a diagonal é $(\sqrt{5} - 1)/2$. O percurso histórico discutido também inclui problemas associados a Arquitas, envolvendo expressões da forma $\sqrt[n]{n(n + 1)}$. Esses casos mostram que a incomensurabilidade não se restringia a uma única figura ou a uma única relação.

Os estudos atribuídos a Teodoro de Cirene abrangem outras raízes, como $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$. A multiplicação de exemplos tornava mais evidente a necessidade de compreender as características dessas grandezas e as relações existentes entre elas.

Com Teeteto, a análise passou a distinguir a comensurabilidade dos comprimentos daquela de seus quadrados. Dois segmentos podem não possuir uma unidade comum de comprimento e, ainda assim, gerar quadrados cujas áreas sejam comensuráveis. É o que ocorre com comprimentos $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$: a razão entre suas medidas é irracional, enquanto a razão entre as áreas correspondentes é $2/5$. Já no caso de $\sqrt{(1 + \sqrt{3})}$ e $\sqrt{(1 + \sqrt{5})}$, a incomensurabilidade permanece também na comparação dos quadrados. Classificar essas situações ampliava a compreensão das grandezas, mesmo sem constituir uma teoria aritmética dos números irracionais.

A contribuição de Eudoxo deslocou o tratamento das proporções para uma formulação que não dependia de encontrar uma unidade comum. Com isso, tornou-se possível comparar razões entre grandezas comensuráveis e incomensuráveis dentro de uma mesma abordagem. Esse passo é relevante para a história dos irracionais porque mostra uma maneira de enfrentar o problema sem obrigar todas as relações a caberem no modelo das frações.

A formulação permanecia geométrica e era organizada por definições e propriedades gerais. Sua aplicação às relações de semelhança e ao estudo de áreas e volumes permitia desenvolver demonstrações sem identificar toda razão com um número racional. Vista retrospectivamente, essa construção apresenta pontos de aproximação com a preocupação posterior de fundamentar os irracionais; isso não significa, contudo, que já contivesse a definição aritmética elaborada no século XIX.

Para acompanhar esse modo de comparar grandezas, convém destacar duas bases do raciocínio.

1. A primeira reúne propriedades gerais da igualdade e da comparação. Se $a = b$ e $b = c$, então $a = c$; acrescentar a mesma grandeza a duas grandezas iguais preserva a igualdade; o mesmo vale para a subtração, quando admissível. A coincidência permite reconhecer a igualdade, e o todo é maior do que uma de suas partes. Essas propriedades sustentam as transformações utilizadas nas demonstrações.

2. A segunda diz respeito à comparação por múltiplos. Para duas grandezas positivas a e b da mesma espécie, podem-se escolher inteiros positivos n e m de modo que $n \times a > b$ e $m \times b > a$. Portanto, a repetição de cada grandeza permite ultrapassar a outra, condição que torna possível relacioná-las nessa teoria.

No Livro V dos Elementos, a igualdade de razões é formulada pela comparação de múltiplos correspondentes. A definição apresentada a seguir expressa esse procedimento.

Diz-se que as grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta quando, tomando-se equimúltiplos quaisquer da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos os iguais a, ou ambos os menores que os últimos equimúltiplos considerados em ordem correspondente (Euclides, Apud Eves, 1995, p. 173).

Considere-se a razão entre a e b e a razão entre c e d , com grandezas positivas e de mesma espécie em cada par. Em vez de procurar uma fração que represente cada razão, comparam-se seus múltiplos. Para quaisquer inteiros positivos m e n , as relações de ordem devem coincidir: $m \times a > n \times b$ corresponde a $m \times c > n \times d$; $m \times a = n \times b$ corresponde a $m \times c = n \times d$; e $m \times a < n \times b$ corresponde a $m \times c < n \times d$. A igualdade $a/b = c/d$ se estabelece quando essa correspondência vale para todas as escolhas de m e n .

A comparação pressupõe que as grandezas possam exceder uma à outra quando multiplicadas por inteiros apropriados. Essa condição aparece antes da definição de proporção, na definição 4 do Livro V, e se relaciona ao princípio conhecido como axioma de Arquimedes. Diz-se que (duas) grandezas têm uma razão de uma para outra se cada uma puder, quando multiplicada, exceder a outra (Euclides *apud* Struik, 1992, p. 84).

Os procedimentos associados a Eudoxo e Arquimedes permitem compreender a importância das aproximações no estudo das grandezas. Em uma interpretação moderna, pode-se considerar valores racionais que se aproximam de uma medida por baixo e por cima, reduzindo a diferença entre eles tanto quanto se queira. Essa leitura estabelece uma ligação com o conceito de limite, embora a linguagem e a fundamentação empregadas pelos gregos fossem diferentes das construções posteriores.

O recurso à demonstração, especialmente à redução ao absurdo, permitia trabalhar com tais relações sem depender de uma explicação aritmética dos infinitesimais. Ainda assim, a possibilidade de desenvolver argumentos geométricos não encerrava o problema da continuidade. Faltava construir um domínio numérico no qual as medidas incomensuráveis fossem definidas e suas operações justificadas.

A continuidade desse percurso não ocorreu de forma uniforme. Em diferentes períodos, o uso de quantidades não racionais conviveu com restrições quanto à sua aceitação como números. No tratamento de problemas algébricos atribuído a Diofanto, por exemplo, privilegiavam-se respostas racionais positivas. A identificação de uma quantidade não racional não implicava reconhecê-la como solução admissível. Esse descompasso entre a presença de um objeto nos problemas e seu estatuto matemático ajuda a compreender a duração das dificuldades.

Outras tradições de cálculo ampliaram o trabalho com quantidades que hoje representamos por radicais, como $\sqrt{2}$. A produção matemática indiana e sua circulação, com participação de autores árabes, contribuíram para esse processo. Na Europa, entretanto, o emprego de tais quantidades não eliminou imediatamente as reservas sobre sua natureza. A denominação números surdos expressa parte dessa trajetória. Em Aritmética Integra, de 1544, Stifel reconhecia aproximações entre essas quantidades e os racionais, mas ainda hesitava em atribuir-lhes o mesmo estatuto. A expressão “estão escondidos sob uma espécie de nuvem de infinitude” sintetiza essa dificuldade.

O desenvolvimento do simbolismo algébrico também não significou o desaparecimento imediato da separação entre número e grandeza. Em Viète,

as quantidades geométricas continuavam vinculadas à dimensão: o lado, a área e o sólido correspondiam a diferentes potências. Os números, por sua vez, eram pensados como positivos, racionais e sem dimensão. Assim, o avanço na escrita e no tratamento das expressões coexistia com uma concepção que reservava à geometria o domínio das grandezas incomensuráveis.

Na abordagem cartesiana, essa separação passou a ser modificada pela possibilidade de representar por segmentos os resultados de operações entre grandezas. O produto de dois comprimentos, por exemplo, não precisava ficar restrito à interpretação de uma área: podia ser representado por outro comprimento, considerando uma unidade. Essa maneira de articular cálculo e representação aparece no seguinte trecho: “E deve-se notar que por a^2 ou b^3 ou semelhantes, eu não o concebo ordinariamente senão linhas simples, conquanto, para me servir dos termos usados em álgebra, eu os denomino quadrados ou cubos” (Descartes *apud* Costa, 1971, p. 221).

A aproximação entre operações algébricas e construções geométricas favoreceu uma compreensão mais ampla das quantidades envolvidas. As medidas irracionais puderam participar desse tratamento, em vez de permanecer à margem do domínio dos números. A questão passou a incluir a necessidade de representar numericamente os diferentes valores de uma grandeza, mesmo quando não correspondessem a razões entre inteiros.

A geometria, no entanto, ainda fornecia o suporte para essa interpretação. Escolhido um segmento como unidade, os demais recebiam medidas, e os irracionais apareciam nos casos em que não havia comensurabilidade com essa unidade. Desse modo, sua aceitação avançava, mas a fundamentação continuava associada à intuição do comprimento e à possibilidade de construir segmentos.

Esse avanço também coexistia com procedimentos de evitação. Para Glaeser (1985), o tratamento separado de semirretas, a preferência por certas regiões do plano e os expedientes para lidar com as chamadas raízes falsas indicam que a aceitação de novos objetos não se realiza de uma só vez. Uma teoria pode utilizar determinadas quantidades e, ainda assim, recorrer a formas de apresentação que reduzam seu emprego. Essa coexistência entre uso e resistência interessa à análise dos obstáculos.

A etapa seguinte exigia uma resposta mais ampla: como justificar as operações com irracionais e suas propriedades sem tomar a figura geométrica como fundamento suficiente? Representar uma medida por um segmento não demonstrava, por si só, todas as regras de cálculo. No século XIX, as construções de Dedekind (1901) e Cantor (1872) permitiram enfrentar essa exigência, oferecendo bases aritméticas para o conjunto dos números reais.

A proposta desenvolvida em Continuidade e números irracionais toma como problema a correspondência entre a reta e o domínio numérico. A reta é concebida como contínua, mas os racionais não representam todos os pontos que nela se distinguem. Para esclarecer o sentido dessa continuidade, examina-se o que ocorre quando seus pontos são separados em duas classes ordenadas. A passagem seguinte apresenta o princípio utilizado nessa análise.

Verificou-se que todo ponto de uma reta determina uma decomposição dela em duas partes, de tal natureza que todo ponto de uma delas está à esquerda de todo ponto da outra. Ora, eu vejo a essência da continuidade na inversão desta propriedade e, portanto, no princípio seguinte: “se uma repartição de todos os pontos de reta em duas classes é de tal natureza que todo o ponto de uma das classes está à esquerda de todo o ponto de outra, então existe um e um só ponto pelo qual é produzida esta repartição de todos os pontos em duas classes, ou esta decomposição da reta em duas partes” (Dedekind, 1901 *apud* Caraça, 1951, p. 60).

A construção conceitual proposta por Dedekind (1901) fundamenta-se na noção de corte. Nessa perspectiva, realizar um corte em uma reta significa distribuir seus pontos em dois conjuntos não vazios, de modo que cada ponto pertença a apenas um deles e todos os pontos do primeiro estejam à esquerda de qualquer ponto do segundo.

Desse modo, cada ponto P estabelece um corte na reta. Conforme o postulado da continuidade de Dedekind (1901), a afirmação inversa também é válida: todo corte corresponde a um único ponto da reta. Na construção dos números reais a partir dos racionais, um corte pode ser representado por um subconjunto dos números racionais que satisfaz três condições: (i) é não vazio e não abrange todos os racionais; (ii) cada elemento pertencente ao subconjunto é menor que qualquer racional que não lhe pertença; e (iii) o subconjunto não possui elemento máximo.

Quanto à existência de elementos extremos nas seções inferior e superior, podem ser consideradas, inicialmente, quatro possibilidades: (i) a seção inferior possui máximo e a superior possui mínimo; (ii) a seção inferior possui máximo, mas a superior não possui mínimo; (iii) a seção inferior não possui máximo, enquanto a superior possui mínimo; e (iv) nenhuma das seções apresenta esses extremos. Entretanto, a primeira possibilidade não ocorre em uma partição dos racionais desse tipo, pois entre dois números racionais distintos sempre existe outro racional. Além disso, ao adotar a definição de corte cuja seção inferior não possui máximo, consideram-se apenas a terceira e a quarta possibilidades.

Neste estudo, o interesse concentra-se na quarta possibilidade, que corresponde a um número irracional. Um exemplo é a separação em que a seção inferior reúne todos os racionais negativos e os racionais não negativos cujos quadrados são menores que 2, enquanto a seção superior contém os racionais positivos cujos quadrados são maiores que 2. Nesse caso, não existe um maior elemento na seção inferior nem um menor elemento na superior. A aparente lacuna decorre da inexistência de um número racional cujo quadrado seja igual a 2. Na construção de Dedekind (1901), esse corte define o número irracional $\sqrt{2}$, conferindo significado aritmético à separação entre as duas seções.

Com essa formulação, Dedekind (1901) contribui para uma compreensão dos números reais fundamentada nas propriedades dos números racionais, especialmente em sua ordenação. Embora a reta ofereça uma interpretação

geométrica dos cortes, a construção permite definir os irracionais sem depender da representação de grandezas geométricas. Assim, a continuidade passa a receber uma formulação aritmética, ampliando as possibilidades de compreensão do conjunto dos números reais.

Na abordagem de Cantor, a construção dos números reais utiliza sequências de números racionais cujos termos se tornam progressivamente próximos entre si, denominadas sequências de Cauchy. Assim como ocorre na proposta de Dedekind (1901), essa construção envolve processos infinitos e contribui para a fundamentação da continuidade. As duas abordagens, contudo, enfatizam aspectos distintos: enquanto Dedekind (1901) se apoia na ordenação dos racionais, Cantor considera as diferenças e as distâncias entre os termos das sequências, relacionando sua construção às condições que permitem estabelecer a convergência no conjunto dos números reais.

As contribuições de Dedekind (1901) e Cantor (1872) ofereceram fundamentos rigorosos para o tratamento da continuidade e dos números irracionais. Com isso, tornou-se possível reformular as dificuldades associadas à incomensurabilidade, identificadas na matemática grega, especialmente entre os pitagóricos. A existência de grandezas incomensuráveis passou, assim, a ser compreendida no âmbito de uma construção numérica que ultrapassa o conjunto dos números racionais.

Atualmente, define-se um número irracional como um número real que não pode ser expresso pela razão entre dois números inteiros, com denominador diferente de zero. Sua representação decimal é infinita e não periódica. Entre os exemplos encontram-se raízes como $\sqrt{2}$, além do número π (3,14159...), que expressa a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. O uso de computadores permite calcular expansões decimais desse número com grande quantidade de casas. Outro exemplo é o número e (2,71828...), que pode ser definido pelo limite da expressão $(1 + 1/x)^x$ quando x tende ao infinito.

IMPLICAÇÕES PARA O ENSINO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

A distância entre esse percurso histórico e a apresentação escolar do tema merece atenção. Uma definição seguida de exemplos pode permitir ao aluno reconhecer uma forma de escrita, sem que ele compreenda por que o conceito foi necessário. Quando a atividade se resume a separar racionais de irracionais em uma lista, o acerto pode decorrer da memorização de sinais ou de exemplos conhecidos. Falta, nesse caso, examinar o problema matemático que sustenta a classificação.

A passagem rápida para as operações com radicais pode acentuar essa dificuldade. O aluno aprende a simplificar expressões, aplicar propriedades e seguir uma sequência de passos, mas nem sempre relaciona esses procedimentos à natureza dos números com que trabalha. A habilidade operatória ocupa o centro do ensino, enquanto a compreensão de medida, representação e incomensurabilidade permanece pouco explorada.

Indecisões e explicações contraditórias podem revelar os limites desse aprendizado. Ao justificar uma resposta, o estudante pode mobilizar ideias que não aparecem quando apenas executa um cálculo. Por isso, a avaliação da compreensão precisa considerar seus argumentos e os significados atribuídos aos símbolos. O uso correto de uma regra não basta para concluir que o conceito de número irracional foi apropriado.

As concepções formadas a partir da experiência imediata ajudam a explicar parte dessas dificuldades. A confiança no que pode ser observado ou obtido por uma medida concreta pode levar o aluno a tomar uma aproximação decimal como valor exato, ou a supor que toda medida deva corresponder a uma fração. Quando essas ideias deixam de ser interrogadas, tornam-se resistentes e dificultam a elaboração de relações abstratas. Do ponto de vista bachelandiano, a análise dos obstáculos permite investigar o papel dessas concepções no ensino.

O estudante, portanto, não chega ao estudo dos irracionais sem referências anteriores. Ele já possui experiências com contagem, divisão, medida e diferentes representações numéricas. Essas experiências participam das respostas que produz e precisam ser consideradas no planejamento. Assim, de acordo com Vygotsky (1989, p.94), em toda a situação de aprendizagem proporcionada no ambiente escolar há sempre uma história prévia.

Cabe ao professor criar condições para que essas interpretações sejam explicitadas e examinadas. Uma situação contextualizada pode favorecer o início da discussão, desde que o trabalho avance para as relações matemáticas que ela permite estabelecer. O objetivo é ajudar o aluno a justificar suas conclusões e a utilizá-las para além do caso particular. A comparação entre conceitos cotidianos e científicos oferece elementos para compreender esse movimento.

O poder dos conceitos científicos é evidente na esfera que geralmente define o domínio último dos conceitos: a realização consciente e a voluntariedade. Ao mesmo tempo, nesta mesma esfera, podem-se observar os pontos fracos dos conceitos cotidianos da criança, conceitos que têm força na esfera da aplicação concreta, situacionalmente específica, espontânea, na esfera da experiência e do empirismo (Vygotsky *apud* Wertsch, 1988, p.118).

A elaboração conceitual se aprofunda quando o estudante consegue reconhecer relações comuns em situações diferentes e explicar por que elas são válidas. Esse avanço depende das interações e das formas de mediação presentes no ensino. Nessa perspectiva vygotskiana, o trabalho com a abstração se desenvolve, assim, por meio de perguntas, argumentos e confrontos que permitem reorganizar os conhecimentos mobilizados inicialmente.

Uma proposta para os números irracionais precisa dar espaço a esse processo. Isso implica tornar o conceito objeto de investigação e considerar as razões pelas quais certas respostas parecem plausíveis aos alunos. A escolha das atividades deve permitir que eles percebam o alcance e os limites dos conhecimentos que já possuem.

A discussão histórica sugere quatro frentes de trabalho que podem orientar esse planejamento. Elas articulam o levantamento das ideias dos estudantes, a análise dos obstáculos, a elaboração das situações de ensino e o acompanhamento dos erros produzidos ao longo das atividades.

A primeira frente consiste em conhecer como os alunos compreendem número e medida. Suas respostas a situações anteriores, assim como tarefas preparadas especificamente para esse levantamento, podem mostrar quais relações eles estabelecem entre frações, decimais, raízes e comprimentos. O interesse está em identificar os critérios utilizados, e não apenas em registrar se a resposta coincide com a esperada.

A segunda frente procura reconhecer os obstáculos que sustentam as dificuldades observadas. A análise das produções escolares pode dialogar com os impasses históricos, desde que essa aproximação seja examinada em cada situação. O professor busca compreender qual conhecimento orienta o erro e por que ele resiste à mudança. Conforme Brousseau (1983, p. 166), “a identificação e a caracterização do obstáculo são essenciais para análise e para construções didáticas.”

A terceira frente envolve a construção de problemas que tornem visíveis os limites das concepções iniciais. A comparação entre o lado e a diagonal do quadrado, assim como entre o lado e a diagonal do pentágono regular, oferece possibilidades para discutir a existência de uma medida comum. A história fornece os problemas de referência; sua transformação em atividade escolar exige considerar os conhecimentos dos alunos e os objetivos da aprendizagem. Não se trata de reproduzir todas as circunstâncias históricas, mas de explorar a questão matemática que produziu o impasse.

A quarta frente acompanha os erros durante o desenvolvimento das atividades. Uma resposta incorreta pode indicar uma regra generalizada indevidamente, uma interpretação parcial ou uma concepção ainda não revista. Ao analisar essas possibilidades, o professor obtém elementos para formular novas perguntas e ajustar suas intervenções. O erro passa a contribuir para o planejamento, em vez de constituir apenas um resultado a ser corrigido.

Essas frentes de trabalho precisam ser articuladas e retomadas conforme as respostas da turma. Nenhuma sequência assegura antecipadamente a compreensão do conceito, pois novas dificuldades podem aparecer ao longo do processo. A proposta permanece, portanto, aberta à análise de sua realização e à elaboração de outras intervenções. Essa possibilidade de desenvolvimento constitui uma continuidade para o presente estudo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo teve como objetivo examinar obstáculos envolvidos na construção histórica do conceito de números irracionais e discutir suas possíveis implicações para o ensino. Não se pretendeu esgotar a diversidade das questões relacionadas

ao tema, mas identificar e analisar alguns dos impasses que marcaram sua constituição. O percurso apresentado evidencia que a ampliação do conceito de número exigiu a revisão de conhecimentos e convicções que, embora permitissem explicar determinadas situações, se mostraram insuficientes diante de novos problemas. Nesse sentido, a incomensurabilidade e a continuidade constituíram questões fundamentais para a elaboração de formas de compreender as relações entre número, medida e grandeza.

A análise dos modos de conceber os números irracionais, desde as interpretações pitagóricas até as construções de Dedekind (1901) e Cantor (1872), permitiu reconhecer que sua aceitação resultou de um processo prolongado de mudanças conceituais. A impossibilidade de expressar determinadas medidas por razões entre números inteiros colocou em questão a abrangência dos conhecimentos disponíveis e impulsionou a busca por outras fundamentações. Assim, a história contribui para compreender tanto os resultados alcançados quanto as dificuldades e resistências que acompanharam sua elaboração. Esse entendimento oferece referências para uma abordagem educacional que atribua significado aos conceitos e apresente os problemas que motivaram sua construção.

No âmbito do ensino, as discussões desenvolvidas apontam para a importância de investigar os conhecimentos que os estudantes mobilizam ao interpretar frações, representações decimais, raízes e medidas. A compreensão dos números irracionais requer oportunidades para reconhecer os limites dos números racionais, distinguir valores exatos de aproximações e elaborar argumentos sobre as relações entre grandezas. Nessa perspectiva, os erros podem fornecer indícios de concepções que precisam ser examinadas e reorganizadas, contribuindo para orientar as intervenções do professor. A aproximação entre os obstáculos históricos e as dificuldades escolares, contudo, exige cuidado, pois a aprendizagem ocorre em condições distintas daquelas em que os conceitos foram originalmente produzidos.

A articulação entre a análise epistemológica e o planejamento didático constitui, portanto, uma contribuição central deste estudo. Conhecer os impasses históricos pode auxiliar na seleção de problemas e na elaboração de atividades, mas sua utilização em sala de aula demanda considerar os objetivos de aprendizagem, os conhecimentos dos estudantes e as formas de mediação. Conforme Mugny e Perez (1988, p. 267), a Didática da Matemática deve preocupar-se tanto com a determinação das condições que favorecem a evolução dos sistemas de conhecimentos quanto com a análise das situações didáticas, buscando esclarecer as variáveis que asseguram sua reprodutibilidade. Essa perspectiva reforça a necessidade de investigar as condições de realização das propostas e de acompanhar os processos de aprendizagem que elas possibilitam.

Como continuidade, pretende-se desenvolver e implementar um projeto que proponha ações didáticas para o ensino dos números irracionais, articulando o enfoque epistemológico à análise das situações de ensino. O levantamento das concepções dos estudantes, a seleção de problemas relacionados à incomensurabilidade e o acompanhamento das estratégias e dos erros poderão orientar sua organização. A implementação permitirá examinar as possibilidades

e os limites das atividades, bem como revisar as intervenções em função das respostas produzidas em sala de aula. Espera-se, dessa maneira, que a reflexão histórico-epistemológica desenvolvida neste trabalho contribua para práticas de ensino que favoreçam a compreensão dos números irracionais e de seu lugar na construção do conhecimento matemático.

REFERÊNCIAS

- BACHELARD, G. **A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.
- BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.
- BROUSSEAU, G. **Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques**. Recherches en Didactique des Mathématiques, Bordeaux, v. 4, n. 2, p. 165-198, 1983.
- CANTOR, Georg. **Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen**. Mathematische Annalen, v. 5, p. 123–132, 1872. Disponível em:
- CARAÇA, B. de J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1951.
- COSTA, A. M. **As ideias fundamentais da matemática e outros ensaios**. São Paulo: Grijalbo, 1971.
- DEDEKIND, Richard. **Essays on the theory of numbers**. Tradução de Wooster Woodruff Beman. Chicago: Open Court Publishing Company, 1901.
- DUROUX, A. **La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure**. Petit x, Grenoble, n. 3, p. 43-67, 1983.
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 1995.
- GLAESER, G. **Epistemologia dos números relativos**. Boletim GEPEM, [S. l.], n. 17, p. 29-124, 1985.
- MIGUEL, A. Reflexão acerca da educação matemática contemporânea. **Educação Matemática em Revista**, [S. l.], n. 2, 1. sem. 1994.
- MUGNY, G.; PÉREZ, J. A. **Psicología social del desarrollo cognitivo**. Barcelona: Anthropos, 1988.
- OLIVEIRA, A. M.; SILVA, A. **Biblioteca da matemática moderna**. São Paulo: Lisa, 1968. v. 1.
- RIBNIKOV, K. **Historia de las matemáticas**. Moscou: Mir, 1987.

STRUIK, D. J. **História concisa da matemática**. Lisboa: Gradiva, 1992.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1989.

WERTSCH, J. V. **El análisis semiótico de Vygotsky**. In: WERTSCH, J. V. Vygotsky y la formación social de la mente. Barcelona: Paidós, 1988. cap. 4, p. 93-139.