



Conjectura de Collatz e Números Perfeitos

Collatz Conjecture and Perfect Numbers

Sandoval Amui

Pesquisador independente

Resumo: Apresento neste estudo as principais conclusões de minha pesquisa sobre a Conjectura de Collatz. O desenvolvimento e os resultados da pesquisa constam de trabalhos já publicados e listados ao final deste texto. Uma única fórmula expressa qualquer sequência sob as regras da conjectura. Minha análise da conjectura se fundamentou em um arranjo numérico dos números naturais (que denominei esquema numérico), o qual permite explicar todas as questões relativas à conjectura, assim como a ocorrência dos números perfeitos, apresentada neste texto. Esses dois enigmas da teoria dos números têm mais em comum do que serem apenas antigos e famosos.

Palavras-chave: Collatz; $3n + 1$; progressão geométrica; número perfeito; Euclides.

Abstract: I present in this paper the main conclusions of my research on the Collatz Conjecture. The reader will find the details and results of my work in the material listed at the end of this text. A unique formula expresses any sequence under the conjecture rules. In dealing with the conjecture, I arranged all the natural numbers in a specific numerical arrangement, which explains all questions regarding the conjecture, as well as the occurrence of perfect numbers introduced in this paper. These two subjects of number theory have more in common than simply being old and famous riddles.

Keywords: Collatz; $3n + 1$; geometric progression; perfect number; Euclid.

INTRODUÇÃO

Os Dois Enigmas

O leitor interessado em temas matemáticos já deve ter se deparado com a indagação de qual é a questão matemática mais antiga ainda não esclarecida. Há várias, entre elas os “números perfeitos” e a “conjectura de Collatz”, dois enigmas muito antigos e que continuam a desafiar os melhores matemáticos do mundo.

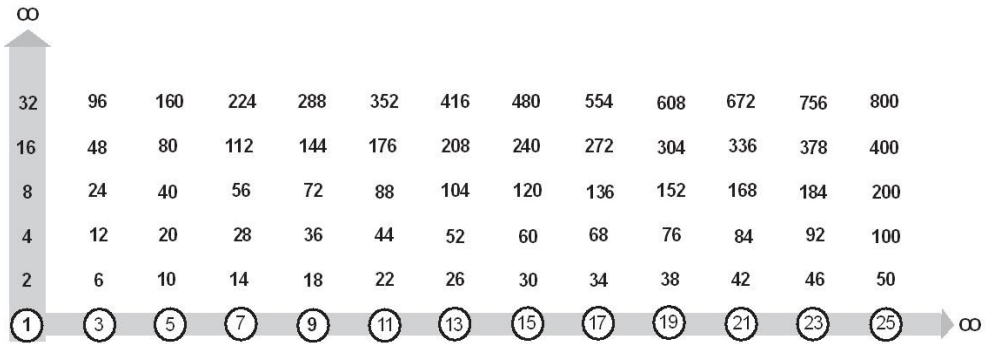
O matemático alemão Lothar Collatz propôs formalmente a conjectura em 1937, mas certamente a questão é bem mais antiga. Números perfeitos remontam à Antiguidade, com especial referência a Euclides, o sábio grego que mais contribuiu para o tema dos números perfeitos e para a aritmética em geral. Indiscutivelmente, dois temas interessantes de análise numérica, a conjectura não provada e os números perfeitos não satisfatoriamente esclarecidos, que até o momento nada tinham em comum, exceto serem ambos antigos e famosos.

Esquema Numérico

Em trabalho recente, ao analisar a conjectura de Collatz, criei um arranjo de números (por mim denominado “esquema numérico”, ilustração I.1) que me permitiu

entender, explicar e provar o referido enigma matemático. Minha análise foi objeto de artigos e de um livro, listados neste estudo. O esquema numérico contempla todos os números naturais, de “1” a “ ∞ ”, sem repetição de nenhum número com progressões geométricas de razão “2”, formadas a partir de cada número ímpar (“1, 3, 5, 7, 9, ...”). Todos os números de cada progressão geométrica são pares, exceto o número inicial, que é ímpar. Cada progressão vai ao infinito (necessariamente, uma instância de números). Esse esquema é a representação aritmética da conjectura.

Ilustração I.1 – Esquema numérico.



À época da análise da conjectura, embora não tivesse nenhuma outra questão matemática em mente, vaticinei que o esquema numérico por mim idealizado poderia servir para a análise de outras questões da teoria dos números.

Posteriormente, ao deparar-me com a questão dos números perfeitos, verifiquei que minha intuição estava certa, uma vez que o esquema numérico me permitiu lançar mais luz sobre esse tema tão antigo e ainda tão obscuro. Por essa razão, embora o tema dos números perfeitos seja uma questão aritmética distinta da conjectura de Collatz, elaborei este estudo como uma extensão do livro sobre a referida conjectura. Isso implica também a eventual necessidade de conhecer o conteúdo do livro para o completo entendimento deste texto.

CONJECTURA DE COLLATZ, SÍNTESE DA PESQUISA

Propriedades do Esquema Numérico

O esquema numérico explica todas as questões relativas à conjectura de Collatz, prova que é verdadeira e permite generalizar a regra “ $3n + 1$ ”. Entre outras conclusões, mostro que qualquer sequência sob as regras da conjectura pode ser expressa por uma única fórmula, bem simples.

A progressão geométrica formada a partir do número “1” é o elemento chave para explicar a conjectura, bem como as propriedades das sequências geradas pelas duas regras da conjectura.

Cada sequência de Collatz se move livremente de uma progressão geométrica para outra diferente, até chegar à progressão geométrica comandada pelo número

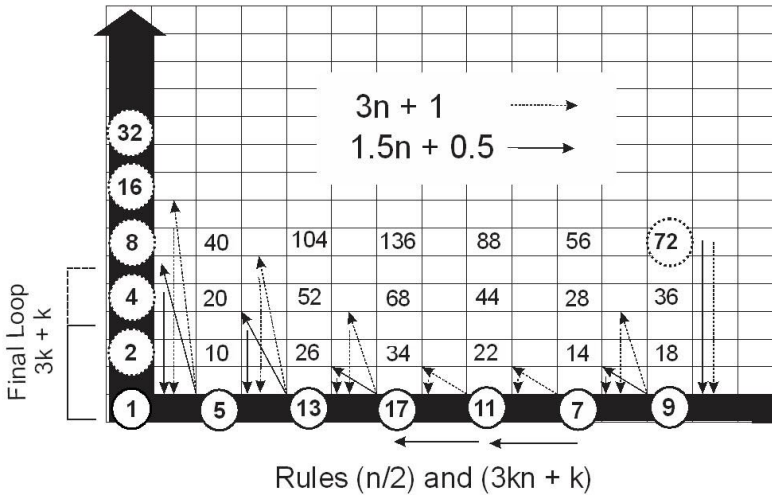
“1”. Cada sequência decresce segundo a regra “ $n/2$ ” (aplicada aos números pares) e desloca-se lateralmente pela regra “ $3n + 1$ ” (aplicada aos números ímpares). Prevalece um mecanismo aritmético simples que leva todas as sequências para o ciclo final.

A partir de qualquer número ímpar em uma sequência de Collatz, pode ser demonstrado aritmeticamente que o número ímpar seguinte poderá ser maior ou menor que o número ímpar anterior, mas nunca igual a ele. Isso significa que não ocorrerá ciclo (loop) que não seja o ciclo final. Em outras palavras, nenhum ciclo intermediário impede qualquer sequência de Collatz de chegar ao número “1”.

Regra Generalizada, “ $3kn + k$ ”

Mantida a regra “ $n/2$ ”, a conjectura é verdadeira para a regra generalizada “ $3kn + k$ ” (“ $1,5n + 0,5$ ”, “ $3n + 1$ ”, “ $6n + 2$ ”, “ $12n + 4$ ”, ...), onde “ k ” é qualquer termo da progressão geométrica de razão “2”, formada a partir do número “0,5” (“0,5”, 1, 2, 4, 8, ...”). Vê-se que “ $1,5n + 0,5$ ” é a metade de “ $3n + 1$ ”. A ilustração II.1 mostra a sequência iniciada com “72”, para “ $k = 0,5$ ” e “ $k = 1$ ” na regra generalizada.

Ilustração II.1 – Uso da regra generalizada “ $3kn + k$ ”.



Decorre que:

(a) Sob a regra generalizada “ $3kn + k$ ”, o ciclo final é determinado por “ $3k+k$ ” (“1 – 2 – 1”, “1 – 4 – 2 – 1”, “1 – 8 – 4 – 2 – 1”, “1 – 16 – 8 – 4 – 2 – 1” ...).

(b) O conceito de infinito se torna irrelevante para a conjectura.

(c) Para números iniciais muito grandes (instância do infinito) uma sequência de Collatz poderá vagar indefinidamente e exigir infinitos passos para chegar ao ciclo final, mas nunca escapará para o infinito.

A sequência de números pares em qualquer sequência de Collatz é irrelevante, uma vez que tal sequência irá variar com o valor de “ k ” na regra generalizada eleita.

Um número par só é relevante quando inicia a sequência de Collatz e, pela regra “ $n/2$ ”, gera o primeiro número ímpar da sequência de Collatz por ele iniciada.

Números Próximos ou Consecutivos

Dois números próximos, até consecutivos, podem necessitar quantidades de passos muito discrepantes para chegar ao ciclo final, como “3 e 4”, “7 e 8”, “15 e 16”, “31 e 32”, “63 e 64”, e muitos outros. Essa condição é particularmente verdadeira em relação a números que são termos da progressão geométrica de razão “2”, formada a partir da unidade (“1, ... 8, ... 64, ... 256, ... 1024, ...”), dado que só usam a regra “ $n/2$ ” para chegar ao ciclo final.

Consideremos o número “64” e a regra “ $48n + 16$ ($k = 16$ na regra generalizada “ $3kn + k$ ”). A sequência de Collatz é “64, 32, 16, 8, 4, 2, 1”. O ciclo final é definido por $3k + k = 3(16) + 16 = 64$, ou simplesmente “1, 64, 32, ... 2, 1”. Verifica-se um ciclo eterno igual à própria sequência “64, 32, 16, ... 2, 1”. Esse efeito ocorre para outros números iniciais e a adequada alternativa do valor “ k ” na regra generalizada “ $3kn + k$ ”.

Número “3” e Múltiplos Ímpares de “3”

Se o número “3” ou um múltiplo ímpar de “3” (“9”, “15”, “21, ...”) aparecer numa sequência de Collatz, tal número será o primeiro número ímpar e o único múltiplo ímpar de “3” na referida sequência. Isso ocorre mesmo que esse número esteja precedido de vários números, todos necessariamente pares. A afirmativa não é verdadeira para os demais números ímpares (qualquer outro número ímpar pode ser precedido de outros números ímpares, incluindo o “3” ou um único múltiplo ímpar de “3”).

A explicação é simples. A regra “ $3n + 1$ ” aplicada a números ímpares não gera números pares múltiplos de “3”.

Fórmula Geral para Qualquer Sequência de Collatz

Uma sequência de Collatz é uma cadeia de seções de progressões geométricas diferentes, de razão “2”. Na verdade, qualquer sequência de Collatz é uma sequência de números naturais ímpares, determinados pela fórmula abaixo:

$$N_{i+1} = (3KN_i + K)/2^r$$

Na fórmula:

- a) “ N_i ” é o primeiro ou qualquer número ímpar intermediário e “ N_{i+1} ” o número ímpar seguinte na sequência de Collatz considerada;
- b) Como já antecipado, os parâmetros “ $3k$ ” e “ k ” podem ser “1,5 e 0,5”; “3 e 1”; “6 e 2”; “12 e 4”; e assim por diante;
- c) “ r ” é o apropriado expoente da potência de “2” que, na fórmula geral, gera um único número ímpar “ N_{i+1} ” a partir do número ímpar anterior “ N_i ”.

Dado o número par ou ímpar que inicia uma sequência de Collatz, a sequência de números ímpares é única, seja qual for o valor de “ k ” na regra generalizada eleita.

A sequência de números pares depende também desse valor de “k”. Se a sequência se iniciar com um número par “N₁”, a regra “n/2” determinará o primeiro número ímpar “N₁” da correspondente e única sequência de Collatz, o número ímpar “N₁” que comanda a Série Par onde se situa o número par “N₁”.

$$N_1 = N_1/2^s, s = 1; 2; 3; 4; \dots$$

Como exemplos numéricos, “1” comanda “256”, “15” comanda “240” e “9” comanda “72”:

$$“256/2^8 = 1”, “240/2^4 = 15”, “72/2^3 = 9”.$$

O número inicial em qualquer sequência de Collatz, ademais de determinar toda a sequência, revela que as sequências de Collatz não têm natureza caótica nem comportamento imprevisível. Para ilustrar o conceito, o número “7”, em qualquer sequência de Collatz, leva todas as sequências que chegam a ele para o número “11”, independentemente do valor de “k”. “1,5(7) + 0,5 = 11”, e “11/2⁰ = 11”, “3(7) + 1 = 22” e “22/2¹ = 11”, “6(7) + 2 = 44” e “44/2² = 11”, e assim por diante. O mesmo ocorre com os demais números ímpares (“11” vai ao “17”, “17” vai ao “13”, “13” vai ao “5” e “5” chega ao “1”). Não há exceção.

Consideremos que “9” seja o primeiro número ímpar numa sequência de Collatz, o número que inicia a citada sequência de Collatz ou proveniente de um número par qualquer pela regra “n/2” (ilustração II.2):

Ilustração II.2 – Sequência de números ímpares.

Número ímpar inicial	Expoente da potência	Número ímpar seguinte
(N _i)	(m)	(N _{i+1})
9	1	7
7	0	11
11	0	17
17	1	13
13	2	5
5	3	1

Analogia com Elementos da Natureza

É possível fazer uma analogia entre a sequência de Collatz e elementos da natureza, como uma árvore ou uma bacia hidrográfica. Considere uma bacia hidrográfica de grande porte. O movimento de uma molécula de água, desde a fonte (infinito) até a foz do rio principal (ciclo final) representa a sequência de Collatz, dado que ostenta trajetória única. Contudo, uma embarcação que parta da foz do rio principal (ciclo final) e suba rio principal terá alternativas de trajetória sempre que encontrar um afluente do rio principal ou um afluente secundário, até alcançar a fonte de um afluente (infinito), correspondendo às sequências inversas.

Uma sequência de Collatz formada com a presença do número “3” ou de um múltiplo ímpar de “3”, representa um afluente do rio principal ou de um afluente secundário, sem afluentes próprios. A progressão geométrica de razão “2” formada

a partir da unidade representa o rio principal. As demais progressões geométricas de razão “2” representam os afluentes primários e secundários do rio principal.

A analogia explica o sentido do movimento das sequências de Collatz, que é do infinito para o número “1”, enquanto uma sequência inversa vai do número “1” para o infinito.

Como mostrarei a seguir, o esquema numérico também explica a ocorrência de números perfeitos e números quase perfeitos.

NÚMEROS PERFEITOS

Ao tratar aqui dos números perfeitos, aproveito a oportunidade para falar também sobre o que seriam números quase perfeitos e mostrar que esses três temas citados têm mais em comum que o simples fato de serem antigos e famosos. Em síntese, essas três questões podem ser explicadas e provadas apenas como propriedades de progressões geométricas de razão “2”, especialmente a iniciada com a unidade.

Neste texto não me estendo sobre a vasta história que envolve o tema dos números perfeitos. O leitor interessado encontrará farto material na internet. Limito minha análise aos três aspectos que caracterizam o tema: (i) a lei de formação que os rege; (ii) a existência ou não existência de infinitos números perfeitos; e (iii) a existência ou não existência de números perfeitos ímpares. Este último, o mais questionado e menos conhecido dos três aspectos.

Tampouco entro no histórico do que sejam números quase perfeitos. Repito aqui uma definição que também é mera propriedade da referida progressão geométrica de razão “2”, quando iniciada com o número “1”. Mais do que isso, apresento um conceito alternativo de números quase perfeitos, determinado pela mesma regra aritmética de Euclides que leva aos números perfeitos pares.

Como observei ao tratar da conjectura de Collatz, sempre que uma questão aritmética implicar o conceito de infinito é mandatório entender o infinito como uma instância de números, ainda que de magnitude inimaginável.

Ao discutir a conjectura de Collatz, mostrei com meu esquema numérico que a questão não guardava nenhum mistério, requeria apenas o arranjo de todos os números naturais em progressões geométricas de razão “2”, geradas a partir dos números ímpares de “1” a “ ∞ ”. Mostro aqui que esse mesmo esquema numérico também explica a regra aritmética de Euclides, referente à ocorrência dos números perfeitos.

Conceitos

A conjectura de Collatz foi objeto de livro já publicado, sendo o tema dos números perfeitos o foco principal deste texto, que é uma extensão do referido livro. Proporei também um conceito alternativo para números quase perfeitos, tendo em vista que esses temas podem ser explicados com o mesmo fundamento aritmético:

as propriedades da progressão geométrica de razão “2”. A explicação nos levará ao conceito de números de Mersenne, assunto igualmente ligado às propriedades da citada progressão geométrica.

Progressão Geométrica

Progressão geométrica é assunto de aritmética elementar, ao alcance de qualquer aluno em nível da educação básica. Cabe aqui, tão somente, destacar que os três temas matemáticos antes referidos podem ser explicados com recurso às propriedades da progressão geométrica de razão “2”, iniciada com a unidade (1, 2, 4, 8, ... ∞).

Número de Mersenne

Números de Mersenne são números naturais que seguem a relação “ $m = 2^p - 1$ ”, sendo “p” igualmente um número natural. Esses números são ímpares, primos ou não, conforme se vê na ilustração III.1.

Ilustração III.1 - Números de Mersenne.

Expoente “p”			Número de Mersenne		Natureza
Valor	Natureza	2^p	$2^p - 1$	m	
2	Primo	4	4 - 1	3	Primo
3	Primo	8	8 - 1	7	Primo
4	Não primo	16	16 - 1	15	Não primo
5	Primo	32	32 - 1	31	Primo
----	----	----	----	----	----
----	----	----	----	----	----
11	Primo	2.048	2.048 - 1	2.047	Não primo
----	----	----	----	----	----
----	----	----	----	----	----

Observa-se que os números de Mersenne correspondem às somas dos termos da progressão geométrica de razão “2”, iniciada com a unidade, ou seja, às somas dos termos da Série Par Principal: $1+2=3$, $1+2+4=7$, $1+2+4+8=15$, $1+2+4+8+16=31$ é assim por diante até a instância do infinito. Essas somas, os números de Mersenne, são fundamentais para entender os conceitos de números perfeitos e números quase perfeitos.

Como se vê na citada ilustração, nem todo número de Mersenne é primo (como “ $2^4 - 1 = 15$ ”, que tem “3” e “5” como divisores e “ $2^{11} - 1 = 2047$ ”, que tem “23” e “89” como divisores) e nem todo número primo é número de Mersenne (como “19”, que não segue a fórmula “ $2^p - 1$ ”). Constata-se que, ademais de seguir a fórmula “ $2^p - 1$ ”, números primos de Mersenne impõem que “p” e “ $2^p - 1$ ” sejam ambos números primos. Essa particularidade diferencia números perfeitos de números quase perfeitos (aqui conceituados), conforme esclarecerei adiante.

Número Perfeito

Define-se como perfeito o número que é igual à soma de seus divisores próprios, ou seja, com a exclusão do próprio número, obviamente. Como exemplo, o número “28” é igual à soma de seus divisores “1 + 2 + 4 + 7 + 14”, portanto, um número perfeito. Mostrarei neste texto que, assim como os números de Mersenne, números perfeitos decorrem das propriedades da progressão geométrica de razão “2”, iniciada com a unidade.

Número Quase Perfeito

Já afirmei que existe uma definição de número quase perfeito como aquele que, subtraído de uma unidade, é igual à soma de todos os seus divisores, o que corresponde às potências de “2”. Isso nada mais é que uma propriedade da progressão geométrica de razão “2” iniciada com a unidade. Obviamente, $2^n - 1 = 1 + 2 + \dots + 2^{n-1}$, como “ $24 - 1 = 16 - 1 = 15$ ”, sendo “ $15 = 1 + 2 + 4 + 8$ ”. Simples propriedade dessa progressão geométrica.

Proponho aqui a generalização do conceito de número quase perfeito. Número quase perfeito é o número que é igual à soma de seus divisores que aparecem na sequência numérica que leva a ele, o número quase perfeito. Como exemplo, o número “120” é um número quase perfeito, dado que “ $120 = 1 + 2 + 4 + 8 + 15 + 30 + 60$ ”. Difere de número perfeito pelo fato de haver divisores não incluídos na referida sequência numérica. No caso do exemplo, o número “120” tem outros divisores fora da sequência numérica cuja soma que leva a ele (“3”, “4”, “5”, “6” e outros).

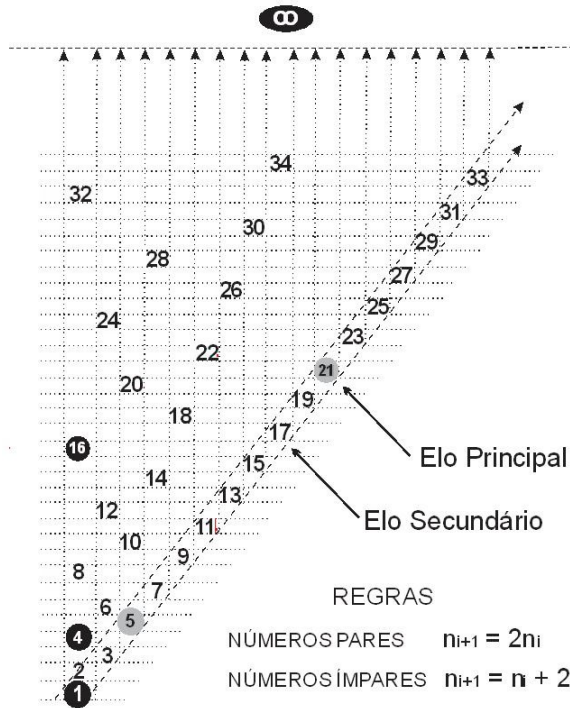
A introdução desse novo conceito de números quase perfeitos se deve aos fatos de que: (i) podem ser representados pelo esquema numérico antes referido e (ii) chega-se a ele pela mesma regra aritmética estabelecida por Euclides para determinar números perfeitos. Uma definição mais ampla, que se junta aos números de Mersenne, aos números primos de Mersenne e aos números perfeitos como casos relativos.

Esquema numérico

Ao tratar da conjectura de Collatz, criei um arranjo com os números naturais, de “1” a “ ∞ ”, sem repetição de nenhum número, que denominei “esquema numérico”. O citado esquema numérico está formado por infinitas progressões geométricas infinitas, de razão “2”, iniciadas com os números ímpares de “1” a “ ∞ ”. Esse esquema numérico, visto na variante da ilustração III.2, é a representação aritmética da referida conjectura e nos permitirá explicar também os conceitos de números perfeitos e números quase perfeitos.

Cada uma das infinitas progressões geométricas infinitas do esquema numérico é uma Série Par, comandada por um número ímpar, seu número de comando, contendo exclusivamente números pares (exceto seu número de comando). A Série Par formada a partir do número “1” está referida como Série Par Principal, tendo sido o modelo para criar as demais Séries Pares.

Ilustração III.2 - Esquema numérico.



Propriedades das séries pares

Como dissemos, cada Série Par é uma progressão geométrica infinita de razão “2”, iniciada a partir de um número ímpar de “1” a “ ∞ ”. Nessa condição, apresenta as propriedades típicas dessa progressão geométrica, com as respectivas fórmulas para determinar tais propriedades, como um termo qualquer em função do termo inicial e da razão “2”.

Ao combinar em ordem alguns termos da Série Par Principal com alguns termos de qualquer outra Série Par teremos uma sequência numérica interessante, abaixo representada (ilustrada numericamente pela sequência numérica que leva ao número “2016”):

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 2^0 & 2^1 & 2^2 & & 2^{n-1} & (2^n - 1) & 2^1(2^n - 1) & 2^2(2^n - 1) & & 2^{n-1}(2^n - 1) \\
 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 63 & 126 & 252 & 504 & 1008 & 2016
 \end{array}$$

Constata-se do exemplo que, ao combinar os primeiros seis termos da Série Par Principal, com os termos iniciais da Série Par comandada pelo número “63” (que é a soma desses seis primeiros termos da Série Par Principal), chegaremos ao número “2016”, que é igual à soma de seus divisores que o antecedem na sequência numérica. No exemplo, nem todos os divisores de “2016” estão contemplados na sequência numérica que leva a ele (o número “63” não é primo e gera outros

divisores de “2016”). Por definição, “2016” não é um número perfeito, mas é um número quase perfeito, pela definição aqui adotada.

Desse modo, como mera propriedade da referida progressão geométrica, qualquer termo dessa progressão geométrica menos a unidade é igual à soma dos termos antecedentes, ou seja, “ $1+2=4-1=3$ ”, “ $1+2+4=8-1=7$ ” é assim por diante. Esses números são as potências de “2”, conhecidos como “números quase perfeitos” (os únicos conhecidos).

No caso de se iniciar a referida progressão geométrica de razão “2” com outro número ímpar, qualquer termo da citada progressão geométrica será a soma dos termos antecedentes (incluindo o termo ímpar inicial) mais esse termo inicial da sequência numérica em referência. Assim, sendo “ $3+6+12=21$ ”, o próximo número da sequência, “24” será igual a “ $21+3$ ”. Neste texto, proponho definir como número quase perfeito esses outros números, iniciados com qualquer número ímpar, de “1” a “ ∞ ”, uma forma mais generalizada que as potências de “2”.

Mais do que isso, essas somas, os números de Mersenne, são fundamentais para entender os conceitos de números perfeitos e números quase perfeitos.

Regra de Euclides e Teorema de Euclides-Euler

O notável geômetra e matemático grego Euclides enunciou que se a soma de números duplicados de uma série numérica formada a partir da unidade, “ $2^n - 1$ ”, gerar um número primo, o produto desse número pelo número que o antecede na referida série, “ 2^{n-1} ”, será um número perfeito. Posteriormente, Leonhard Euler provou que a regra de Euclides permite determinar todos os números perfeitos pares, mas que esses números perfeitos só ocorrem se, e somente se, o número “ $2^n - 1$ ” for um primo (primo de Mersenne), o que hoje conhecemos como Teorema de Euclides-Euler. Isso significa que “ $2^n + 1$ ” será primo, se e somente se, “n” também for primo. Um número perfeito pode ser determinado pela expressão “ $2^{n-1}(2^n - 1)$ ”, sendo “ 2^{n-1} ” um número par e “ $(2^n - 1)$ ” um número primo de Mersenne, igual à soma desse número par com os números que o antecedem na série numérica que gera o número perfeito.

Desse modo, na sequência “1, 2, 4, 7, 14, 28”, a soma dos números que antecedem o número “28” é igual ao próprio número “28”, e ainda igual ao produto do número primo “7” (a soma dos números anteriores a “7”), pelo número par “4” (que antecede o “7” na sequência numérica), conforme preconiza a regra aritmética de Euclides. O número “28” é, por definição, um número perfeito.

$$P = 2^{n-1}(2^n - 1) = (4)(7) = 28$$

O número primo e os números antecedentes e seguintes a ele devem ser divisores do número perfeito, ou seja, a soma total de todos os divisores deve ser igual ao citado número perfeito. Cabe explicar a lei de formação de uma série numérica, que termina em um número perfeito, bem como porque isso acontece.

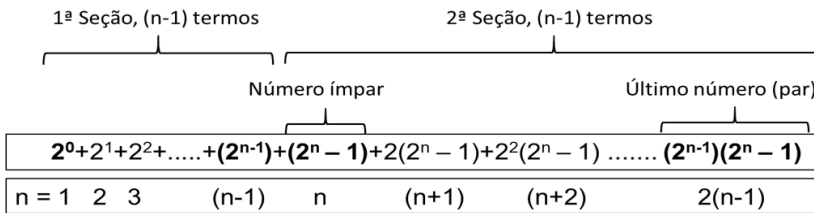
Assim, sendo “n = 5”, teremos “ $2^{n-1} = 2^4 = 16$ ” e “ $2^n - 1 = 2^5 - 1 = 31$ ”, o que nos permite dizer que “ $496 = (16)(31)$ ” é um número perfeito. A sequência numérica desse número perfeito seria:

(n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(N)	1	2	4	8	16	31	62	124	248	496
(S)	1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496									

Fórmula da Sequência Geral

A ilustração III.3 mostra a fórmula geral da sequência numérica que gera números perfeitos e números quase perfeitos. Essa fórmula geral compõe-se de duas seções de progressões geométricas, ambas de razão “2”. A primeira seção, com “n - 1” termos, começa com o número “1” e termina no termo “ 2^{n-1} ”, sendo a soma de seus termos, “ $2^n - 1$ ”, um número de Mersenne, que pode ser primo ou não.

Ilustração III.3 - Sequência numérica geral.



A segunda seção, igualmente com “n - 1” termos, começa com esse número de Mersenne (soma dos termos a primeira seção) e termina no termo “ $(2^{n-1})(2^n - 1)$ ”, a soma de todos os termos antecedentes em sua sequência numérica. Todos esses números que antecedem o termo final da segunda seção, “ $(2^{n-1})(2^n - 1)$ ”, são divisores desse termo final. Verifica-se ainda que esse termo final é determinado pela regra de Euclides, uma propriedade das progressões geométricas de razão “2”, iniciada com a unidade.

É simples mostrar aritmeticamente, usando apenas as propriedades de progressões geométricas, que as duas seções de progressões geométricas têm o mesmo número de termos. Basta lembrar que o número perfeito (o último número da segunda seção) será o dobro do penúltimo termo desta segunda seção, que se inicia com o número primo de Mersenne, e igual à soma de todos os números que o antecedem na sequência de números.

Embora o interesse seja discutir o tema dos números perfeitos, mostrarei a seguir que essa fórmula geral contempla os números perfeitos pares e, como aqui definidos, também os números quase perfeitos pares. Obviamente, também gera todos os números de Mersenne, “ $2^n - 1$ ”, necessariamente, ímpares.

Conceito de Número Perfeito

O tema de números perfeitos apresenta três questões fundamentais:

- (i) a lei de formação de números perfeitos;
- (ii) a existência de infinitos números perfeitos pares; e

(iii) a existência de números perfeitos ímpares.

Até o presente foram identificados “52” números perfeitos pares. Permanecem as indagações se existem infinitos números perfeitos pares e se existem números perfeitos ímpares. A ilustração III.4 ilustra a formação de alguns números perfeitos pares.

Ilustração III.4 - Elementos da sequência numérica de números perfeitos.

1ª seção, (n-1) termos		2ª seção, (n-1) termos		
Números	Último nº par	Nº primo de Mersenne	Pares da 2ª seção	Nº perfeito
1+	2	3	---	6
1+2+	4	7	14+	28
1+2+4+8+	16	31	62+124+248	496
---	---	---	---	---
---	---	---	---	---
1+2+.....	2^{n-1}	$2^n - 1$	$2(2^{n-1})+2^2(2^{n-1})+...$	$(2^{n-1})(2^n-1)$

Quando na fórmula da sequência geral ocorre um número de Mersenne que é também um número primo, conhecido como primo de Mersenne (como o número “31” no exemplo numérico visto na ilustração III.5), o termo final da Sequência numérica, “ $(2^{n-1})(2^n - 1)$ ”, é um número perfeito, conforme o conceito tradicional, ou seja, segue a regra aritmética de Euclides, é igual à soma de todos os seus divisores próprios e, necessariamente, par.

Ilustração III.5 - Número perfeito.

1ª Seção, (5) termos					2ª Seção, (5) termos				
Número primo de Mersenne					Número perfeito par				
1+2+4+8+.....					(16)+(31) + 62 + 124+248 (16)(31) = 496				
n = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

No caso do exemplo numérico, o termo final, “ $(16)(31) = 496$ ”, é igual à soma de todos os termos antecedentes na sequência numérica, uma vez que todos os seus divisores constam da sequência. Não há divisores fora da sequência numérica que leva ao número “496”, sendo por isso um número perfeito.

Obviamente, cada seção do número perfeito “6” só tem dois termos (“1 e 2” e “3 e 6”), assim como cada seção do número perfeito “28” só tem três termos (“1, 2 e 4” e “7, 14 e 28”).

Constata-se que número perfeito é um caso particular da sequência geral, quando o número ímpar, que inicia a segunda seção de progressão geométrica, é um número primo de Mersenne. Não obstante, em todas as sequências haverá um

número que poderá ser determinado pela regra de Euclides, $(2^{n-1})(2^n - 1)$, dado que se trata de propriedade da progressão geométrica de razão “2”, iniciada com a unidade.

Números de Mersenne que não são primos (como “15”, “63” e muitos outros) geram apenas números quase perfeitos. Números (mesmo primos) que não ocorrem como somas dos números da Série Par Principal que forma a primeira seção (como “5”, “11”, “13”, “17”, ...), não geram números perfeitos nem números quase perfeitos.

Constata-se ainda que o número primo que pertence a uma sequência de números perfeitos (como o número “7” na Sequência do número “28”) não participa das sequências de números perfeitos seguintes. Essa é a razão pela qual o número “7” aparece na sequência do número “28”, mas não aparece na sequência do número “496”, na qual o número primo de Mersenne é “31”. Isso decorre do fato de que a segunda seção de cada sequência de número perfeito se inicia com um número primo diferente e, como se vê no esquema numérico, segue uma Série Par diferente.

Com as únicas exceções do número “1”, que inicia a primeira seção, e do número ímpar que inicia a segunda seção, todos os números de qualquer sequência de números perfeitos e de números quase perfeitos são números pares.

Em síntese, como se depreende do exposto, uma sequência de números que gera um número perfeito é formada por termos da Série Par Principal (que é infinita), seguidos da soma desses termos (quando tal soma é um número primo de Mersenne), e dos termos de uma das infinitas Séries Pares que se inicia com o referido número primo de Mersenne (que também são infinitas). Duas seções de progressões geométricas infinitas de razão “2”, ambas iniciadas com números ímpares.

Existência de infinitos números perfeitos

Vimos no esquema numérico que a primeira seção de qualquer sequência de números perfeitos pares corresponde a termos da Série Par Principal, cuja soma é um número primo de Mersenne. Como a Série Par Principal é infinita, é razoável aceitar que ocorrerão infinitas somas, $2^n - 1$, que correspondam a número primos de Mersenne. Vimos também que a segunda seção de cada sequência de números perfeitos corresponde a termos de uma Série Par diferente. Como há infinitas Séries Pares diferentes (todas igualmente infinitas), é razoável admitir que existem infinitos números perfeitos pares, determináveis pela regra aritmética de Euclides, $(2^{n-1})(2^n - 1)$.

Vimos ainda que sempre que um número de ordem “n” de uma série numérica for um número primo de Mersenne correspondente à soma de termos da Série Par Principal (primeira seção de progressão geométrica de razão “2”, formada a partir da unidade) haverá um número perfeito par, o termo de ordem “n - 1” na segunda seção de progressão geométrica de razão “2”, iniciada a partir do referido número primo de Mersenne.

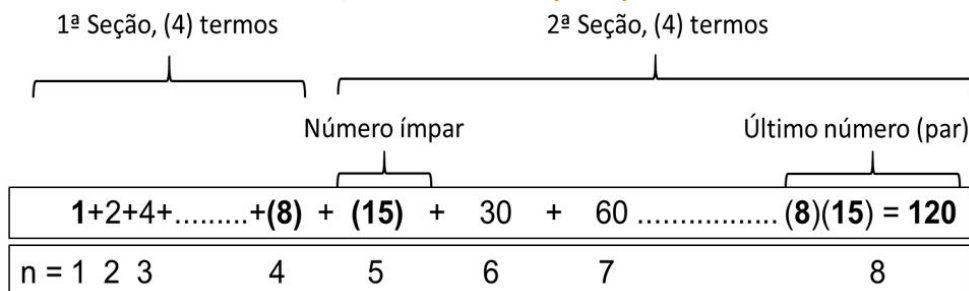
A regra aritmética de Euclides, que permite determinar números perfeitos pares pela multiplicação desse número primo de Mersenne pelo número par que o antecede, reforça a ideia de infinitos números perfeitos pares. A dificuldade em listá-los se deve às limitações que temos ao lidar com números de grande magnitude, ou seja, na instância do infinito. A conclusão é que existem infinitos números perfeitos pares, só não temos recursos matemáticos e tecnológicos para identificá-los e representá-los.

Conceito de número quase perfeito

Definimos número quase perfeito como o número gerado por sequência numérica, na qual tal número é a soma de todos os números que o antecedem na sequência, os quais são seus divisores. A definição implica que há divisores não contemplados na sequência numérica que leva ao número quase perfeito.

Quando o número de Mersenne gerado não é primo (como no caso do número “15” do exemplo numérico visto na ilustração III.6), o termo final da sequência numérica, $(2^{n-1})(2^n - 1)$ é um número quase perfeito, conforme o conceito proposto neste texto, ou seja, é um número par, segue a regra aritmética de Euclides, tem os números antecedentes como divisores, mas há divisores que não aparecem na sequência. Escapam da sequência os divisores do número de Mersenne e os divisores de seus múltiplos (no caso do exemplo numérico, “3”, “4”, “5”, “6” e outros).

Ilustração III.6 - Número quase perfeito.



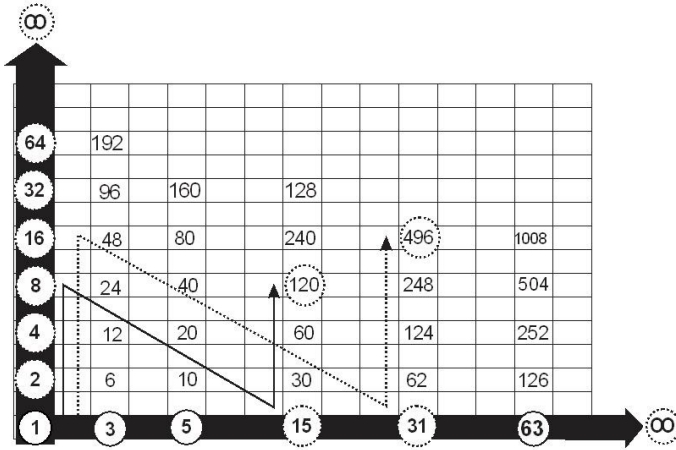
No caso do exemplo numérico, o termo final, $(8)(15) = 120$, é igual à soma de todos os termos antecedentes na sequência numérica, que são divisores de “120”, embora esse termo final tenha outros divisores que não constam de sua sequência numérica (divisores de “15” e divisores dos múltiplos pares de “15”). Cada seção de progressão geométrica conta com quatro termos.

Assim como os números perfeitos, os números quase perfeitos são casos particulares da fórmula geral antes vista. Não vejo justificativa para se ter grande interesse pelos números perfeitos, dado que decorrem de mera propriedade de progressões geométricas de razão “2”, especialmente a iniciada com a unidade. Menos ainda em relação aos números quase perfeitos.

Representação Gráfica

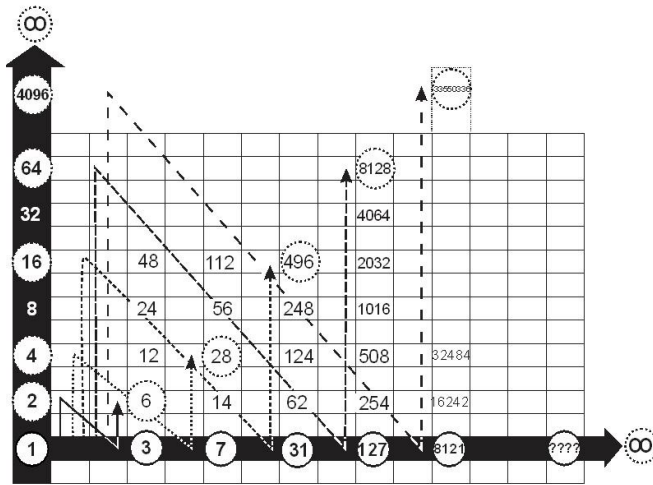
A ilustração III.7, uma aplicação do esquema numérico, representa graficamente os exemplos numéricos constantes das ilustrações II.5 e II.6, com as sequências numéricas que levam, respectivamente, ao número quase perfeito, “120” e ao número perfeito, “496”. Mera aplicação da regra aritmética de Euclides, definida com base nas propriedades das progressões geométricas de razão “2”.

Ilustração III.7 - Representação gráfica.



A ilustração III.8 mostra em gráfico os números perfeitos iniciais, “6”, “28”, “496”, “8,128” e “33,550,336”, dos atuais “52” já identificados, todos pares. As diversas linhas verticais mostram, a partir da unidade, a primeira seção de progressão geométrica de cada sequência na Série Par Principal, bem como a segunda seção numa das demais Séries Pares. As linhas inclinadas mostram a passagem do último número da primeira seção, “ 2^{n-1} ”, para o primeiro número da segunda seção, “ $2^n - 1$ ”.

Ilustração III.8 - Números perfeitos.



Assim como permitiu representar as sequências da conjectura de Collatz, o esquema numérico permite representar os números perfeitos.

Números Perfeitos Ímpares

Apesar de muita pesquisa, não se encontrou nenhum número perfeito ímpar. A existência de número perfeito ímpar é a questão menos conhecida e mais curiosa do tema.

Uma sequência de número perfeito par se forma pela combinação de duas seções de progressões geométricas, ambas de razão “2”. Em cada seção, só há um único número ímpar, o número que inicia cada seção. O número “1” na primeira seção, o número primo de Mersenne na segunda seção. Todos os demais números nas duas seções são números pares até a instância do infinito.

A soma de cada seção é um número ímpar, o que significa que, necessariamente, a soma das duas seções é um número par. Assim, segundo a lei de formação ora apresentada, nunca ocorrerá outro número primo, além daquele que inicia a segunda seção, não sendo possível a ocorrência de um número perfeito ímpar. As ilustrações vistas deixam claro que a sequência de um número perfeito nunca poderá deixar a Série Par comandada pelo número primo de Mersenne e passar para outra Série Par diferente. Conclui-se que (pelo menos pela lei de formação ora discutida): Não existem números perfeitos ímpares.

Como curiosidade, há pesquisas que afirmam que a ocorrência de um número perfeito ímpar implica a necessária ocorrência de mais de um número primo, além do número primo que inicia a segunda seção de números da sequência de número perfeito par. Pela regra aritmética de Euclides (mostrada pelo esquema numérico), uma ocorrência impossível. Há trabalhos que também comprovam essa impossibilidade aritmeticamente.

Comentários finais

O entendimento desses supostos enigmas, a conjectura de Collatz e os números perfeitos, fica facilitado com o emprego das propriedades da progressão geométrica de razão “2”, que serviu de base para a construção do esquema numérico que apresentei no livro “Demonstração da Conjectura de Collatz”. Esse esquema numérico está formado por infinitas progressões geométricas infinitas, de razão “2”, cada uma delas comandada por um número ímpar diferente, de “1” a “ ∞ ”, denominadas Séries Pares.

A Série Par iniciada com o número “1” é a Série Par Principal, usada como modelo para a construção das demais Séries Pares, comandadas pelos demais números ímpares. Esse esquema numérico, criado com base nas duas regras aritméticas da conjectura de Collatz (sendo a representação aritmética desta conjectura), contém todos os números naturais, de “1” a “ ∞ ”, sem repetição de nenhum número.

Introduzi neste texto uma sequência numérica geral, baseada nas propriedades das progressões geométricas de razão “2”, com destaque para a que se inicia com a unidade. Essa sequência numérica geral engloba os conceitos de números perfeitos e de números quase perfeitos, assim como contempla todos os números de Mersenne, primos ou não. Com base na exposição deste texto, ousou afirmar que:

i) Sendo a Série Par Principal infinita, ela tem infinitos termos, infinitos números de Mersenne e infinitos primos de Mersenne, o que já indica a existência de infinitos números perfeitos pares;

ii) Como há outras infinitas Séries Pares infinitas, cada uma comandada por um número ímpar diferente (de “3” a “ ∞ ”), configura-se que há infinitos números perfeitos pares;

ii) Como a regra só gera números pares, ela não gera número perfeito ímpar. Ademais, não há nenhuma indicação de que outras regras criem números perfeitos ímpares.

Como acontece em relação a outras questões matemáticas, há pessoas, profissionais ou não, que se dedicam à busca de números perfeitos, para além dos já conhecidos. Essas buscas são feitas com o emprego de computadores e algoritmos específicos.

Um desses grupos de pesquisadores se concentra no GIMPS (*Great Internet Mersenne Prime Search*), quando vários computadores operam de modo coordenado na execução da pesquisa de números de Mersenne.

Novos números perfeitos serão números de magnitude crescente e de grandeza que já desafia os limites da matemática e da tecnologia disponíveis, sendo exercício repetitivo e enfadonho, que sobrecarrega até as mais modernas máquinas.

Há temas da matemática que devem ser analisados sob a luz da lógica e do bom senso, ademais das limitações da própria ciência. Procurar novos números

perfeitos mediante simples ação mecânica de computadores, mera força bruta, sem nenhum raciocínio lógico ou aplicação prática, é uma busca sem sentido, já que não dispomos de recursos matemáticos nem tecnológicos para atuar na instância do infinito, mesmo quando entendida como povoada de números, cujo porte sequer podemos conceber.

DESAFIOS

Profissionais do ramo e, mesmo, simples curiosos são irresistivelmente atraídos por temas matemáticos, especialmente aqueles que passam através dos anos, por vezes dos séculos, sem encontrar alguém que os prove certos ou errados.

Assim tem sido, até que um ou outro pesquisador mais insistente retire um desses famosos temas das extensas listas de conjecturas não provadas e problemas não resolvidos. O grande feito.

As questões que resistem mais tentativas ficam ainda mais chamativas, sendo por vezes alvos de vultosas recompensas de cunho material. Tais recompensas, ainda que de grande apelo, nem sempre superam a suprema glória de resolver um problema que tantos outros, mesmo matemáticos famosos, não lograram resolver.

Já publiquei trabalhos em que proponho demonstrações para a conjectura de Fermat (ora denominada o Último Teorema de Fermat) e para a conjectura de Andrew Beal, aos quais ninguém deu atenção. Apresentei recentemente uma proposta de demonstração para a conjectura de Collatz e, agora, uma explicação para a ocorrência de números perfeitos. Não me surpreenderei se, mais uma vez, ninguém der atenção. A comunidade de matemáticos está acomodada, não quer mudar nada, mesmo o que está claramente errado.

Para propor minha demonstração da conjectura de Collatz, criei um esquema numérico e vaticinei que tal arranjo de números poderia servir para a análise de outros temas da teoria dos números. Minha suposição se confirmou quando, com o mesmo esquema numérico, expliquei a formação de números perfeitos, texto ora apresentado.

Todos esses conceitos e afirmativas, ademais das correspondentes explicações, estão disponíveis em material já divulgado, listados a seguir:

REFERÊNCIAS

AMUI, Sandoval. **Demonstração da Conjectura de Collatz**. São Paulo: Interciência, 2025.

AMUI, Sandoval. **You may not enjoy mathematics** (but you do not have to hate it). Ponta Grossa: AYA Editora, 2022.

AMUI, Sandoval. **A Circunferência, Pitágoras e Fermat**. Rio de Janeiro, RJ: Catalivros, 2017.

AMUI, Sandoval. **Unveiling the mystery of the Collatz Conjecture. Global Scientific Journal** – GSJ, v. 13, n. 1, 2025. Disponível em PDF pela Global Scientific Journal.

AMUI, Sandoval. **A proof of the Colatz (Collatz) Conjecture**. Ponta Grossa: AYA Editora, 2024.

AMUI, Sandoval. **Three classical topics under an alternative mathematical model. Global Scientific Journal** – GSJ, 2023.

AMUI, Sandoval. **The interdependence of geometry and some branches of mathematics, Global Scientific Journal** – GSJ, 2023.

AMUI, Sandoval. **Pythagoras' Theorem, Fermat's Conjecture and Beal's Conjecture** - AYA Editora, 2023.

AMUI, Sandoval. **Two famous conjectures (Pierre de Fermat and Andrew Beal)** - AYA Editora, 2022.

AMUI, Sandoval. **Matemática: Um ensaio filosófico-especulativo** - AYA Editora, 2021.

AMUI, Sandoval. **A new math foundation, Global Scientific Journal** - GSJ, 2020.