



O Método Modesto de Aproximação de uma Raiz Quadrada Qualquer por Subtrações de Ímpares

The Modest Method of Approximation of Any Square Root by Subtraction of Odd Numbers

Luís Antonio Modesto

Resumo: Este estudo apresenta uma prova matemática que valida um método antigo de aproximação da raiz quadrada, atribuído à tradição chinesa, baseado em subtrações sucessivas de números ímpares. Demonstra-se que o número de subtrações possíveis corresponde à parte inteira da raiz quadrada, enquanto o resto, dividido pelo próximo número ímpar, fornece uma aproximação decimal da parte fracionária. Além da demonstração formal, apresenta-se um exemplo aplicado e discute-se a relevância histórica e pedagógica do método para o ensino da matemática.

Palavras-chave: raiz quadrada; método chinês adaptado; ensino da matemática; demonstração formal; história da matemática.

Abstract: This study presents a mathematical proof that validates an ancient method of approximating the square root, attributed to the Chinese tradition, based on successive subtractions of odd numbers. It demonstrates that the number of possible subtractions corresponds to the integer part of the square root, while the remainder, divided by the next odd number, provides a decimal approximation of the fractional part. In addition to the formal proof, an applied example is presented, and the historical and pedagogical relevance of the method for mathematics teaching is discussed.

Keywords: square root; adapted Chinese method; mathematics teaching; formal proof; history of mathematics.

INTRODUÇÃO

A busca por métodos de cálculo aproximado das raízes quadradas é uma preocupação presente em diversas civilizações antigas, incluindo a matemática chinesa, indiana e árabe. Entre os algoritmos históricos, destaca-se o Método Chinês, processo no qual, mediante subtrações sucessivas de números ímpares, é possível determinar a parte inteira correspondente à raiz quadrada de um quadrado perfeito em função da quantidade de subtrações efetuadas. O presente estudo tem como objetivo demonstrar matematicamente a validade de uma adaptação do método chinês no qual é possível determinar uma raiz quadrada de um número qualquer com aproximação na casa decimal, bem como discutir sua importância pedagógica e histórica.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

É sabido que a soma dos primeiros n números ímpares consecutivos resulta em um quadrado perfeito, conforme a identidade:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2.$$

Essa propriedade constitui o alicerce do método chinês para a determinação aproximada da raiz quadrada. Além disso, aproximações analíticas, como a expansão em série de Taylor, permitem justificar o uso da fração $R/(2n+1)$ para estimar a parte decimal.

TEOREMA E DEMONSTRAÇÃO

Seja $x \in \mathbb{N}$. Para encontrar $\sqrt{x}$, considere a sequência dos ímpares 1, 3, 5, 7, ... Subtraindo-os sucessivamente de x até que não seja mais possível, o número de subtrações bem-sucedidas é a parte inteira da $\sqrt{x}$. O resto, dividido pelo próximo ímpar, fornece a parte fracionária aproximada.

Prova:

1. Fato conhecido (soma dos ímpares):

$$1+3+5+\dots+(2k-1) = k^2$$

Demonstração por indução:

- Base: para $k = 1$, temos $1 = 1^2$.
- Passo indutivo:

Suponha que a soma dos primeiros k ímpares seja k^2

Então, acrescentando o próximo ímpar:

$$1+3+5+\dots+(2k-1) + (2k+1) = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2.$$

Assim, vale para todo $k \in \mathbb{N}$. 

2. Ligação com a raiz quadrada:

Se subtraímos 1, 3, 5, ..., (2k-1), ..., (2k-1) de x , o resultado é:

$$x - (1+3+5+\dots+(2k-1)) = x - k^2. \quad x - (1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1)) = x - k^2.$$

- Se $x \geq k^2$, conseguimos efetuar k subtrações.
- Se $x < (k+1)^2$, não conseguimos completar a próxima subtração.
- Portanto, temos: $k^2 \leq x < (k+1)^2$

Isso mostra que:

$$K = \sqrt{x}$$

Ou seja, o número de subtrações possíveis é exatamente a parte inteira da raiz quadrada.

3. Parte fracionária aproximada:

Após k subtrações, resta:

$$R = x - k^2.$$

Agora, seja

$$y = \sqrt{x}.$$

Então:

$$y = \sqrt{x}.$$

Desenvolvendo em série de Taylor (aproximação de primeira ordem):

$$\sqrt{x} \approx k + \frac{R}{2k}$$

Mas observe que o próximo ímpar da sequência é $2k + 1$. Portanto, usar a fração:

$$\frac{R}{2k + 1}$$

É uma aproximação natural, pois está muito próxima de $\frac{R}{2k}$

Assim, obtemos:

$$y = \sqrt{x} \approx k + \frac{R}{2k + 1}$$

✓ Isso prova que o método fornece uma aproximação coerente e próxima da verdadeira raiz quadrada.

4. Exemplo

Para determinar $\sqrt{20}$:

$$20 - 1 = 19$$

$$19 - 3 = 16$$

$$16 - 5 = 11$$

$$11 - 7 = 4$$

Não é possível prosseguir, pois $4 - 9 < 0$.

Parte inteira = 4.

Resto = 4.

Resumindo:

- $y = \sqrt{20}$.
- Subtrações possíveis: 1, 3, 5, 7 → total = 4 → parte inteira = 4.
- Resto: $20 - 16 = 4$.
- Próximo ímpar: 9.
- Aproximação:
 $y = \sqrt{20} \approx 4 + 4/9 \approx 4,44$.
- Valor real: $\sqrt{20} \approx 4,472$
- Erro relativo: $\approx 0,7\%$, mostrando a boa precisão do método.

DISCUSSÃO

O método apresenta simplicidade algorítmica e valor pedagógico, pois conecta propriedades aritméticas fundamentais à noção de raiz quadrada. Além disso, sua abordagem histórica permite compreender a matemática como uma construção cultural, enriquecendo práticas didáticas no ensino fundamental e médio.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi apresentada e validada matematicamente a técnica chinesa, adaptada para a aproximação de raízes quadradas quaisquer por meio de subtrações sucessivas de números ímpares. O método se mostrou eficiente para identificar a parte inteira e fornecer uma boa estimativa da parte decimal. Além de seu valor histórico, ele apresenta um potencial didático significativo.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 2004.

KATZ, V. **A History of Mathematics: An Introduction**. 3. ed. Boston: Addison-Wesley, 2009.