



Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem e Resolução de Problemas no Ensino de Matemática: Diálogos Teóricos e Implicações Pedagógicas

Hypothetical Learning Trajectories and Problem-Solving Approaches in Mathematics Education: Theoretical Foundations and Classroom Implications

Fernando Francisco Pereira

Doutor em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-graduação em Educação para as Ciências e a Matemática (PCM) - Universidade Estadual de Maringá (UEM). Professor do Quadro Próprio do Magistério da Secretaria Estadual de Educação do Paraná (SEED).

Iara Souza Doneze

Doutoranda em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-graduação em Educação para as Ciências e a Matemática (PCM) - Universidade Estadual de Maringá (UEM). Professora da Educação Básica da Secretaria Municipal de Educação de Londrina (SME-PML).

Resumo: Este trabalho discute, em perspectiva teórica, a interrelação entre as Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA) e as diferentes abordagens da Resolução de Problemas no ensino de Matemática, analisando seus fundamentos paradigmáticos e implicações didáticas. As THA são compreendidas como projeções antecipadas e fundamentadas de possíveis caminhos para o desenvolvimento conceitual dos alunos, integrando metas, planos e hipóteses sobre o processo de aprendizagem. O trabalho articula essas noções às três abordagens da resolução de problemas: para, sobre e via, contextualizadas em paradigmas distintos: instrucionista-cognitivista, aquisitivo e construtivista/sócio-construtivista. A argumentação propõe que a integração entre THA e resolução de problemas potencializa o ensino, ao combinar a previsibilidade estratégica com a flexibilidade adaptativa diante das respostas dos estudantes, favorecendo um ambiente investigativo e colaborativo. São apresentados exemplos que evidenciam como essa articulação contribui para a formação docente, o planejamento pedagógico e a superação de dificuldades de aprendizagem, promovendo um ensino centrado no aluno e alinhado a objetivos conceituais. A análise conclui que o diálogo entre THA e resolução de problemas constitui um referencial potente para pesquisas futuras e práticas pedagógicas inovadoras.

Palavras-chave: trajetórias hipotéticas de aprendizagem; resolução de problemas; ensino de matemática.

Abstract: This paper discusses, from a theoretical perspective, the interrelationship between Hypothetical Learning Trajectories (HLT) and different approaches to Problem Solving in Mathematics education, analyzing their paradigmatic foundations and didactic implications. HLT are understood as anticipated and theoretically grounded projections of possible pathways for students' conceptual development, integrating goals, plans, and hypotheses about the learning process. The study articulates these notions with the three approaches to problem solving: for, about, and via, contextualized within distinct paradigms: instructionist-cognitivist, acquisitive, and constructivist/socio-constructivist. The argument proposes that integrating HLT and problem solving enhances teaching by combining strategic predictability with adaptive flexibility in response to students' outputs, fostering an investigative and collaborative environment. Examples are provided to illustrate how this articulation contributes

to teacher education, pedagogical planning, and overcoming learning difficulties, promoting student-centered teaching aligned with conceptual objectives. The analysis concludes that the dialogue between HLT and problem solving constitutes a powerful framework for future research and innovative pedagogical practices.

Keywords: hypothetical learning trajectories; problem solving; mathematics education.

INTRODUÇÃO

No campo educacional, compreender como os alunos aprendem e como o professor pode planejar estratégias eficazes exige a articulação entre referenciais teóricos sólidos e práticas pedagógicas contextualizadas. O conceito de paradigma, conforme Kuhn (2013), traduz-se em conjuntos de concepções, métodos e práticas que orientam a ação profissional em determinado período histórico. Na Educação Matemática, tais paradigmas manifestam-se nas formas predominantes de ensinar e aprender, influenciando desde a seleção de conteúdos até as interações em sala de aula (Mizukami, 1986; Libâneo, 2012).

Dentro dessa perspectiva, as Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA), propostas por Simon (1995), representam um modelo teórico que integra objetivos de ensino, planos de atividade e hipóteses sobre o processo de aprendizagem. Fundamentadas na visão construtivista, as THA são descrições antecipadas, mas revisáveis, do percurso que os alunos poderão seguir para a construção de conceitos matemáticos (Clements; Sarama, 2004; Oliveira, 2014). Já a Resolução de Problemas, nas suas diferentes abordagens (para, sobre e via/através), constitui cenário relevante, capaz de promover o raciocínio crítico e a compreensão conceitual (Polya, 1995; Proença, 2018; Onuchic *et al.*, 2021).

O diálogo entre essas duas perspectivas oferece uma possibilidade de unir planejamento estruturado e flexibilidade pedagógica, integrando a previsibilidade das THA ao dinamismo investigativo da Resolução de Problemas. Assim, este artigo tem como objetivo discutir, em nível teórico, as inter-relações entre Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem e abordagens da Resolução de Problemas, destacando seus fundamentos paradigmáticos, potencialidades e implicações para o ensino de Matemática.

O que são Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA)?

O termo Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA), no inglês, *Hypothetical Learning Trajectory*, surgiu com o pesquisador Simon (1995) que, baseado na perspectiva construtivista, se dispôs a apresentar um modelo teórico de pensamento pedagógico para a criação e implementação de tarefas para promover a aprendizagem conceitual de Matemática.

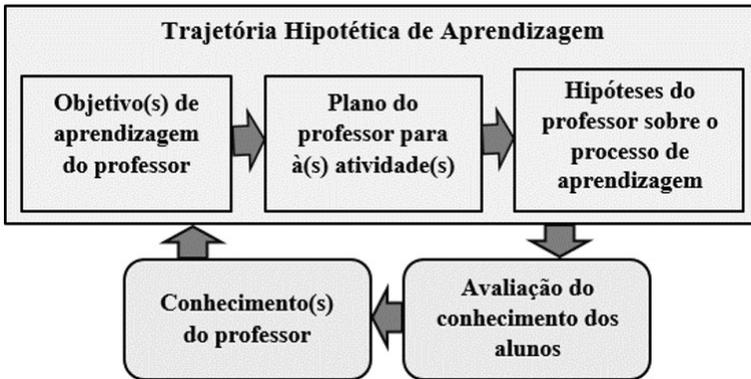
O modelo teórico apresentado por Simon (1995), THA, sustenta-se sobre três componentes: o(s) objetivo(s) de aprendizagem do professor para o conteúdo (conceito) matemático; o plano do professor para a atividade de Matemática; as hipóteses do professor sobre o processo de aprendizagem. Simon (1995) esclarece

que o termo “Trajetória Hipotética de Aprendizagem” refere-se à previsão do professor quanto ao caminho pelo qual a aprendizagem da Matemática poderá ser conduzida. E é hipotética porque a trajetória real de aprendizado e o que dela derivará não é conhecido de antemão.

Pesquisadores como Clements e Sarama (2004) expandem essa definição, descrevendo as THA como descrições do pensamento e da aprendizagem dos alunos em um domínio matemático específico, associadas a uma rota conjecturada de tarefas instrucionais que possibilitam o desenvolvimento de níveis progressivamente mais sofisticados de compreensão. Simon e Tzur (2004) reforçam que as THA devem orientar tanto o planejamento a priori quanto as decisões pedagógicas espontâneas tomadas durante as aulas, sendo constantemente revisadas à luz das interações e observações feitas pelo professor em sala de aula como forma de ressignificar sua prática no movimento contínuo.

Para que a definição de THA seja melhor compreendida, Simon (1995) esclarece que as THA constituam parte de um ciclo de ensino da Matemática. Na figura 1 é possível visualizar o ciclo de ensino da Matemática segundo Simon (1995).

Figura 1 - ciclo de ensino da Matemática orientado pela Trajetória Hipotética de Aprendizagem.



Fonte: adaptado de Simon, 1995.

O ciclo parte do Conhecimento do professor, base teórica e prática que o docente possui sobre conteúdos, metodologias e sobre os próprios alunos. A Trajetória hipotética de aprendizagem, que é subdividida em três componentes: Objetivos do professor, são as metas de aprendizagem que o professor pretende alcançar; Plano docente para as atividades, a organização das situações de ensino; e Hipótese sobre o processo de aprendizagem, expectativa do professor sobre como os alunos devem aprender e conjectura sobre as possíveis estratégias, dificuldades e questionamento que os alunos poderão fazer. Subsequente, a Constituição interativa das atividades de sala de aula, refere-se ao que realmente acontece em aula, as interações concretas entre alunos, professor e tarefas, assim como as exatas dificuldades, estratégias e questionamentos. Por fim, Avaliação do conhecimento dos alunos, processo de coleta e análise de evidências sobre o que os estudantes sabem, o que é necessário aprender ou que dificuldades estão

enfrentando. Assim, o ciclo alimenta-se retornando ao conhecimento do professor, com base na avaliação, o professor refina sua trajetória hipotética, ajustando metas, planos e intervenções (Simon, 1995).

Oliveira (2014) destaca que a utilização da THA ajuda o professor a planejar, mediar e ajustar as intervenções no processo de ensino-aprendizagem. A importância das THA para a formação docente e constituição da identidade reside no fato de que ao implementá-la em sala de aula podem surgir: novos conhecimentos matemáticos, novos objetivos e aprendizagem e novos conhecimentos sobre o processo de aprendizagem dos alunos, fazendo com que o professor revisite sua trajetória hipotética e estabeleça modificações dando origem a uma nova THA, mas agora revisada. Quando articulado ao ensino por meio da resolução de problemas, a THA oferece um roteiro flexível para que o professor possa identificar as estratégias emergentes dos alunos, antecipar erros comuns e oferecer suporte específico em momentos oportunos. Assim, a THA e a resolução de problemas se complementam na construção de um ambiente de aprendizagem ativo, onde o professor é tanto planejador como mediador (Simon, 1995; Oliveira, 2014).

A Resolução de Problemas e o Ensino de Matemática

A Resolução de Problemas é vista sobre três formas de abordagem: o ensino para a Resolução de problemas; o ensino sobre a Resolução de Problemas; e o ensino via Resolução de Problemas (Schroeder; Lester Junior, 1989; Proença, 2018).

O ensino *para* a resolução de problemas consiste em preparar os alunos para resolver problemas matemáticos específicos por meio da aprendizagem de conceitos, algoritmos e procedimentos previamente estruturados. Nessa abordagem, os conteúdos matemáticos são ensinados de forma direta e sistemática, com o objetivo de capacitá-los a aplicar esse conhecimento em situações-problema previamente delimitadas. Segundo Charles e Lester (1982), essa abordagem valoriza a aquisição de habilidades técnicas e a fluência procedimental, essenciais para que o estudante consiga enfrentar problemas com confiança. Os problemas, nesse caso, são utilizados como aplicação dos conhecimentos previamente ensinados, ocupando uma função instrumental no processo de ensino-aprendizagem.

Nessa perspectiva, o papel do professor é garantir que os alunos compreendam e dominem os conceitos necessários antes de se engajarem em situações mais complexas de resolução. Corroborando, para Schoenfeld (1985) e Van de Walle *et al.* (2010), o ensino para a resolução de problemas é útil, sobretudo, na construção de um repertório mínimo de estratégias e procedimentos básicos, os quais podem ser posteriormente mobilizados em contextos mais abertos e desafiadores. Essa abordagem é em suma a mais tradicional nas salas de aula, em que o professor apresenta o conteúdo, resolve exemplos e, somente ao final, propõe problemas como forma de exercício. Embora eficiente em determinados contextos, ela pode limitar o desenvolvimento da criatividade e da autonomia dos estudantes se utilizada de forma exclusiva e mantém o paradigma conteudista de ensino da matemática (Schroeder; Lester Junior, 1989; Polya, 1995; Schoenfeld, 1992; Proença, 2018).

O ensino *sobre* resolução de problemas, por sua vez, tem como foco principal o desenvolvimento da capacidade estratégica dos alunos para enfrentar problemas diversos, muitas vezes novos ou não-rotineiros. Nessa abordagem, o objetivo é que os estudantes aprendam a pensar como resolvedores de problemas, ou seja, que desenvolvam heurísticas, metacognição, pensamento estratégico, perseverança e reflexão crítica. Pólya (1995) é um dos precursores dessa visão, ao propor seu clássico modelo de quatro etapas para a resolução de problemas: compreensão do problema; elaboração de um plano; execução do plano; e realizar o retrospecto ou verificação da resolução.

Pólya (1962; 1995) defendia que ensinar matemática deve incluir ensinar a resolver problemas, com ênfase nos processos mentais envolvidos. A partir dessa base, diversos pesquisadores, com foco em fatores cognitivos e não-cognitivos, passaram a investigar como desenvolver: conhecimentos estratégicos, saber como abordar problemas; conhecimentos metacognitivos, como monitorar e controlar o próprio raciocínio; e conhecimentos afetivos, como lidar com a frustração, persistência de obstáculos, entre outros. Schoenfeld (1985), ao estudar os comportamentos de alunos durante a resolução de problemas, identificou que as decisões estratégicas e os aspectos metacognitivos eram mais determinantes para o sucesso do que o mero domínio de conteúdo matemático. Ele propôs que o ensino deveria incluir discussões explícitas sobre como pensar sobre o problema, promovendo momentos de reflexão e justificativa das escolhas feitas durante a resolução.

O ensino *sobre* resolução de problemas, portanto, desloca o foco da matemática em si para o processo de resolução, o que implica também em mudanças metodológicas: trabalho em grupo, discussões coletivas, reflexões escritas e uso de problemas desafiadores, abertos ou que não têm uma única solução possível. Lester e Kehle (2003) afirmam que o ensino sobre a resolução de problemas é fundamental para promover o que chamam de competência matemática adaptativa, ou seja, a capacidade de usar a matemática de forma flexível e eficaz em novas situações. Além disso, as diretrizes curriculares mais recentes reforçam essa dimensão. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), por exemplo, explicita que a resolução de problemas deve estar associada ao desenvolvimento de competências cognitivas e socioemocionais, como argumentar, comunicar e tomar decisões com base em dados (Brasil, 2018).

Já o ensino *via/através* da resolução de problemas representa uma abordagem pedagógica mais recente e aprofundada, na qual os problemas são o ponto de partida e o meio central para a construção dos conhecimentos matemáticos. Nessa concepção, o foco não está em aplicar ou estudar a resolução de problemas de forma isolada, mas sim em ensinar os próprios conteúdos matemáticos através da resolução de problemas, ou seja, os conceitos emergem da experiência de resolver problemas (Proença, 2018; Onuchic *et al.*, 2021). Segundo o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000), ensinar matemática através da resolução de problemas significa que os alunos devem aprender matemática ao resolver problemas matemáticos relevantes e ricos para o contexto deles, com ênfase na compreensão conceitual e no desenvolvimento procedimental. A resolução de

problemas deixa de ser um fim para se tornar um meio privilegiado de ensino e aprendizagem.

Essa abordagem está enraizada na perspectiva construtivista da aprendizagem, especialmente nos trabalhos de autores como Piaget, Vygotsky e, mais diretamente, John Dewey, que defendia a aprendizagem como processo ativo, ancorado na investigação e na experiência do aluno diante de situações problemáticas autênticas. As características centrais do ensino via resolução de problemas, segundo pesquisadores como Masingila, Lester Junior e Raymond (2011), Proença (2018), Onuchic *et al.* (2021), são: os problemas são apresentados antes da formalização dos conceitos; os alunos são incentivados a explorar estratégias próprias, dialogar, testar hipóteses e argumentar; o conhecimento é construído coletivamente enquanto a promovem a resolução do problema; o professor atua como mediador e direcionador das discussões, estratégias e procedimentos; o erro é valorizado como parte do processo de aprendizagem, promovendo a discussão conceitual e monitoramento das estratégias e soluções.

Autores como Hiebert *et al.* (1997) e Ponte (1998) e Boaler (2002), enfatizam que o ensino através de problemas promove uma aprendizagem significativa, ao conectar a matemática escolar com situações complexas e relevantes para os estudantes, favorecendo o desenvolvimento de competências cognitivas superiores, como a abstração, generalização, argumentação e criatividade. No Brasil, destacam-se as contribuições de Onuchic *et al.*, (2021), que propõem uma metodologia didática com dez etapas organizadas em torno da resolução de problemas como estrutura central da aula. De forma semelhante, Proença (2018; 2021) apresenta a proposta de ensino via resolução de problemas, na qual os conteúdos matemáticos são ensinados a partir da interação com problemas significativos, numa sequência estruturada de quatro etapas: uso do problema como ponto de partida, formação do conceito, formalização do conteúdo, e aplicação em novos problemas. Essa abordagem transforma o papel do estudante, que deixa de ser um receptor de conteúdo para tornar-se agente ativo na construção do saber matemático, e o do professor, que passa a ser um articulador do conhecimento emergente das interações com os problemas.

Uma Possível Visão Paradigmática das Abordagens de Resolução de Problemas

Na ciência e, particularmente, no campo da educação, o termo paradigma remete ao conjunto de concepções teóricas, valores, métodos e práticas que orientam a produção de conhecimento e a ação profissional em determinado período histórico. Kuhn (2013, p. 13) define paradigma como “as realizações científicas universalmente reconhecidas que, durante algum tempo, fornecem problemas e soluções modelares para uma comunidade de praticantes”. No contexto educacional, paradigmas representam modos predominantes de conceber a aprendizagem e o ensino, influenciando desde o desenho curricular até a prática em sala de aula (Mizukami, 1986).

Esses paradigmas não são estáticos: surgem e se transformam em resposta a novas demandas sociais, avanços científicos e mudanças nas concepções de sujeito, conhecimento e sociedade. Na educação, tais mudanças se refletem na adoção de diferentes perspectivas pedagógicas como: o instrucionismo, o cognitivismo, o construtivismo e o sócio-construtivismo, cada qual com sua visão sobre como o conhecimento é construído e qual deve ser o papel do professor e do aluno (Libâneo, 2012). A identificação de um paradigma dominante ou emergente em uma prática de ensino permite compreender as intencionalidades subjacentes e avaliar sua coerência com os objetivos de aprendizagem propostos.

A abordagem de ensino sobre a resolução de problemas matemáticos caracteriza-se pela ênfase no ensino explícito de estratégias, heurísticas e fases do processo de resolução, frequentemente inspirada no modelo de Polya (1945), que propõe quatro etapas: compreensão do problema, elaboração de um plano, execução do plano e revisão da solução. Trata-se de uma perspectiva alinhada ao paradigma instrucionista com base cognitivista, no qual a aprendizagem é concebida como processamento de informação (Atkinson; Shiffrin, 1968; Anderson, 2010).

Nesse paradigma, o professor assume o papel de modelo cognitivo, em inglês, *cognitive modeler*, explicitando seu raciocínio e demonstrando como aplicar estratégias para resolver problemas. Esse processo é coerente com a teoria da aprendizagem por modelagem cognitiva, em inglês, *Cognitive Apprenticeship* de Collins, Brown e Newman (1989), na qual o professor expõe procedimentos internos de pensamento que, de outro modo, permaneceriam ocultos ao aprendiz. Como destacam Onuchic e Allevatto (2011, p. 77), “o professor apresenta o caminho a ser seguido, tornando explícitos os passos para que o aluno possa reproduzi-los”.

A abordagem de ensino de matemática para a resolução de problemas, por sua vez, insere-se predominantemente no paradigma da aquisição de habilidades, em inglês, *Skill Acquisition Theory*, com fundamentos cognitivistas-comportamentais. Nessa concepção, o foco não é o ensino direto de estratégias de resolução, mas a criação de oportunidades para que os estudantes apliquem conceitos e procedimentos previamente aprendidos em contextos de problema.

Segundo Fitts e Posner (1967), a aprendizagem de habilidades ocorre em três estágios: cognitivo, compreensão inicial; associativo, prática com feedback; e autônomo fluência/proficiência e automatização. Ericsson, Krampe e Tesch-Römer (1993) complementam ao argumentar que o aprimoramento requer prática deliberada, isto é, exercícios intencionalmente estruturados para promover progresso. No ensino de matemática, essa abordagem se traduz em listas de exercícios e problemas contextualizados que reforçam a aplicação de conteúdos estudados, fortalecendo a transferência de aprendizagem (Perkins; Salomon, 1992). Nessa perspectiva, a atuação docente prioriza a oferta de tarefas de prática estruturada, com controle da dificuldade e feedback corretivo. Embora possa promover competência procedimental, tal abordagem é menos voltada à construção autônoma de conceitos, funcionando melhor quando o objetivo é consolidar técnicas já apresentadas.

A abordagem de ensino da matemática através da resolução de problemas é a que mais claramente se aproxima do paradigma construtivista (Piaget, 1970) e sócio-construtivista (Vygotky, 2007), nos quais a aprendizagem é entendida como um processo ativo de construção de significados, mediado por interações sociais e pela resolução de desafios significativos. Nesse paradigma, o problema não é apenas um meio de aplicação, mas o motor do ensino. O conteúdo matemático emerge da necessidade de resolver uma situação desafiadora, permitindo que os conceitos sejam construídos pelos próprios alunos, com mediação e intervenções estratégicas do professor. Como defendem Onuchic e Allevatto (2011), o ensino pela resolução de problemas envolve os alunos em investigações que lhes permitem descobrir, conjecturar, testar hipóteses e generalizar resultados.

No quadro 1 é apresentado uma síntese das três abordagens da resolução de problemas no ambiente de ensino e aprendizagem de matemática.

Quadro 1 - Síntese das três abordagens da resolução de problemas no ambiente de ensino e aprendizagem de matemática.

Abordagem	Sobre a Resolução de Problemas (About problem solving)	Para a Resolução de Problemas (For problem solving)	Via/Através da Resolução de Problemas (Via/Through problem solving)
Objetivo de ensino	Ensinar explicitamente estratégias, heurísticas e etapas para resolver problemas, como as fases de Polya	Desenvolver habilidades para aplicar conceitos e procedimentos já aprendidos em problemas específicos	Desenvolver compreensão conceitual a partir da resolução de problemas contextualizados e significativos
Objetivo de aprendizagem	Aprender métodos e etapas da resolução de problemas de forma estruturada	Aplicar conhecimentos prévios para resolver problemas conhecidos ou semelhantes aos estudados	Construir conceitos matemáticos enquanto resolve problemas que exigem reflexão e investigação
Papel do professor	Apresentador de estratégias e métodos de forma expositiva	Fornecedor de exercícios e orientações para aplicação prática	Criador e mediador de problemas; facilitador do processo investigativo
Papel do aluno	Receptor passivo, memoriza procedimentos e técnicas	Resolvedor ativo, mas em contextos estruturados e previsíveis	Construtor ativo de conhecimento, participa de discussões e reflexões
Dinâmica da sala de aula	Aula expositiva, centrada no professor; baixa autonomia do aluno	Prática de exercícios; aplicação de procedimentos previamente ensinados	Ambiente centrado no problema; discussão, colaboração e iteração contínua
Paradigma	Instrucionista com base cognitivista	Aquisitivista, com base na Skill Acquisition Theory	Construtivista e sócio-construtivista

Fonte: autoria própria, 2025.

Cada abordagem, portanto, articula-se a um paradigma pedagógico distinto: o ensino sobre a resolução de problemas privilegia a instrução explícita com base

cognitivista; o ensino para a resolução de problemas alinha-se ao paradigma de aquisição e treino de habilidades; e o ensino via/através da resolução de problemas vincula-se aos pressupostos construtivistas e sócio-construtivistas. Reconhecer essas relações permite que professores e pesquisadores façam escolhas metodológicas mais conscientes, alinhando objetivos de ensino, estratégias didáticas e expectativas de aprendizagem. Por fim, Schoenfeld (2016) e Simon (1995) mostram que essas abordagens de ensino direta ou indiretamente baseiam-se em planejamentos que visam reconhecer no horizonte possíveis acontecimentos que irão reger o ensino e a aprendizagem dos alunos no ambiente real, nas quais o professor antecipa trajetórias hipotéticas possíveis e dificuldades, mas mantém a flexibilidade para ajustar intervenções de acordo com as produções dos alunos.

Interrelações Possíveis entre a Resolução de Problemas e as Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem

A intersecção entre a resolução de problemas matemáticos e as Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA) representa um diálogo metodológico fundamental para o ensino da matemática, reunindo a dimensão significativa e dialógica da construção do conhecimento pelo aluno e o planejamento estratégico-reflexivo do professor. A resolução de problemas serve como pano de fundo para a aprendizagem dos alunos, enquanto as THA oferecem um roteiro antecipatório estruturado para mediar e organizar o processo ensino (Simon, 1995; Proença, 2018; Pereira; Proença, 2022).

Simon e Tzur (2004) definem a THA como uma previsão fundamentada acerca do percurso esperado da aprendizagem, considerando as respostas, dificuldades e estratégias que os alunos poderão manifestar durante a atividade. Essa trajetória é hipotética pois reconhece a singularidade e contingência do processo, permitindo ao docente planejar com embasamento e flexibilidade (Pires, 2009; Oliveira, 2014). Já no ensino via resolução de problemas, a multiplicidade de estratégias e interpretações requer do professor uma postura flexível, alinhada à antecipação oferecida pelas THA para adaptar o ensino frente às respostas dos estudantes (Lester Junior, 1994; Cai; Brooks, 2007).

A integração entre as duas abordagens fortalece a articulação entre o desenvolvimento do pensamento matemático e a sistematização progressiva da aprendizagem. Almeida, Silva e Vertuan (2012) destacam, no contexto da Modelagem Matemática e do empenho em estabelecer uma problemática e buscar um modelo que a solucione, assimilam que as fases como formulação, matematização, resolução, interpretação e validação podem ser previstas e organizadas por hipóteses previstas antecipadamente, definindo estratégias pedagógicas coerentes para cada etapa. A construção de uma THA centrada na atividade de resolução de problemas exige profundo conhecimento do professor sobre conceitos matemáticos, características dos alunos e possíveis trajetórias cognitivas, sendo um planejamento vivo e revisitado conforme acontece a mediação em sala (Gómez; González; Lupiáñez, 2007; Pires, 2009). Massingila e King (1996) ressaltam que a resolução

de problemas transcende a técnica, promovendo argumentação, pensamento crítico e valorização cultural, fortalecidos quando integrados a um planejamento estruturado por THA.

Importantes avanços recentes demonstram a aplicabilidade direta dessa articulação em contextos específicos. Purwati, Putra e Noviana (2023), por exemplo, projetaram trajetórias de aprendizagem para problemas envolvendo o cálculo do perímetro e da área de retângulos, evidenciando como a THA organiza sequências lógicas das etapas de resolução, aprofundamento e refinamento dos conceitos matemáticos. Similarmente, Pereira e Proença (2022) apresentaram estudos no ensino de equações do 2º grau, articulando THA e resolução de problemas para definir caminhos de aprendizagem, intervenção docente e superação de dificuldades reais dos alunos, o que contribui para práticas pedagógicas mais eficazes e contextualizadas. Já Doneze e Proença (2022) se dedicaram ao ensino de função exponencial através da resolução de problemas, utilizando a Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) para estruturar o processo. Por fim, Santos e Proença (2023), propõe uma THA para ensinar logaritmos via resolução de problemas, utilizando um contexto real. Tais pesquisas concluem de forma consonante que as THA favorecem a formação do docente, através da prospecção do cenário real de sala de aula enquanto as abordagens da resolução de problemas contribuem para a compreensão conceitual e a articulação com conhecimentos prévios, destacando seu potencial para melhorar o ensino de matemática.

Na formação docente, essa articulação facilita a construção de um olhar crítico e antecipatório, auxiliando futuros professores a identificar obstáculos de aprendizagem e planejar estratégias adequadas em tarefas contextualizadas (ONUICH; ALLEVATO, 2010; OLIVEIRA, 2014).

Assim, a força dessa interrelação está em dois movimentos complementares:

- A resolução de problemas proporciona um contexto ativo e desafiador que engaja alunos em processos cognitivos complexos, exigindo reflexão, argumentação e criatividade;
- As Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem oferecem uma apreensão estratégica desse processo, projetando caminhos prováveis e proporcionando ao professor bases para gerir de forma eficaz e adaptativa as dinâmicas docentes, ajustando-se às respostas e dificuldades apresentadas.

Dessa forma, a combinação destas abordagens promove um ensino centrado no aluno, flexível e alinhado com objetivos de aprendizagem, potencializando a construção significativa do conhecimento matemático (Simon, 1995; Oliveira, 2014; Cai; Brooks, 2007).

Indicando Possíveis Trajetórias de Ensino e Aprendizagem

Considerando uma situação simples, tipicamente encontrada em livros didáticos, e que se enquadra nas descrições das três abordagens da resolução de problemas. Na Figura 2 é apresentado a situação matemática empregada como exemplificação.

Uma pequena empresa produz camisetas. O custo fixo mensal para manter a produção é de R\$ 2.000,00. Cada camiseta custa R\$ 15,00 para ser produzida. A empresa vende cada camiseta por R\$ 40,00. Quantas camisetas devem ser vendidas por mês para que a empresa comece a obter lucro?

Na abordagem de ensino sobre a resolução de problemas, a aprendizagem é vista como processamento cognitivo estruturado e sequencial. O professor assume o papel central de mediador e modelador do raciocínio matemático, apresentando explicitamente estratégias e procedimentos para resolver a situação-problema. A trajetória de aprendizagem é planejada, guiada e dirigida, com foco na compreensão e reprodução dos passos formais da resolução algébrica.

Nesse cenário, o professor inicia lendo o problema em voz alta, destacando os termos-chave: custo fixo, custo por unidade e preço de venda. Utiliza recursos visuais para explicitar o significado e a diferença entre custos fixos e variáveis. Usa analogias. Elabora um glossário coletivo com os termos do problema e cria questionamentos dirigidos para identificar a compreensão dos termos. É comum que alunos confundam esses conceitos, por exemplo, acreditando que o custo fixo varia com a quantidade produzida. Com isso o professor estará ensinando estratégias de leitura, interpretação e extração de informações importantes em enunciados.

Durante o processo de resolução, o professor indica a existência de uma variável, podendo ser c de camisetas ou simplesmente x como a quantidade de camisetas vendidas. Essa maneira é propícia para que os alunos compreendam que situações que envolvem relações de variabilidade têm como possibilidade resolutive o equacionamento. A previsão de dificuldades linguísticas nessa etapa consiste em: o aluno não entender que $15x$ representa o custo variável e $40x$ a receita, ou mesmo o significado de x como variável; o aluno não compreende qual o significado de obter lucro, como relação de compra e venda.

Como estratégias para as dificuldades na etapa de resolução, o professor pode: explicitar que x é uma incógnita que representa o número de unidades; utilizar tabelas para relacionar valores de x com custos e receitas correspondentes; exercícios orais para verbalizar o significado das expressões, principalmente lucro; formular e discutir a ideia de ponto de equilíbrio para compreender a relação de lucro e prejuízo; explicar que o lucro é a diferença entre receita e custo e que o ponto em que o lucro começa a ser positivo é quando receita = custo.

Dificuldades de ordem sintática, o uso do sinal de igualdade e a estrutura da equação pode ser difícil, especialmente para alunos com pouca familiaridade com linguagem algébrica; operações algébricas e frações podem gerar confusões. Como uma estratégia previsível para essa dificuldade, o professor pode: explicar de forma explícita do que significa a igualdade, como equilíbrio entre receita e custo; decompor a equação em partes, ilustrando o que cada lado representa; utilização de representações gráficas para mostrar onde as duas expressões se igualam; solicitar a verificação do resultado como uma solução válida ou não para o problema, ensinando que, em soma, os resultados assumem um significado prático

na avaliação da resposta correta; encorajar os alunos a interpretarem a solução no contexto real.

Na abordagem de ensino de matemática para a resolução de problemas, a aprendizagem é entendida como a automação gradual de habilidades e procedimentos por meio de prática repetida e feedback corretivo. O professor organiza a atividade como uma sequência de exercícios contextualizados, onde o aluno pratica sistematicamente a resolução de problemas algébricos similares ao problema inicial.

No detalhamento da trajetória de aprendizagem, os alunos leem o problema individualmente ou coletivamente, o professor lê o problema e revisa rapidamente os conceitos de valor fixo e variável, custo, lucro e receita com problemas simples. Na etapa de leitura da situação, dificuldades linguísticas podem ser previstas como e estão relacionadas as mesmas supramencionadas na abordagem anterior. Se for preciso, o professor pode apresentar esquemas simplificados para reforçar os conceitos e atribuir respostas rápidas a dúvidas pontuais.

Durante a resolução do problema, é possível estabelecer a previsão de dificuldades semânticas e sintáticas, alguns alunos podem: executar procedimentos e manipulações algébrica de forma incorreta; não saber justificar seu raciocínio ou agir de maneira sucinta e prática; podem surgir erros na interpretação dos números ou na resolução algébrica; não reconhecer o valor variável e realizar a adição de ambos; ou não equacionar a situação, optando por manipulações aritméticas e acabar apresentando incorreções ao executar as operações elementares.

Estratégias para contornar essas possíveis dificuldades são: solicitar que os alunos exercitem o ato de repetir os passos principais verbalmente e visualmente; disponibilizar cópias escritas da situação para que possam realizar sinalizações; atribuir uma série de problemas algébricos contextualizados ou exercícios focados no reconhecimento, interpretação e manipulação da linguagem algébrica, dos símbolos e operações, com dados e preços variados, para montar equações semelhantes, resolvê-las e disponibilizar para consulta e auxílio; circular pela sala para corrigir erros comuns e orientar rapidamente; promover o uso de tabelas e recursos visuais para reforçar a correspondência entre números e expressões algébricas.

Na abordagem de ensino de matemática através da resolução de problemas, a aprendizagem está sustentada no engajamento ativo dos alunos na construção do novo conhecimento a partir da mobilização dos conhecimentos prévios. O problema é o ponto de partida para a aprendizagem, que se dará através da exploração, representação e execução de estratégias e procedimentos que determinarão a solução de maneira coletiva. O professor atua como mediador, criando um ambiente propício à investigação, à discussão e à reflexão.

Ao estabelecer a introdução do problema, o professor deve deixá-los livres para realizarem a leitura e investigarem características da situação que possibilitem identificar a matemática necessária para a resolução. É importante que o professor, anteriormente, não tenha explicado conceitos ou realizado a leitura, visto alterar o sentido da abordagem que se dá através da exploração. As principais dificuldades

linguísticas podem estar associadas a: compreensão de expressões específicas como lucro, prejuízo, custo, receita; não identificar qual conteúdo matemática está envolto na questão. Estratégias para as dúvidas previstas são: incentivar que os alunos discutam e proponham significados em seus próprios termos entre os grupos; oferece mediação pontual para esclarecer termos complexos ou realizar a leitura atribuindo ênfase em expressões importantes.

Durante a resolução, dificuldades do campo semântico e sintáticos podem surgir, tais como: dificuldade em relacionar custo fixo, custo variável e receita à situação real como forma de auxiliar na compreensão; incerteza ou insegurança sobre como representar expressões matemáticas, simbologias corretas a serem empregadas; imperícias na manipulação algébrica, compreensão do que significa o ponto de equilíbrio, por exemplo, diante do contexto do problema; não realizar a verificação da validade da resposta como solução do problema; não realizar o monitoramento da estratégia e dos procedimentos desenvolvido.

Previsões de contornar tais dificuldades são: construir coletivamente expressões no quadro, com justificativas verbais e alinhar a linguagem natural à simbólica; pedir para os alunos explicarem os conceitos em suas próprias palavras; relacionar o problema com outras situações do cotidiano; uso de materiais concretos, simulações ou representação gráfica para visualizar os conceitos não compreendidos que ocasionaram os erros; incentivar o uso de tentativa e erro para validação; utilização de softwares ou calculadoras para verificar resultados; discussão aberta para compartilhar dificuldades, estratégias e as soluções.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Retomando o objetivo inicial, constatou-se que a articulação entre Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem e abordagens da Resolução de Problemas oferece um referencial robusto para o planejamento e a mediação pedagógica no ensino de matemática. Essa integração contribui para o campo científico ao evidenciar que o professor pode simultaneamente antecipar percursos prováveis de aprendizagem e adaptar-se às respostas e estratégias emergentes dos alunos, promovendo um ambiente mais dialógico e investigativo. Do ponto de vista formativo, a combinação dessas perspectivas fortalece a competência docente para identificar obstáculos, explorar múltiplas estratégias de resolução e alinhar as intervenções aos objetivos conceituais.

Como possibilidade de investigação futura, recomenda-se o desenvolvimento de estudos empíricos que testem a aplicabilidade desse diálogo metodológico em diferentes conteúdos matemáticos e contextos escolares, analisando seu impacto sobre a aprendizagem, a participação estudantil e a evolução das práticas docentes. Além disso, é esperado um refinamento em profundidade acerca dos paradigmas citados e de novos advindos das metodologia ativas.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ANDERSON, J. R. **Cognitive psychology and its implications**. 7. ed. New York: Worth Publishers, 2010.

ATKINSON, R. C.; SHIFFRIN, R. M. **Human memory: A proposed system and its control processes**. In: SPENCE, K. W.; SPENCE, J. T. (Eds.). *The psychology of learning and motivation*. New York: Academic Press, 1968. v. 2, p. 89-195.

BOALER, J. **Experiencing school mathematics: Traditional and reform approaches to teaching and their impact on student learning**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: MEC, 2018.

CLEMENTS, D. H.; SARAMA, J. **Learning trajectories in mathematics education**. *Mathematical Thinking and Learning*, v. 6, n. 2, p. 81-89, 2004.

COLLINS, A.; BROWN, J. S.; NEWMAN, S. E. **Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing, and mathematics**. In: RESNICK, L. B. (Ed.). *Knowing, learning, and instruction: Essays in honor of Robert Glaser*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1989. p. 453-494.

DONEZE, I. S.; PROENÇA, M. C. de. **Trajatória hipotética de aprendizagem para o ensino de função exponencial via resolução de problemas**. In: FERREIRA, J. W. C. (Org.). *Educação Matemática e práticas pedagógicas: diálogos entre teoria e sala de aula*. Tutóia, MA: Diálogos, 2023. p. 51-78.

ERICSSON, K. A.; KRAMPE, R. T.; TESCH-RÖMER, C. **The role of deliberate practice in the acquisition of expert performance**. *Psychological Review*, v. 100, n. 3, p. 363-406, 1993.

FITTS, P. M.; POSNER, M. I. **Human performance**. Belmont: Brooks/Cole, 1967.

GÓMEZ, P.; GONZÁLEZ, M. J.; LUPIÁÑEZ, J. L. **Trajectories of learning: Designing a hypothetical learning path**. *PNA*, v. 1, n. 3, p. 119-132, 2007.

HIEBERT, J.; CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E.; FUSON, K.; WEARNE, D.; MURRAY, H. **Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding**. Portsmouth, NH: Heinemann, 1997.

KUHN, T. S. **The structure of scientific revolutions**. 4. ed. Chicago: University of Chicago Press, 2013.

LESTER, F. K.; KEHLER, A. **Problem solving in the elementary grades**. In: LESTER, F. K. (Ed.). *Teaching mathematics through problem solving*. Reston: NCTM, 2003. p. 45-58.

LIBÂNEO, J. C. Didática. São Paulo: Cortez, 2012.

MASINGILA, J. O.; LESTER JR, F. K.; RAYMOND, A. M. **Mathematics for elementary teachers via problem solving**. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2011.

MASSINGILA, J. O.; KING, K. D. **The role of problem contexts in changing students' thinking**. Journal of Mathematical Behavior, v. 15, n. 3, p. 287-312, 1996.

MIZUKAMI, M. G. N. **Ensino: As abordagens do processo**. São Paulo: EPU, 1986.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). **Principles and standards for school mathematics**. Reston: NCTM, 2000.

OLIVEIRA, J. C. R. **Trajетórias hipotéticas de aprendizagem na formação de professores de matemática**. 2014. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Pesquisa em educação matemática: Concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 2011. p. 199-218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. 2. ed. Jundiaí: Paco e Littera. 2021.

PERKINS, D. N.; SALOMON, G. **Transfer of learning**. **International Encyclopedia of Education**, 2. ed., Oxford: Pergamon Press, 1992. p. 6452-6457.

PIAGET, J. **Genetic epistemology**. New York: Columbia University Press, 1970.

PIRES, C. M. C. **Trajетórias hipotéticas de aprendizagem: um olhar para o planejamento do professor de matemática**. Zetetiké, v. 17, n. 31, p. 45-68, 2009.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J. P. da. **Didática da matemática: Ensino secundário**. Lisboa: Ministério da Educação, 1998.

PROENÇA, M. C. **Resolução de problemas: Encaminhamentos para o ensino de matemática em sala de aula**. Maringá: Eduem, 2018.

PURWATI, P.; PUTRA, Z. H.; NOVIANA, E. **Designing a Learning Trajectory of Area and Perimeter of Flat Shapes with Realistic Mathematics Education Approach for Fourth Grade Elementary School**. Kontinu: Jurnal Penelitian Didaktik Matematika, v. 7, n. 1, p. 63-75, 2023.

SANTOS, R. R.; PROENÇA, M. C. **Uma trajetória hipotética de aprendizagem para o ensino de logaritmos via resolução de problemas**. In: Anais... ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 16., 2022, Foz do

Iguaçu. Anais eletrônicos. Foz do Iguaçu: SBEM-PR, 2022. p. 1-15.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR., F. K. **Developing understanding in mathematics via problem solving**. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Eds.). *New directions for elementary school mathematics*. Reston: NCTM, 1989. p. 31-42.

SIMON, M. A. **Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective**. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 26, n. 2, p. 114-145, 1995.

SIMON, M. A.; TZUR, R. **Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory**. *Mathematical Thinking and Learning*, v. 6, n. 2, p. 91-104, 2004.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.