Exercícios de PTV:
Tópicos Especiais
Volume 2

Luis Fernando Sampaio Soares
Humberto Moura Lima

AYA EDITORA
2025

Exercícios de PTV:

Tópicos Especiais

Volume 2

Luis Fernando Sampaio Soares
Humberto Moura Lima

Exercícios de PTV:

Tópicos Especiais

Volume 2

AYA EDITORA
2025

Direção Editorial
Prof.° Dr. Adriano Mesquita Soares
Autores
Prof.º Dr. Luis Fernando Sampaio Soares
Prof.º Me. Humberto Moura Lima
Capa
AYA Editora©
Revisão
Os Autores
Executiva de Negócios
Ana Lucia Ribeiro Soares
Produção Editorial
AYA Editora©
Imagens de Capa
br.freepik.com
Área do Conhecimento
Engenharias

Conselho Editorial

Prof.° Dr. Adilson Tadeu Basquerote Silva (UNIDAVI)
Prof.ª Dr.ª Adriana Almeida Lima (UEA)
Prof.° Dr. Aknaton Toczek Souza (UCPEL)
Prof.° Dr. Alaerte Antonio Martelli Contini (UFGD)
Prof.° Dr. Argemiro Midonês Bastos (IFAP)
Prof.° Dr. Carlos Eduardo Ferreira Costa (UNITINS)
Prof.° Dr. Carlos López Noriega (USP)
Prof.ª Dr.ª Claudia Flores Rodrigues (PUCRS)
Prof.ª Dr.ª Daiane Maria de Genaro Chiroli (UTFPR)
Prof.ª Dr.ª Danyelle Andrade Mota (IFPI)
Prof.ª Dr.ª Déa Nunes Fernandes (IFMA)
Prof.ª Dr.ª Déborah Aparecida Souza dos Reis (UEMG)
Prof.° Dr. Denison Melo de Aguiar (UEA)
Prof.° Dr. Emerson Monteiro dos Santos (UNIFAP)
Prof.° Dr. Gilberto Zammar (UTFPR)
Prof.° Dr. Gustavo de Souza Preussler (UFGD)
Prof.ª Dr.ª Helenadja Santos Mota (IF Baiano)
Prof.ª Dr.ª Heloísa Thaís Rodrigues de Souza (UFS)
Prof.ª Dr.ª Ingridi Vargas Bortolaso (UNISC)
Prof.ª Dr.ª Jéssyka Maria Nunes Galvão (UFPE)
Prof.° Dr. João Luiz Kovaleski (UTFPR)
Prof.° Dr. João Paulo Roberti Junior (UFRR)
Prof.° Dr. José Enildo Elias Bezerra (IFCE)
Prof.° Dr. Luiz Flávio Arreguy Maia-Filho (UFRPE)
Prof.ª Dr.ª Marcia Cristina Nery da Fonseca Rocha Medina (UEA)
Prof.ª Dr.ª Maria Gardênia Sousa Batista (UESPI)
Prof.° Dr. Myller Augusto Santos Gomes (UTFPR)
Prof.° Dr. Pedro Fauth Manhães Miranda (UEPG)
Prof.° Dr. Rafael da Silva Fernandes (UFRA)
Prof.° Dr. Raimundo Santos de Castro (IFMA)
Prof.ª Dr.ª Regina Negri Pagani (UTFPR)

Prof.° Dr. Ricardo dos Santos Pereira (IFAC)
Prof.° Dr. Rômulo Damasclin Chaves dos Santos (ITA)
Prof.ª Dr.ª Silvia Gaia (UTFPR)
Prof.ª Dr.ª Tânia do Carmo (UFPR)
Prof.° Dr. Ygor Felipe Távora da Silva (UEA)

Conselho Científico

Prof.° Me. Abraão Lucas Ferreira Guimarães (CIESA)
Prof.ª Dr.ª Andreia Antunes da Luz (UniCesumar)
Prof.° Dr. Clécio Danilo Dias da Silva (UFRGS)
Prof.ª Ma. Denise Pereira (FASU)
Prof.° Dr. Diogo Luiz Cordeiro Rodrigues (UFPR)
Prof.° Me. Ednan Galvão Santos (IF Baiano)
Prof.ª Dr.ª Eliana Leal Ferreira Hellvig (UFPR)
Prof.° Dr. Fabio José Antonio da Silva (HONPAR)
Prof.ª Ma. Jaqueline Fonseca Rodrigues (FASF)
Prof.ª Dr.ª Karen Fernanda Bortoloti (UFPR)
Prof.ª Dr.ª Leozenir Mendes Betim (FASF)
Prof.ª Dr.ª Lucimara Glap (FCSA)
Prof.ª Dr.ª Maria Auxiliadora de Souza Ruiz (UNIDA)
Prof.° Dr. Milson dos Santos Barbosa (UniOPET)
Prof.ª Dr.ª Pauline Balabuch (FASF)
Prof.ª Dr.ª Rosângela de França Bail (CESCAGE)
Prof.° Dr. Rudy de Barros Ahrens (FASF)
Prof.° Dr. Saulo Cerqueira de Aguiar Soares (UFPI)
Prof.ª Dr.ª Silvia Aparecida Medeiros Rodrigues (FASF)
Prof.ª Dr.ª Sueli de Fátima de Oliveira Miranda Santos (UTFPR)
Prof.ª Dr.ª Tássia Patricia Silva do Nascimento (UEA)
Prof.ª Dr.ª Thaisa Rodrigues (IFSC)

© 2025 - AYA Editora

O conteúdo deste livro foi enviado pelos autores para publicação em acesso aberto, sob os termos e condições da Licença de Atribuição Creative Commons 4.0 Internacional **(CC BY 4.0)**. Este livro, incluindo todas as ilustrações, informações e opiniões nele contidas, é resultado da criação intelectual exclusiva dos autores. Estes detêm total responsabilidade pelo conteúdo apresentado, que reflete única e inteiramente sua perspectiva e interpretação pessoal.

É importante salientar que o conteúdo deste livro não representa, necessariamente, a visão ou opinião da editora. A função da editora foi estritamente técnica, limitando-se aos serviços de diagramação e registro da obra, sem qualquer influência sobre o conteúdo apresentado ou as opiniões expressas. Portanto, quaisquer questionamentos, interpretações ou inferências decorrentes do conteúdo deste livro devem ser direcionados exclusivamente aos autores.

S676 Soares, Luis Fernando Sampaio

Exercícios de PTV: tópicos especiais [recurso eletrônico]. / Luis Fernando Sampaio Soares, Humberto Moura Lima. -- Ponta Grossa: Aya, 2025. 127 p.

Inclui biografia
Inclui índice
Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
ISBN: 978-65-5379-811-3
DOI: 10.47573/aya.5379.1.392

1. Engenharia de estruturas. 2. Análise estrutural (Engenharia). I. Lima, Humberto Moura. II. Título

CDD: 624

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Bruna Cristina Bonini – CRB 9/1347

International Scientific Journals Publicações de Periódicos e Editora LTDA
AYA Editora©
CNPJ: 36.140.631/0001-53
Fone: +55 42 3086-3131
WhatsApp: +55 42 99906-0630
E-mail: contato@ayaeditora.com.br
Site: https://ayaeditora.com.br
Endereço: Rua João Rabello Coutinho, 557
Ponta Grossa - Paraná - Brasil
84.071-150

APRESENTAÇÃO DO LIVRO

O livro “Exercícios de PTV - Tópicos Especiais, Volume 1” (Soares et al., 2024) focou na resolução de pórticos reticulados compostos por elementos atípicos, tais como arcos de circunferência e barras de inércia variável, solicitados por esforços concentrados e cargas distribuídas. O Volume 2 desta série abrange estruturas de grelhas com elementos retos e curvos. A ideia original de utilizar o PTV como um pretexto para a determinação de esforços internos – em especial momentos fletores e torsores – destacando algumas peculiaridades de tipos estruturais mais atípicos, é mantida. Serão tratados casos em que as cargas distribuídas possuem resultantes posicionadas fora da estrutura, em função das propriedades geométricas dos arcos, além de vetores representativos de momentos que se desmembram de acordo com a curvatura da seção transversal, entre outros aspectos.

Dos leitores é exigida uma certa familiaridade com conceitos intrínsecos ao estudo da disciplina usualmente chamada de *Análise de Estruturas* (também encontrada Brasil afora como *Teoria das Estruturas*, *Estabilidade das Construções*, entre outras denominações) da grade curricular das Engenharias. Terminologias como Sistema Real ou Estado de Deformação, Sistema Virtual ou Estado de Carregamento, Método das Forças (ou dos Esforços), Termos de Carga e Coeficientes de Flexibilidade serão utilizadas por aqui sem contextualização teórica. Para definições mais formais desses conceitos, os autores recomendam os trabalhos de Süssekind (1980), Soriano e Lima (2006), e Martha (2022).

Destaca-se também o desprendimento dos autores quanto a valores práticos usuais da construção civil, uma vez que o foco deste trabalho, tal como no Volume 1, está no aprofundamento de conceitos e metodologias inerentes às etapas do cálculo estrutural, especialmente na determinação de esforços internos, deslocamentos e rotações. Além disso, há um incentivo ao desenvolvimento e aprimoramento do “olho do engenheiro” na era das inteligências artificiais.

Os autores gostariam de agradecer aos respectivos familiares, que ofereceram suporte incondicional a essa empreitada. Agradecemos também aos Professores Luís Alfredo Lopes Soares (In memoriam), João Celso Martins Marques, Fernanda Gabriella Batista Santos Oliveira, Dorival Piedade Neto, Rodrigo de Azevedo Neves e André Sarkis Müller, por suas valiosas contribuições.

Estendemos os agradecimentos aos nossos orientadores de mestrado e doutorado: Mounir Khalil El Debs, Robert Lars Vollum, Jorge Munaiar Neto e Vladimir Guilherme Haach.

Agradecemos também aos então discentes Letícia Amorim Melo, Thaynara de Jesus Martins da Silva, Marco Antonio Pinho Leite, Gustavo Ramos Araújo Almeida e Ricardo José Almeida Rego, que participaram ativamente da etapa de correção deste livro, fundamental para sua versão final.

SUMÁRIO

1 Aspectos gerais 11

2 Exercício 2 (isostático, arco, engastado) 15
2.1 Sistema Real 15
2.2 Sistema Virtual (Figura 2.3) 16
2.3 Cálculo de Deslocamento e/ou Rotação 17
2.4 Sistema Real 17
2.5 Sistema Virtual (Figura 2.7) 19
2.6 Cálculo de Deslocamento e/ou Rotação 20

3 Exercício 3 (isostático, arco, engastado) 21
3.1 Sistema Real 21
3.2 Sistema Virtual 22
3.3 Cálculo de Deslocamento e/ou Rotação 22
3.4 Sistema Real 23
3.5 Sistema Virtual 25
3.6 Cálculo de Deslocamento e/ou Rotação 25

4 Exercício 4 (isostático, arco, engastado) 26
4.1 Sistema Real 26
4.2 Sistema Virtual para cálculo de δVA (Figura 4.6) 29
4.3 Sistema Virtual para cálculo de θtA (Figura 4.8) 30
4.4 Sistema Virtual para cálculo de θfA (Figura 4.10) 32
4.5 Cálculo de Deslocamento e/ou Rotação 33

5 Exercício 5 (isostático, arco, triapoiado) 35
5.1 Sistema Real (Figura 5.2) 36
5.2 Sistema Virtual (Figura 5.6) 39
5.3 Cálculo de Deslocamento e/ou Rotação 40

6 Exercício 6 (isostático, barra inclinada, arco, triapoiado) 41
6.1 Sistema Real (Figura 6.2) 41
6.2 Sistema Virtual (Figura 6.7) 45
6.3 Cálculo de Deslocamento e/ou Rotação 46

7 Exercício 7 (hiperestático, arco, barra inclinada) 48
7.1 Sistema Principal do Sistema Real (Figura 7.2) 49
7.2 Sistema [0] do Sistema Real (Figura 7.3) 49
7.3 Sistema [1] do Sistema Real (Figura 7.8) 53
7.3.1 Cálculo dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade para o Sistema Real 55
7.4 Sistema Principal do Sistema Virtual para cálculo de θyD (Figura 7.10) 57
7.4.1 Sistema [0] do Sistema Virtual (Figura 7.11) 58
7.4.2 Cálculo dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade para o Sistema Virtual 59
7.5 Sistema Principal do Sistema Virtual para cálculo de δVC (Figura 7.14) 61
7.5.1 Sistema [0] do Sistema Virtual (Figura 7.14) 62
7.5.2 Cálculo dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade para o Sistema Virtual 63
7.6 Cálculo de Deslocamento e/ou Rotação 65

8 Exercício 8 (hiperestático, arco, quadro fechado) 67
8.1 Sistema Principal do Sistema Real 68
8.1.1 Sistema [0] do Sistema Real (Figura 8.4) 68
8.1.2 Sistema [1] do Sistema Real (Figura 8.8) 71
8.1.3 Sistema [2] do Sistema Real (Figura 8.9) 73
8.1.4 Sistema [3] do Sistema Real (Figura 8.10) 74
8.1.5 Cálculo dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade para o Sistema Real 75
8.2 Sistema Principal do Sistema Virtual (Figura 8.12) 79

8.2.1 Sistema [0] do Sistema Virtual (Figura 8.13) 79
8.2.2 Cálculo dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade para o Sistema Virtual 81
8.3 Cálculo de Deslocamento e/ou Rotação 83

9 Exercício 9 (hiperestático, arco, carga linear, biengastado) 84
9.1 Sistema Principal do Sistema Real (Figura 9.2) 85
9.2 Sistema [0] do Sistema Real (Figura 9.3) 85
9.3 Sistema [1] do Sistema Real (Figura 9.9) 90
9.4 Sistema [2] do Sistema Real (Figura 9.11) 92
9.5 Sistema [3] do Sistema Real (Figura 9.12) 93
9.5.1 Cálculo dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade para o Sistema Real 94
9.6 Sistema Principal do Sistema Virtual para o cálculo de δVD (Figura 9.14) 98
9.6.1 Sistema [0] do Sistema Virtual (Figura 9.15) 99
9.6.2 Cálculo dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade para o Sistema Virtual 100
9.7 Sistema Principal do Sistema Virtual para o cálculo de θxD (Figura 9.17) 103
9.7.1 Sistema [0] do Sistema Virtual (Figura 9.18) 103
9.7.2 Cálculo dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade para o Sistema Virtual 105
9.8 Sistema Principal do Sistema Virtual para o cálculo de θyD (Figura 9.20) 107
9.8.1 Sistema [0] do Sistema Virtual (Figura 9.21) 108
9.8.2 Cálculo dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade para o Sistema Virtual 109
9.9 Cálculo de Deslocamento e/ou Rotação 112

Referências 114

Apêndice A 115

Apêndice B 119

1 ASPECTOS GERAIS

A literatura científica apresenta diferentes conceituações para as grelhas que serão objeto de estudo e exercícios neste livro. O trabalho de Souza e Antunes (1995), por exemplo, define-as como “uma estrutura plana, com cargas normais ao seu plano, com vinculações que não introduzam solicitações no plano, e com elementos lineares simétricos em relação a planos que os contenham e sejam normais ao plano da estrutura”. Já Soriano (2007) as descreve como estruturas “[constituídas] de barras retas ou curvas situadas em um plano usualmente horizontal sob ações externas que as solicitam de maneira que tenham apenas o momento de torção, o momento fletor de vetor representativo nesse plano e o esforço cortante normal a esse plano”. Para Martha (2022), trata-se de “modelos planos com cargas na direção perpendicular ao plano, incluindo momentos em torno de eixos do mesmo”.

Conforme pode ser observado nessas diversas definições, embora as grelhas sejam estruturas planas, elas estão sujeitas a solicitações provenientes de forças fora deste plano, diferentemente dos tradicionais pórticos bidimensionais (objeto de estudo do primeiro volume desta série – Soares et al., 2024). Por essa razão, as grelhas são frequentemente consideradas uma etapa intermediária entre os pórticos planos e espaciais — sendo estes últimos um tema comumente negligenciado nos cursos de graduação, devido à carga horária limitada. Essa transição conceitual talvez tenha sido a principal motivação para a escolha desse tipo de estrutura neste Volume 2.

Com o objetivo de proporcionar uma leitura mais clara e organizada, este capítulo se dedica à definição de premissas básicas que serão empregadas nos exercícios apresentados ao longo desta obra. Estes exercícios estão organizados em capítulos e marcados com "tags", com o intuito de facilitar a identificação por parte do leitor. Trabalhos como os de Süssekind (1980), Süssekind (1981), Souza e Antunes (1995), Soriano e Lima (2006), Soriano (2007) e Martha (2022) apresentaram abordagens mais teóricas e formais sobre o uso do PTV na análise de estruturas isostáticas e hiperestáticas. Este livro, por sua vez, concentra-se em sua aplicação prática a estruturas de grelhas mais atípicas, explorando situações de exceção – como barras curvas dispostas segundo um arco de circunferência ou barras retas inclinadas em relação aos eixos globais –, entre outras.

Estas resoluções seguem uma lógica bem ilustrada no fluxograma da Figura 1.1. Os parâmetros necessários – como os termos de carga e os coeficientes de flexibilidade – serão calculados em todos os casos por meio de integrais. Esta abordagem foi adotada devido à escassez de material didático que apresenta estas expressões de forma completa. Por esse

motivo, optou-se por não utilizar as tabelas de combinações de diagramas de Beyer (1956), mesmo nos casos de barras com eixo reto e inércia constante.

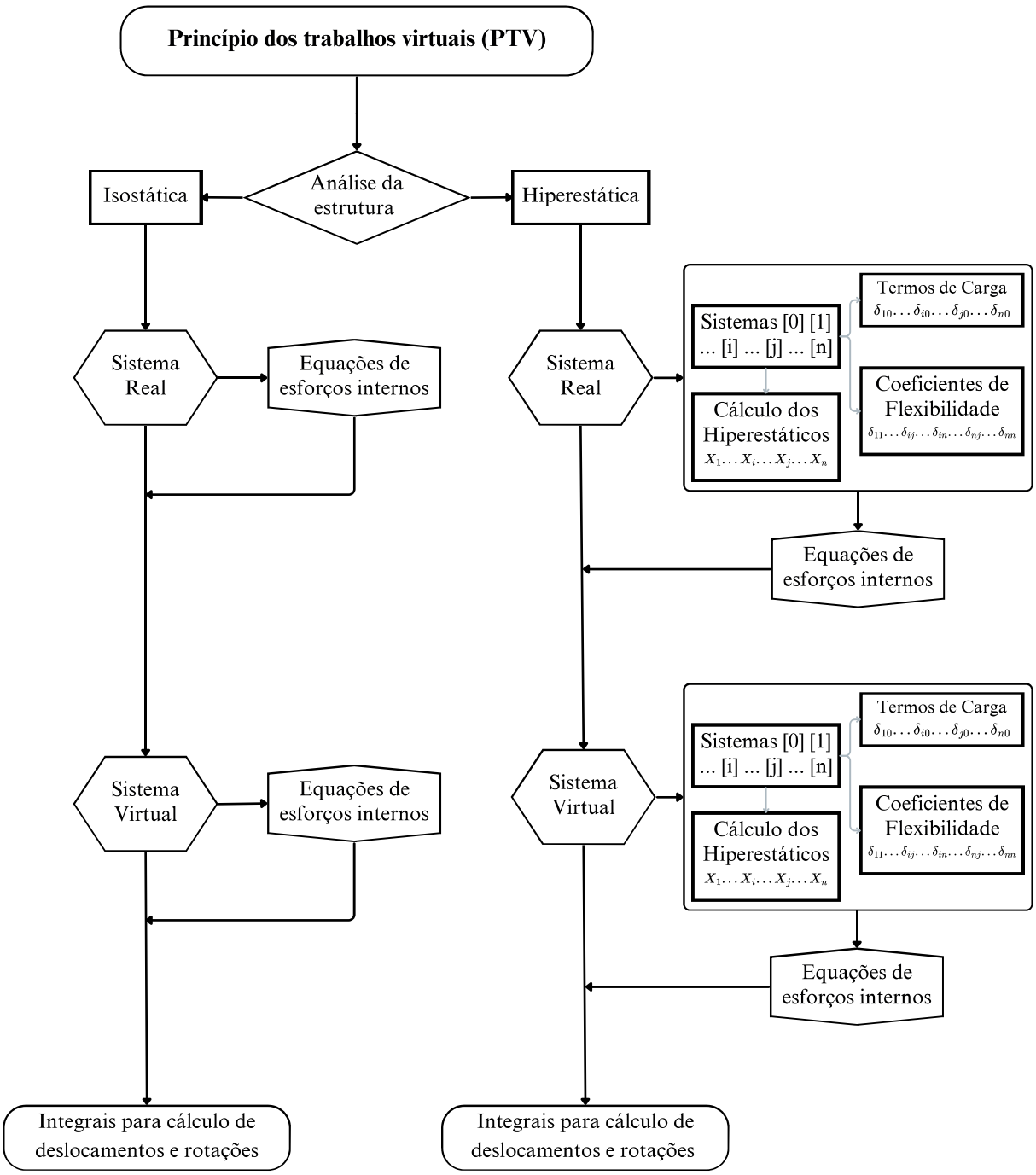


Figura 1.1 – Fluxograma de resolução contendo as nomenclaturas utilizadas no PTV deste livro (Soares et al., 2024).

A perspectiva isométrica é utilizada inicialmente na apresentação dos problemas e, pontualmente, em tópicos específicos, com o objetivo de oferecer uma visão mais espacial das situações analisadas. No entanto, a maior parte das figuras ilustrativas desta obra faz uso da vista superior, muito familiar aos engenheiros em virtude das tradicionais plantas baixas. Sendo assim, é importante destacar a representação nesta vista superior dos sentidos dos esforços

solicitantes nas grelhas. Para as cargas concentradas, adota-se a notação ⊗ para indicar ações de cima para baixo (de fora para dentro), e ◉ para aquelas de baixo para cima (de dentro para fora), conforme ilustrado na Figura 1.2.

Já os momentos são representados por vetores com setas duplas (↟, ↡, ↠, ↞), seguindo a conhecida "regra da mão direita". Segundo Martha (2022), "o eixo de rotação corresponde ao polegar e o sentido do momento segue a orientação dos dedos". O autor acrescenta ainda que "cada seta dupla tem a direção do eixo em torno do qual se dá a rotação", também ilustrada na Figura 1.2.

As convenções positivas para o cálculo das reações de apoio são expressas nesta mesma vista superior pelos símbolos ↟, ↡, ↠, ↞, ◉, ⊗, como por exemplo, $\boldsymbol{\Sigma F_Z}^{\odot^+}$, $\boldsymbol{\Sigma M_Y}^{\downarrow^+}$, ou $\boldsymbol{\Sigma M_X}^{\leftarrow^+}$.

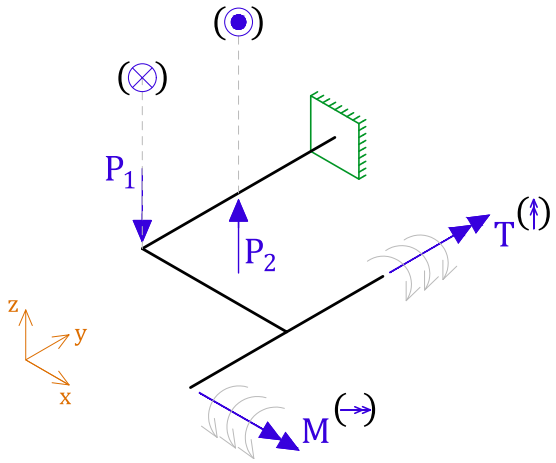


Figura 1.2 – Representação na perspectiva isométrica dos esforços nas grelhas em vista superior (entre parênteses).

Os momentos fletor e torsor, representados ao longo desta publicação pelas letras $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{T}$ (Figura 1.2) no Sistema Real, e $\boldsymbol{M'}$ e $\boldsymbol{T'}$ no Sistema Virtual, adotam convenções de sentidos positivos conforme a Figura 1.3. O Apêndice A discute esta convenção – assim como outras diversas presentes na literatura – e apresenta soluções para a linha elástica de grelhas com eixo reto e com eixo curvo, variando segundo um arco de circunferência. Para o cálculo dos deslocamentos e rotações, a contribuição do esforço cortante será desconsiderada. O Apêndice B apresenta os valores dos graus de liberdade em todos os nós destacados nas grelhas propostas, com o objetivo de fornecer subsídios para a realização de exercícios pelos leitores.

As equações dos esforços internos são escritas em função da variável x no caso dos elementos com eixo reto (em coordenadas cartesianas), e da variável α para os arcos (em coordenadas polares). Todos os comprimentos indicados nas cotas das ilustrações estão em *metros*, enquanto os ângulos podem estar expressos em graus ou radianos, conforme o contexto. O domínio de cada função é definido pelos extremos indicados à direita das respectivas equações, e seu sentido é determinado com base na ordenação das letras nodais. Os esforços

são sempre considerados como atuantes na direção de entrada na seção S_n (com $n \geq 1$). Em outras palavras, a parte da estrutura destacada nas figuras – até o ponto de "corte" – fornece as forças e momentos a serem considerados nas equações M_{ij} e T_{ij}, onde i e j são letras atribuídas aos nós no início da questão. A Figura 1.4 ilustra as premissas discutidas neste parágrafo a partir de uma grelha genérica.

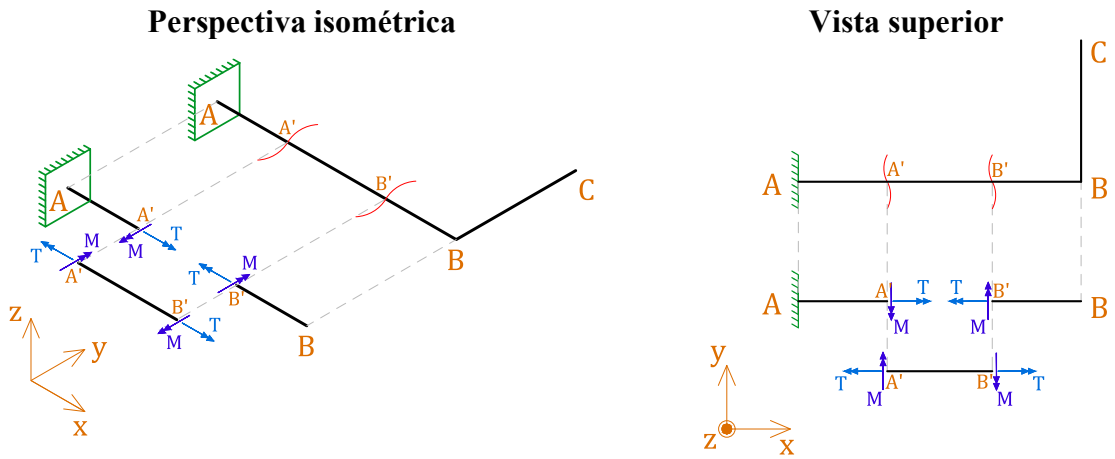


Figura 1.3 – Convenção adotada para os momentos de entrada nas seções transversais das grelhas.

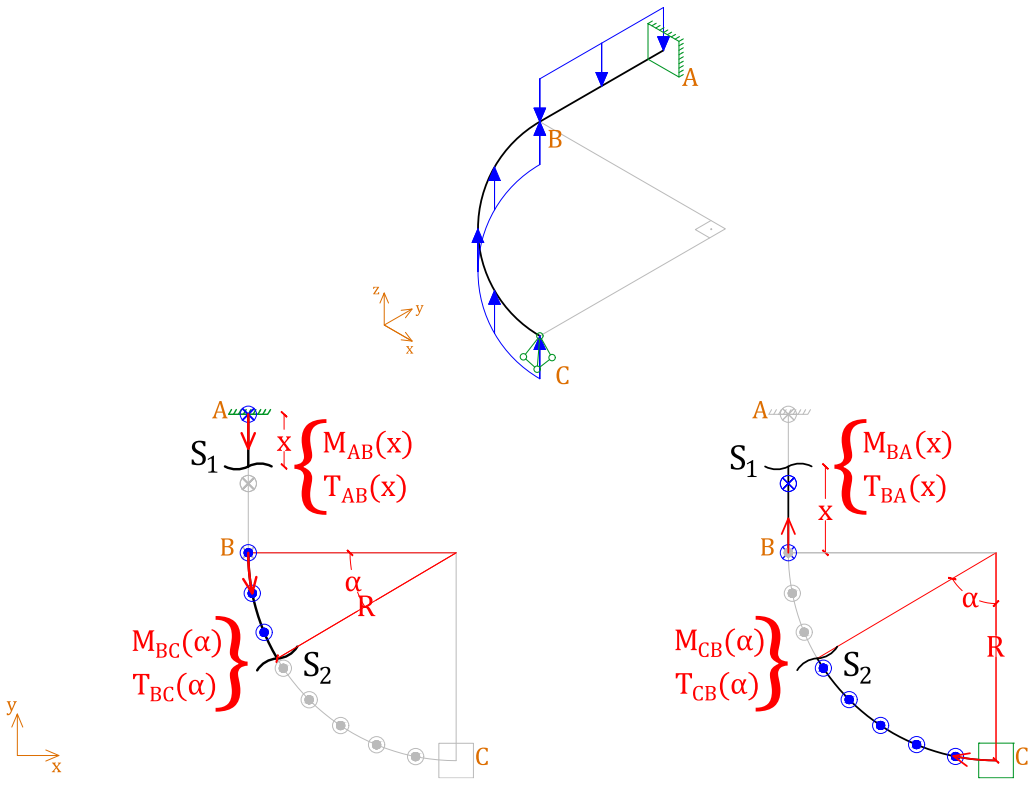


Figura 1.4 – Grelha genérica composta por barras retas e curvas com alguns exemplos de variáveis para equações de esforços internos.

2 EXERCÍCIO 2 (ISOSTÁTICO, ARCO, ENGASTADO)

O exercício em questão, exibido na Figura 2.1, será resolvido de duas formas diferentes: de B para A (sentido horário) e com valores literais, visando estabelecer uma base para os problemas seguintes; e de A para B (sentido anti-horário), utilizando valores numéricos. Serão considerados somente os esforços de flexão e torção.

Calcular o deslocamento vertical na seção transversal correspondente ao nó B (δ_{V_B}) da Figura 2.1.

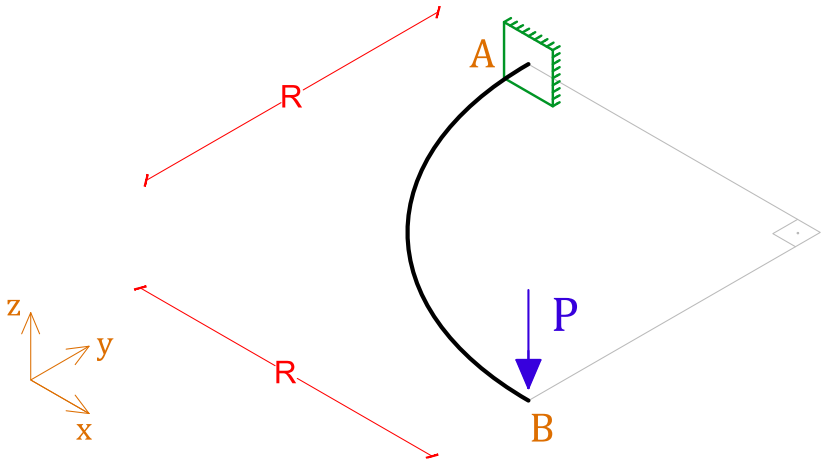


Figura 2.1 – Grelha do Exercício 2.

Dados do problema:

E_c ⟶ Módulo de elasticidade longitudinal

G_c ⟶ Módulo de elasticidade transversal

I_f ⟶ Momento de Inércia à Flexão

I_t ⟶ Momento de Inércia à Torção

A grelha da Figura 2.1 é isostática, haja vista que a estrutura possui três reações de apoio que podem ser calculadas com as três equações da estática disponíveis.

2.1 SISTEMA REAL

Conforme comentado, as equações de esforços para o problema proposto serão escritas inicialmente no sentido horário, ou de B para A, dispensando assim o cálculo das reações de apoio para esse propósito. A Figura 2.2 destaca a posição das excentricidades correspondentes aos momentos fletor (e_f) e torsor (e_t) em perspectiva isométrica e vista superior. Essas distâncias são calculadas conforme (2.1).

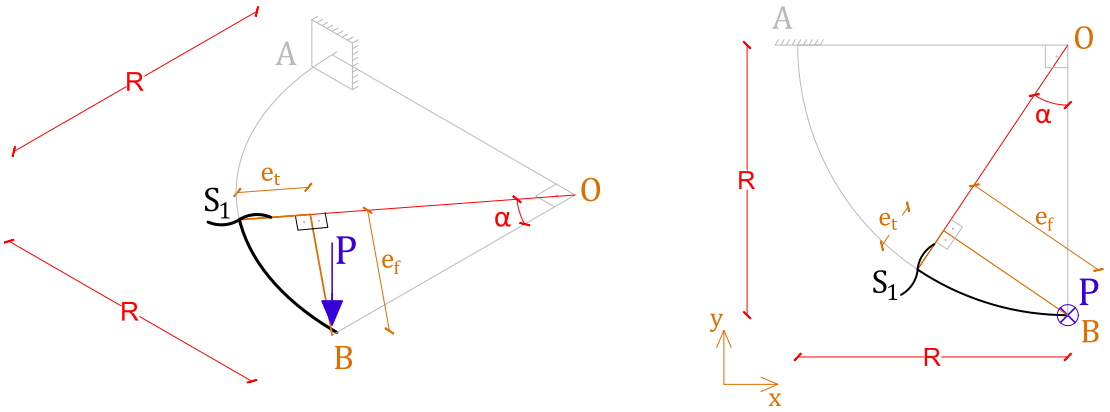


Figura 2.2 – Posição das excentricidades correspondentes ao momento fletor (e_f) e torsor (e_t) em perspectiva isométrica e vista superior.

$$e_f(\alpha) = R \cdot sen(\alpha)$$
$$e_t(\alpha) = R - R \cdot cos(\alpha) \tag{2.1}$$

As equações de momento fletor e torsor estão definidas em (2.2).

$$M_{BA}(\alpha) = -\mathrm{P} \cdot e_f(\alpha) = -P \cdot R \cdot sen(\alpha)$$

$$T_{BA}(\alpha) = -P \cdot e_t(\alpha) = -P \cdot R \cdot [1 - \cos(\alpha)] \qquad \mathbf{S_1} \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \tag{2.2}$$

2.2 SISTEMA VIRTUAL (FIGURA 2.3)

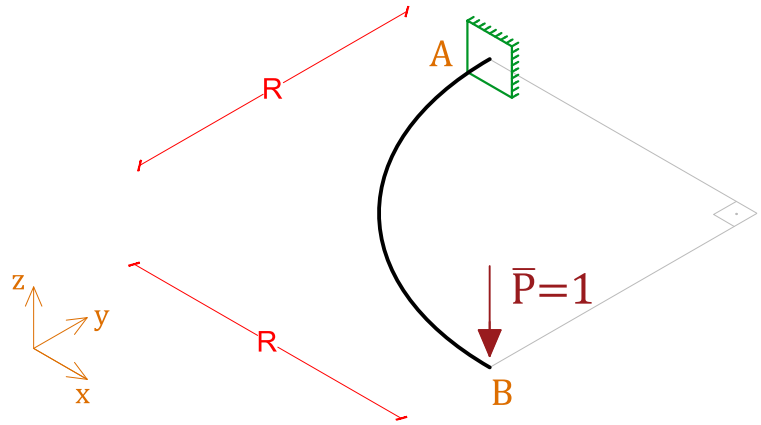


Figura 2.3 – Sistema Virtual do Exercício 2.

Considerando que as seções e distâncias são as mesmas exibidas na Figura 2.2 e detalhadas no tópico 2.1, as equações de esforços do Sistema Virtual estão resumidas em (2.3).

$$M'_{BA}(\alpha) = -1 \cdot e_f(\alpha) = -1 \cdot R \cdot sen(\alpha)$$

$$T'_{BA}(\alpha) = -1 \cdot e_t(\alpha) = -1 \cdot R \cdot [1 - \cos(\alpha)]$$

$$\mathbf{S_1} \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \tag{2.3}$$

2.3 CÁLCULO DE DESLOCAMENTO E/OU ROTAÇÃO

$$\delta_{V_B} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{BA}(\alpha) \cdot M'_{BA}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot R \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T_{BA}(\alpha) \cdot T'_{BA}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot R \cdot d\alpha$$

$$= \frac{\boldsymbol{P \cdot R^3 \cdot \pi}}{\boldsymbol{4 \cdot E_c \cdot I_f}} + \frac{\boldsymbol{P \cdot R^3 \cdot (3 \cdot \pi - 8)}}{\boldsymbol{4 \cdot G_c \cdot I_t}} \tag{2.4}$$

2.4 SISTEMA REAL

Para a resolução numérica, considera-se os dados descritos na Figura 2.4.

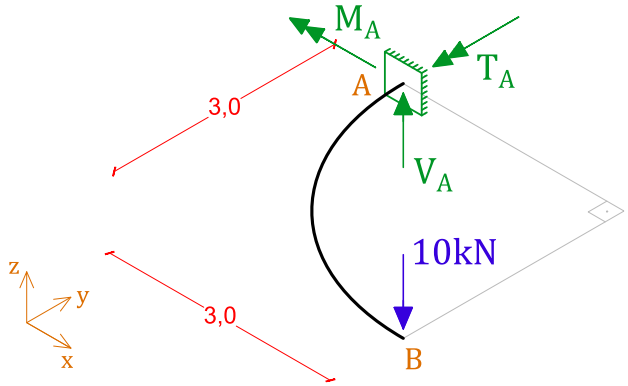


Figura 2.4 – Sistema Real do Exercício 2.

Dados do problema:

$E_c = 20\ GPa$ (Módulo de elasticidade longitudinal)

$G_c = 8\ GPa$ (Módulo de elasticidade transversal)

$I_f = 7{,}2 \cdot 10^{-3}\ m^4$ (Momento de inércia à flexão)

$I_t = 7{,}5 \cdot 10^{-3}\ m^4$ (Momento de inércia à torção)

Cálculo das reações de apoio

$$\boldsymbol{\Sigma F_Z}^{\odot^+} = \mathbf{0}$$

$$V_A - 10 = 0 \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{Y_A}}^{\downarrow +} = \mathbf{0}$$
$$T_A - 10 \cdot 3 = 0 \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{X_A}}^{\leftarrow +} = \mathbf{0}$$
$$M_A - 10 \cdot 3 = 0 \tag{2.7}$$

Reações de Apoio		
$V_A = 10\ kN$	$M_A = 30\ kN \cdot m$	$T_A = 30\ kN \cdot m$

Tabela 2.1 – Resumo das reações de apoio do Sistema Real.

A seção para determinação das equações de esforços internos está ilustrada na Figura 2.5, juntamente com as excentricidades para cálculo dos momentos fletor (e_f) e torsor (e_t) da reação V_A, calculadas conforme (2.1).

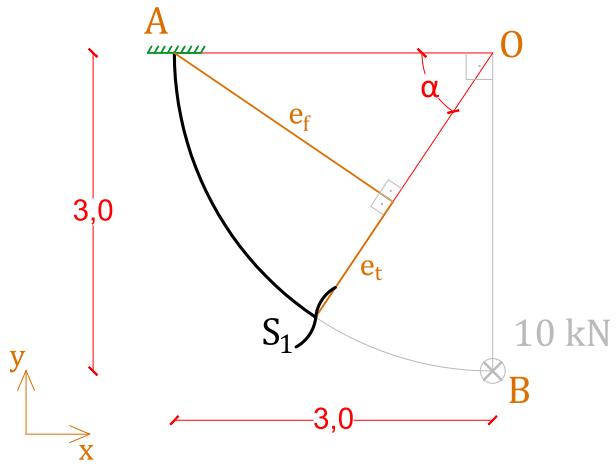


Figura 2.5 – Determinação da seção para as equações de momento fletor e torsor.

Para cálculo dos esforços internos é necessário destacar a decomposição dos vetores representativos das reações de momento (M_A e T_A) para a seção genérica conforme demonstrado na Figura 2.6.

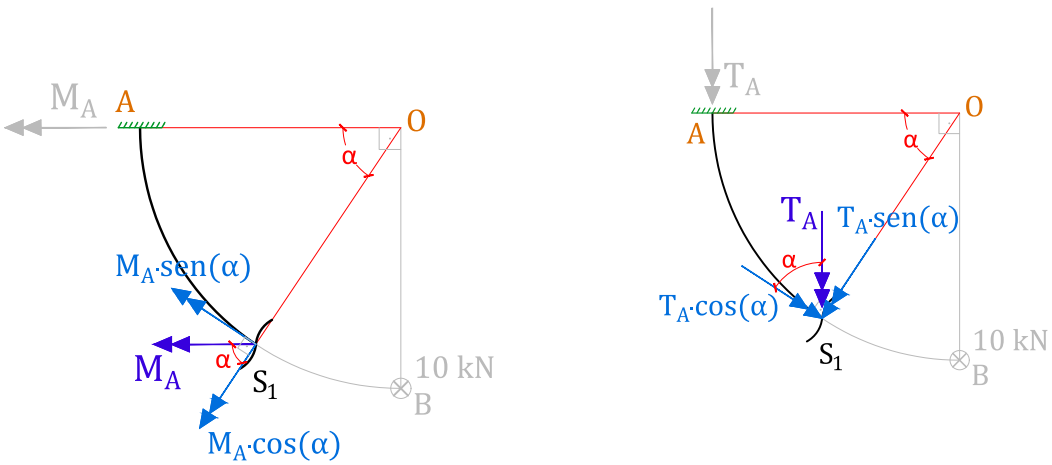


Figura 2.6 – Decomposição dos momentos das reações de apoio (M_A e T_A).

Os esforços internos estão apresentados em (2.8), escritos dessa vez no sentido anti-horário, de *A* para *B*.

$$M_{AB}(\alpha) = \mathrm{V}_A \cdot e_f(\alpha) - M_A \cdot \cos(\alpha) - T_A \cdot sen(\alpha)$$

$$T_{AB}(\alpha) = -\mathrm{V}_A \cdot e_t(\alpha) + M_A \cdot \mathrm{sen}(\alpha) - T_A \cdot cos(\alpha)$$

$$\mathbf{S_1} \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \tag{2.8}$$

2.5 SISTEMA VIRTUAL (FIGURA 2.7)

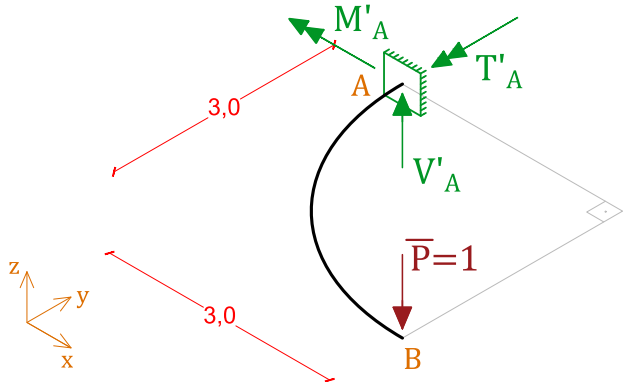


Figura 2.7 – Sistema Virtual do Exercício 2

Cálculo das reações de apoio

$$\boldsymbol{\Sigma F_Z}^{\odot^+} = \mathbf{0}$$
$$V_A - 1 = 0 \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{Y_A}}^{\downarrow^+} = \mathbf{0}$$
$$T_A - 1 \cdot 3 = 0 \tag{2.10}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{X_A}}^{\leftarrow^+} = \mathbf{0}$$
$$M_A - 1 \cdot 3 = 0 \tag{2.11}$$

Reações de Apoio		
$V_A = 1\ kN$	$M_A = 3\ kN \cdot m$	$T_A = 3\ kN \cdot m$

Tabela 2.2 – Resumo das reações de apoio do Sistema Virtual.

A seção transversal utilizada para determinação das equações de esforços precisa necessariamente ser a mesma utilizada no Sistema Real, já demonstrada na Figura 2.5. Os esforços internos estão exibidos em (2.12).

$$M'_{AB}(\alpha) = \mathrm{V}'_A \cdot e_f(\alpha) - M'_A \cdot \cos(\alpha) - T'_A \cdot sen(\alpha)$$

$$T'_{AB}(\alpha) = -\mathrm{V}'_A \cdot e_t(\alpha) + M'_A \cdot \mathrm{sen}(\alpha) - T'_A \cdot cos(\alpha)$$

$$\mathbf{S_1} \qquad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \qquad (2.12)$$

2.6 CÁLCULO DE DESLOCAMENTO E/OU ROTAÇÃO

O cálculo do deslocamento vertical δ_{V_B} está apresentado em (2.13), e o valor coincide com o calculado a partir da equação literal obtida em (2.4), substituindo os valores descritos no tópico 2.4.

$$\delta_{V_B} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{AB}(\alpha) \cdot M'_{AB}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot R \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T_{AB}(\alpha) \cdot T'_{AB}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot R \cdot d\alpha \qquad (2.13)$$

$$= \mathbf{3,07550 \cdot 10^{-3}\ m}$$

3 EXERCÍCIO 3 (ISOSTÁTICO, ARCO, ENGASTADO)

Semelhante ao Exercício 2, a grelha da Figura 3.1 será resolvida de forma genérica do nó *B* ao *A* (sentido horário), para ilustrar trechos e formulações relevantes para os problemas posteriores desta publicação. Serão utilizados valores literais para representar dados como raio, momentos de inércia, esforços e carregamento. Será também resolvida empregando valores numéricos e no sentido oposto (anti-horário), a partir do tópico 3.4. Somente os esforços de flexão e torção serão considerados.

Calcular o deslocamento vertical em *B* (δ_{V_B}) na grelha da Figura 3.1.

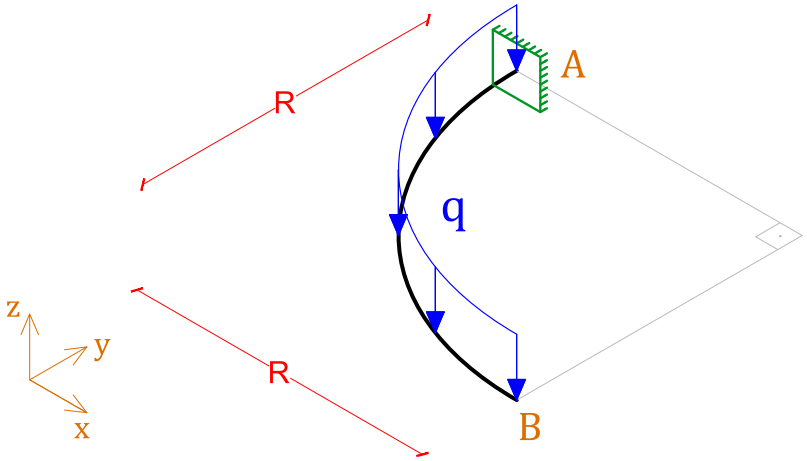


Figura 3.1 – Grelha do Exercício 3

Dados do problema:

$E_c \longrightarrow$ Módulo de elasticidade longitudinal

$G_c \longrightarrow$ Módulo de elasticidade transversal

$I_f \longrightarrow$ Momento de inércia à flexão

$I_t \longrightarrow$ Momento de inércia à torção

3.1 SISTEMA REAL

Para a determinação das equações de esforços do Sistema Real é necessário destacar que a resultante da carga uniformemente distribuída ao longo da curva *BA* é posicionada fora da estrutura, de acordo com as propriedades geométricas do arco de circunferência, descritas em Süssekind (1981), por exemplo. A Figura 3.2 mostra as excentricidades correspondentes aos momentos fletor ($e_f{}'$) e torsor ($e_t{}'$) a partir da resultante da carga distribuída posicionada no extremo do segmento *OG*, calculados conforme (3.1).

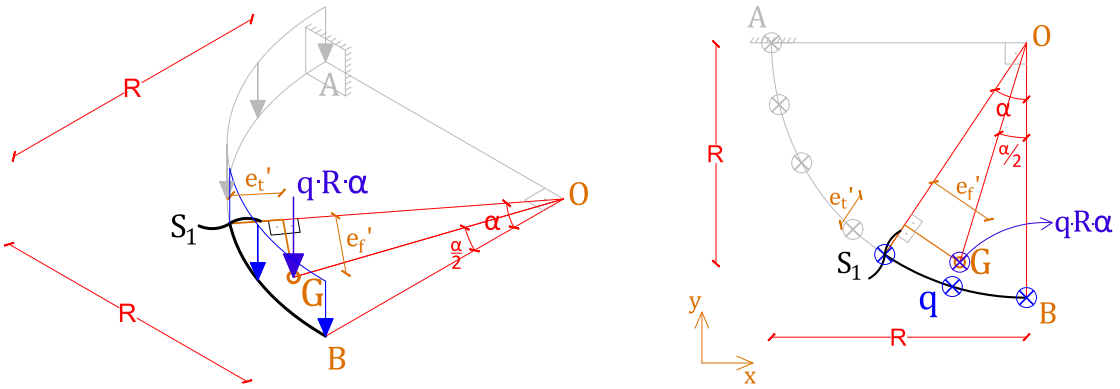


Figura 3.2 –Excentricidades do momento fletor ($e_f{}'$) e torsor ($e_t{}'$) para a resultante da carga distribuída em perspectiva isométrica e vista superior.

$$OG(\alpha) = \frac{2 \cdot R \cdot sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\alpha}$$
$$e_f{}'(\alpha) = OG(\alpha) \cdot sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{3.1}$$
$$e_t{}'(\alpha) = R - OG(\alpha) \cdot cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Os esforços internos estão resumidos em (3.2).

$$M_{BA}(\alpha) = -\mathrm{q} \cdot \mathrm{R} \cdot \alpha \cdot e_f{}'(\alpha) = -2 \cdot q \cdot R^2 \cdot sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

$$T_{BA}(\alpha) = -\mathrm{q} \cdot \mathrm{R} \cdot \alpha \cdot e_t'(\alpha) \qquad \mathbf{S_1} \qquad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \tag{3.2}$$
$$= -q \cdot R \cdot \alpha \cdot \left[R - \frac{2 \cdot R \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\alpha}\right]$$

3.2 SISTEMA VIRTUAL

O Sistema Virtual para o problema proposto é idêntico ao apresentado no tópico 2.2 (Figura 2.3), e as equações estão resumidas em (2.12), restando aqui apenas a apresentação da integral de resolução do deslocamento vertical solicitado (δ_{V_B}), demonstrado em (3.3).

3.3 CÁLCULO DE DESLOCAMENTO E/OU ROTAÇÃO

$$\delta_{V_B} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{BA}(\alpha) \cdot M'_{BA}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot R \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T_{BA}(\alpha) \cdot T'_{BA}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot R \cdot d\alpha$$
$$= \frac{\boldsymbol{q \cdot R^4}}{\boldsymbol{2 \cdot E_c \cdot I_f}} + \frac{\boldsymbol{q \cdot R^4 \cdot (\pi - 2)^2}}{\boldsymbol{8 \cdot G_c \cdot I_t}} \tag{3.3}$$

3.4 SISTEMA REAL

A resolução com dados numéricos será feita a partir do apresentado na Figura 3.3.

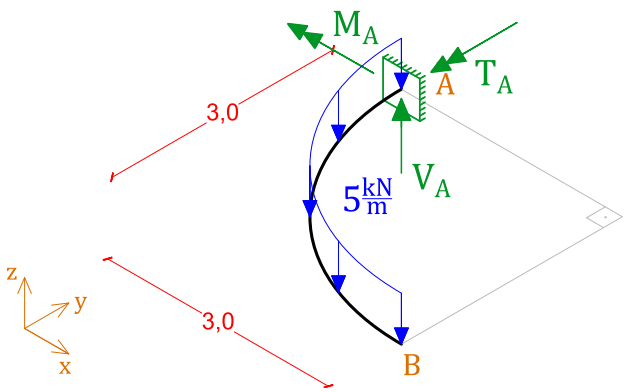


Figura 3.3 – Sistema Real do Exercício 3.

Dados do problema:

$E_c = 20\ GPa$ (Módulo de elasticidade longitudinal)

$G_c = 8\ GPa$ (Módulo de elasticidade transversal)

$I_f = 7{,}2 \cdot 10^{-3}\ m^4$ (Momento de inércia à flexão)

$I_t = 7{,}5 \cdot 10^{-3}\ m^4$ (Momento de inércia à torção)

As reações de apoio são calculadas de acordo com as equações da estática disponíveis e levando em consideração o segmento *OG* e as excentricidades apresentados em (3.1).

Cálculo das reações de apoio

$$\boldsymbol{\Sigma F_Z}^{\odot^+} = \mathbf{0}$$
$$V_A - 5 \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{2} = 0 \tag{3.4}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{Y_A}}^{\downarrow^+} = \mathbf{0}$$
$$T_A - 5 \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left[3 - OG\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi/2}{2}\right)\right] = 0 \tag{3.5}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{X_A}}^{\leftarrow^+} = \mathbf{0}$$
$$M_A - 5 \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot OG\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi/2}{2}\right) = 0 \tag{3.6}$$

Reações de Apoio		
$V_A = 7{,}5\pi\ kN$	$M_A = 45\ kN \cdot m$	$T_A = (22{,}5\pi - 45)\ kN \cdot m$

Tabela 3.1 – Resumo das reações de apoio do Sistema Real.

Para a determinação das equações de esforços internos será utilizada a seção S_1 no sentido de A para B (anti-horário). As parcelas para as equações de momento fletor e torsor deste Sistema Real incluem a contribuição da reação V_A (Figura 3.4a), do carregamento distribuído (Figura 3.4b), da reação M_A (Figura 3.4c), e da reação T_A (Figura 3.4d).

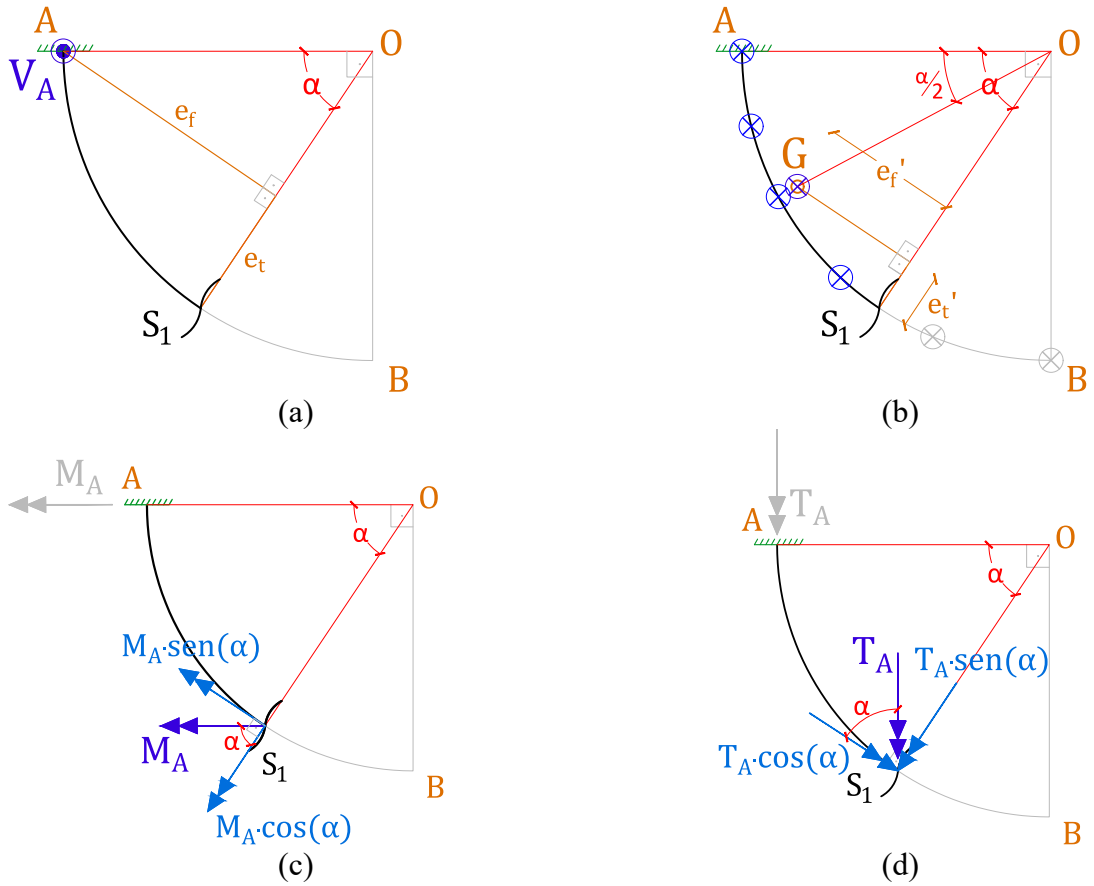


Figura 3.4 – Parcelas para as equações do Sistema Real.

As equações estão dispostas em (3.7).

$$M_{AB}(\alpha) = V_A \cdot e_f(\alpha) - 5 \cdot 3 \cdot \alpha \cdot e_f'(\alpha) - M_A \cdot \cos(\alpha) - T_A \cdot \operatorname{sen}(\alpha)$$

$$T_{AB}(\alpha) = -V_A \cdot e_t(\alpha) + 5 \cdot 3 \cdot \alpha \cdot e_t'(\alpha) + M_A \cdot \operatorname{sen}(\alpha) - T_A \cdot \cos(\alpha) \qquad \mathbf{S_1} \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \qquad (3.7)$$

3.5 SISTEMA VIRTUAL

O Sistema Virtual para o problema aqui proposto é o mesmo descrito na Figura 2.7 e detalhado no tópico 2.5.

3.6 CÁLCULO DE DESLOCAMENTO E/OU ROTAÇÃO

Sendo assim, reunindo as equações de esforços dispostas em (2.12) e (3.7), tem-se conforme (3.8). O valor numérico pode ser obtido também substituindo os dados expostos no tópico 3.3, equação (3.3).

$$\delta_{V_B} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{AB}(\alpha) \cdot M'_{AB}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot R \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T_{AB}(\alpha) \cdot T'_{AB}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot R \cdot d\alpha \qquad (3.8)$$

$$= \mathbf{2,50585 \cdot 10^{-3}\ m}$$

4 EXERCÍCIO 4 (ISOSTÁTICO, ARCO, ENGASTADO)

Determinar o deslocamento vertical (δ_{V_A}) e as rotações associadas à torção (θ_{t_A}) e à flexão (θ_{f_A}) em A, na grelha isostática da Figura 4.1. Considerar somente os esforços de flexão e torção.

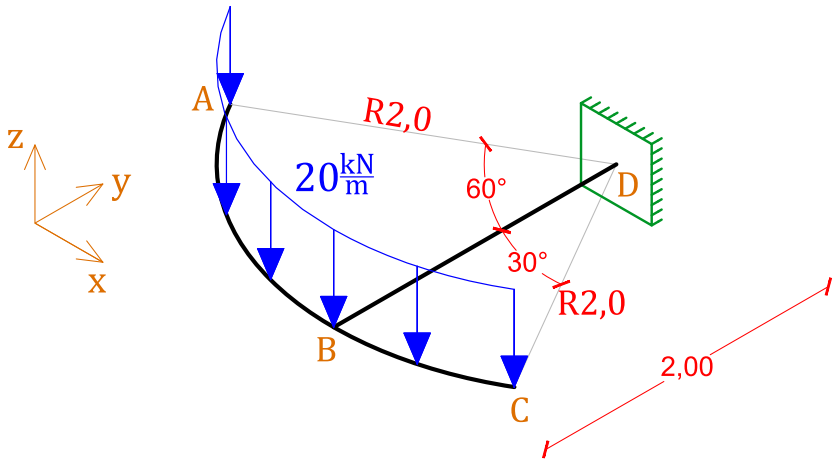


Figura 4.1 – Grelha do Exercício 4.

Dados do problema:

$E_c = 20\ GPa$ (Módulo de elasticidade longitudinal)

$G_c = 8\ GPa$ (Módulo de elasticidade transversal)

$I_f = 7 \cdot 10^{-3}\ m^4$ (Momento de inércia à flexão)

$I_t = 7{,}25 \cdot 10^{-3}\ m^4$ (Momento de inércia à torção)

4.1 SISTEMA REAL

Para o Sistema Real, serão determinadas as equações dos esforços internos (flexão e torção). Primeiramente, calculam-se as resultantes das cargas distribuídas ao longo dos arcos de circunferência (P_{R_1} e P_{R_2}), conforme (4.1), localizadas de acordo com a Figura 4.2.

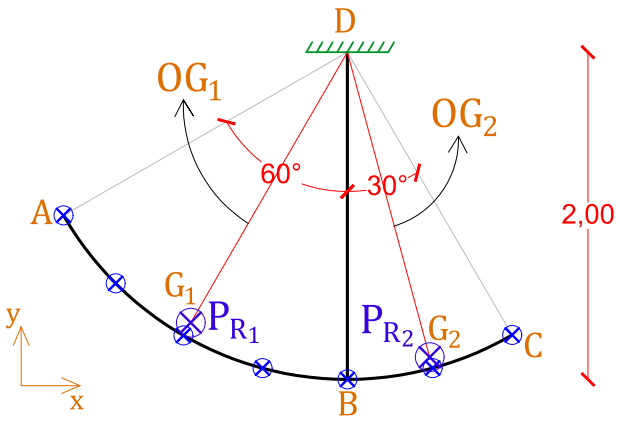


Figura 4.2 – Detalhe da posição das resultantes P_{R_1} e P_{R_2} em vista superior

Determinação das resultantes dos carregamentos distribuídos nos arcos

$$OG(\alpha) = \frac{2 \cdot R \cdot sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\alpha}$$

$$OG_1 = OG\left(\frac{\pi}{3}\right) \qquad OG_2 = OG\left(\frac{\pi}{6}\right) \tag{4.1}$$

$$P_{R_1} = 20 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 2 = 41{,}888\ kN \qquad P_{R_2} = 20 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot 2 = 20{,}944\ kN$$

As equações do Sistema Real para a grelha da Figura 4.1 foram determinadas conforme a divisão de seções apresentadas na Figura 4.3.

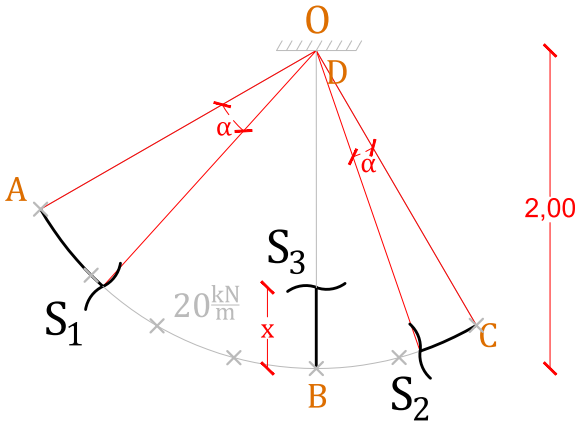


Figura 4.3 – Determinação das seções para as equações de momentos fletor e torsor.

As equações de momentos fletor e torsor referentes às seções 1 (*AB*) e 2 (*CB*) consideram apenas a contribuição do carregamento distribuído, conforme ilustrado nas Figuras 4.4a e 4.4b. As excentricidades associadas aos momentos fletor (e'_f) e torsor (e'_t), calculadas a partir da resultante do carregamento distribuído localizada no extremo do segmento *OG*, estão definidas em (4.2).

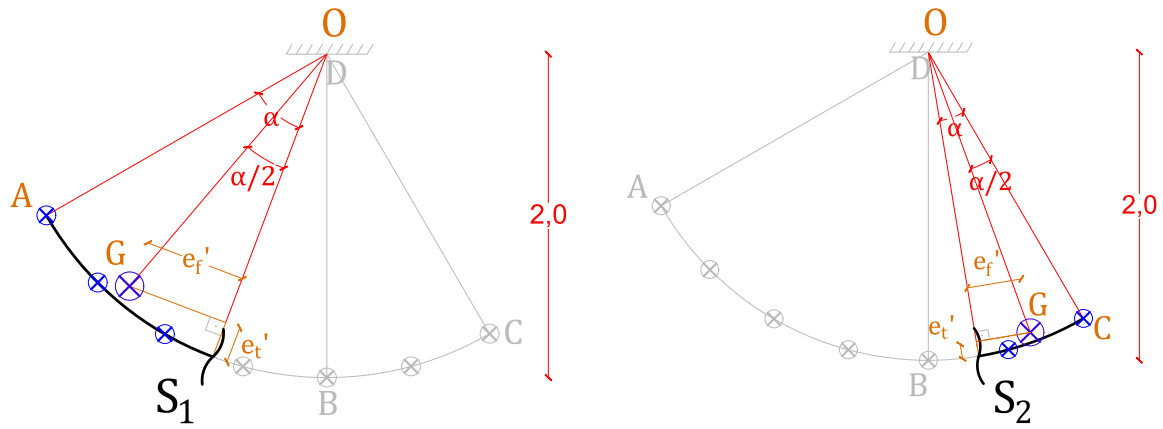


Figura 4.4 – Posição das excentricidades para a resultante do carregamento distribuído.

$$e_f'(\alpha) = OG(\alpha) \cdot sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) \qquad e_t'(\alpha) = 2 - OG(\alpha) \cdot cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{4.2}$$

As equações do Sistema Real para as seções 1 e 2 estão apresentadas em (4.3):

$$\begin{aligned} M_{AB}(\alpha) &= -20 \cdot 2 \cdot \alpha \cdot e_f'(\alpha) \\ T_{AB}(\alpha) &= 20 \cdot 2 \cdot \alpha \cdot e_t'(\alpha) \end{aligned} \qquad \mathbf{S_1} \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} M_{CB}(\alpha) &= -20 \cdot 2 \cdot \alpha \cdot e_f'(\alpha) \\ T_{CB}(\alpha) &= -20 \cdot 2 \cdot \alpha \cdot e_t'(\alpha) \end{aligned} \qquad \mathbf{S_2} \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{6} \tag{4.3}$$

Para determinar os esforços internos no trecho *BD* (S_3) é importante destacar que, além da contribuição das resultantes dos carregamentos distribuídos, há também a transferência dos esforços internos dos trechos *AB* e *CB*. Como a seção correspondente ao nó B das barras curvas é perpendicular à seção correspondente ao nó *B* do trecho reto *BD*, ocorre uma inversão: os esforços de flexão provenientes de *AB* e *CB* passam a atuar como torção em *BD*, e os de torção, como flexão. Este comportamento está ilustrado na Figura 4.5 e detalhado em (4.4).

Ressalta-se ainda uma atenção especial aos sinais das parcelas nas equações em (4.4), como, por exemplo, no caso de $T_{CB}\left(\frac{\pi}{6}\right)$, que tem originalmente valor negativo (ver Equação (4.3)), mas contribui com momento fletor positivo em *BD*, justificando assim o seu sinal negativo presente em $M_{BD}(x)$. Isso acontece com alguma frequência ao longo deste livro.

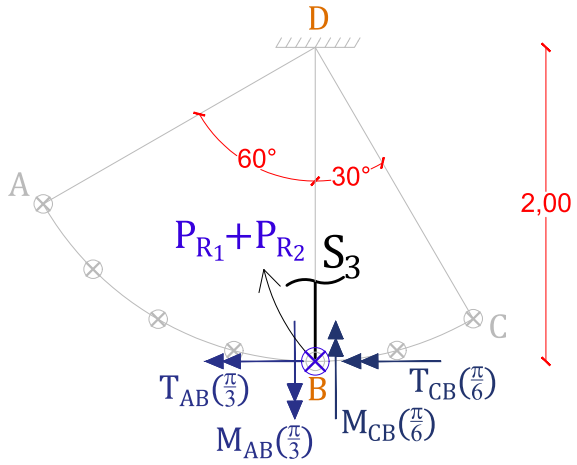


Figura 4.5 – Parcelas para as equações do Sistema Real: Trecho BD.

$$M_{BD}(x) = -(P_{R_1} + P_{R_2}) \cdot x + T_{AB}\left(\frac{\pi}{3}\right) - T_{CB}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$T_{BD}(x) = -M_{AB}\left(\frac{\pi}{3}\right) + M_{CB}\left(\frac{\pi}{6}\right) \qquad \mathbf{S_3} \quad 0 \le x \le 2 \qquad (4.4)$$

4.2 SISTEMA VIRTUAL PARA CÁLCULO DE δ_{V_A} (FIGURA 4.6)

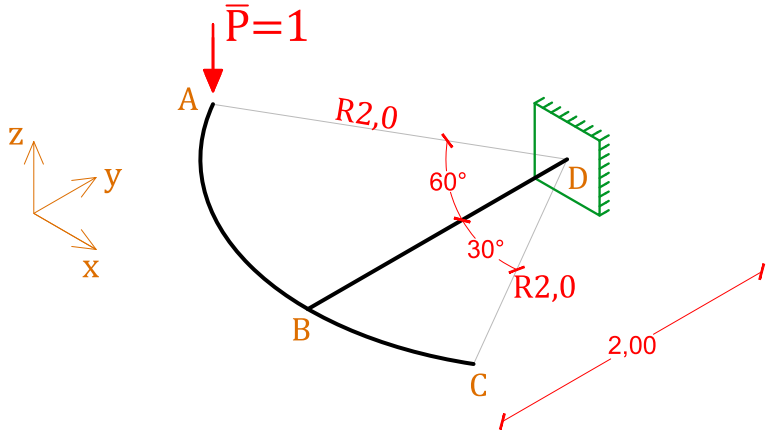
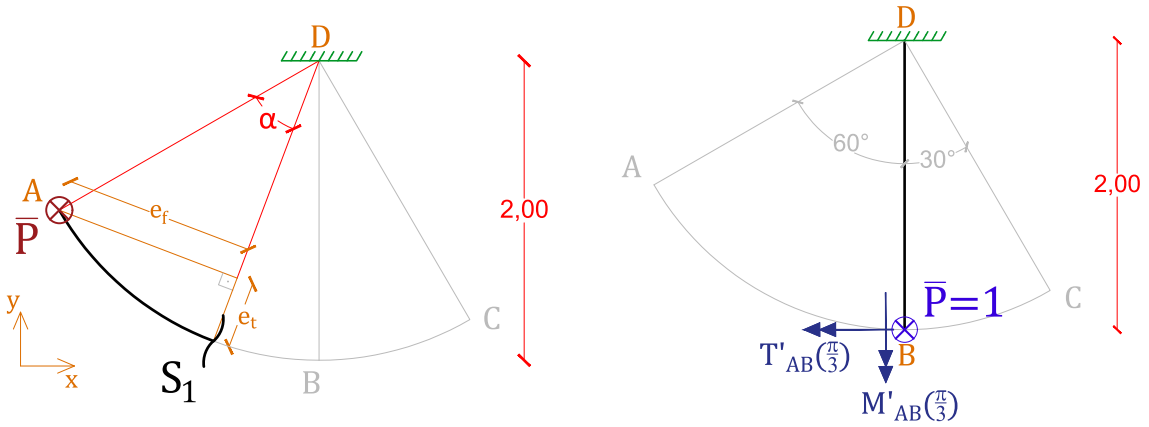


Figura 4.6 – Sistema Virtual para cálculo do deslocamento vertical em *A*.

As equações dos esforços internos referentes ao Sistema Virtual em questão foram definidas com base no esquema demonstrado na Figura 4.7. Para a seção 1 (*AB*), a única contribuição para os esforços internos advém da carga concentrada (Figura 4.7a), conforme as excentricidades associadas aos momentos fletor (e_f) e torsor (e_t), demonstradas em (4.5).

Para determinar os esforços internos no trecho *BD* (S_3) é relevante destacar a transferência das solicitações provenientes do trecho *AB*, análogo ao explicado para a Figura 4.5, além da manutenção da carga concentrada $\bar{P} = 1$, que é deslocada para o nó *B*, conforme detalhado na Figura 4.7b. Na seção 2 (*CB*) não há esforços internos. As equações estão resumidas em (4.6).



(a) (b)

Figura 4.7 – Parcelas para as equações do Sistema Virtual.

$$e_f(\alpha) = 2 \cdot sen(\alpha) \qquad e_t(\alpha) = 2 \cdot [1 - cos(\alpha)] \tag{4.5}$$

$$M'_{AB}(\alpha) = -1 \cdot e_f(\alpha)$$
$$T'_{AB}(\alpha) = 1 \cdot e_t(\alpha) \qquad \mathbf{S_1}\ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{3}$$

$$M'_{CB}(\alpha) = 0$$
$$T'_{CB}(\alpha) = 0 \qquad \mathbf{S_2}\ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{6} \tag{4.6}$$

$$M'_{BD}(x) = -1 \cdot x + T'_{AB}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$T'_{BD}(x) = -M'_{AB}\left(\frac{\pi}{3}\right) \qquad \mathbf{S_3}\ 0 \le x \le 2$$

4.3 SISTEMA VIRTUAL PARA CÁLCULO DE θ_{t_A} (FIGURA 4.8)

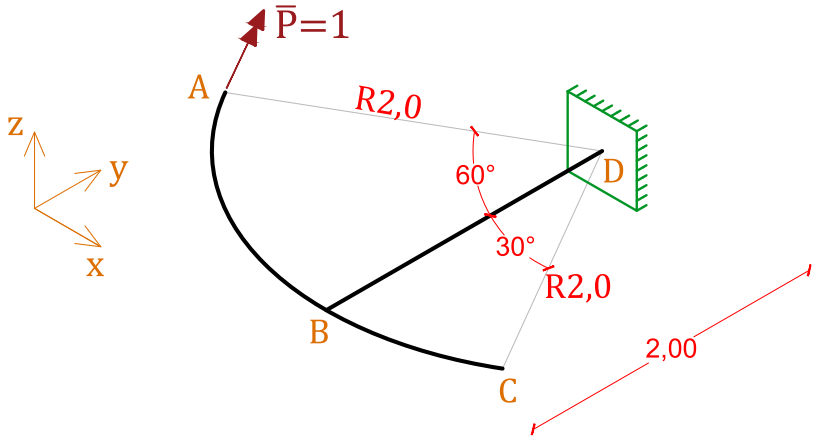
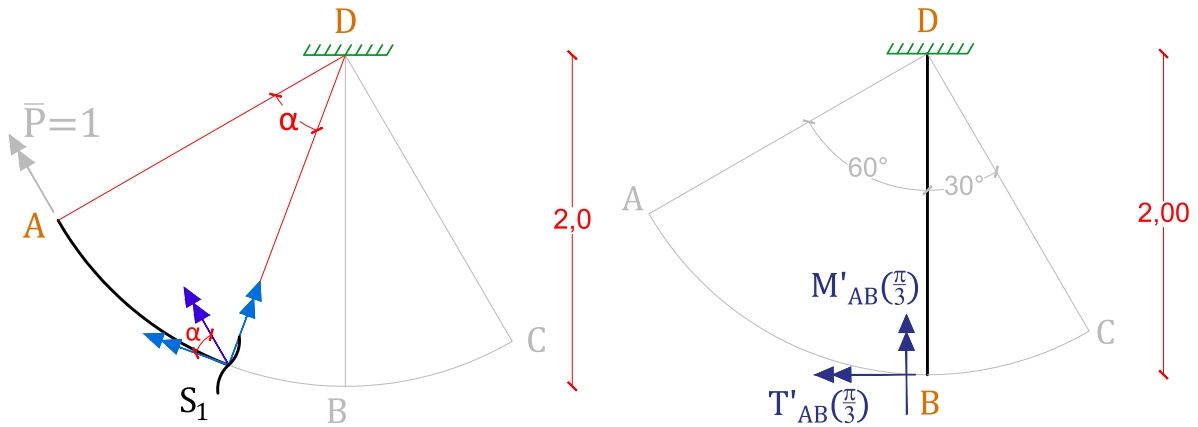


Figura 4.8 – Sistema Virtual para cálculo da rotação associada à torção em *A*.

As equações dos esforços internos referentes ao Sistema Virtual em questão foram definidas com base na Figura 4.9. Como ilustrado, o momento torsor aplicado em *A* se desmembra em esforços de momentos fletor e torsor ao longo da seção da barra *AB* (S_1), como visto na Figura 4.9a.



(a) (b)

Figura 4.9 – Parcelas para as equações do Sistema Virtual.

Em (4.7) estão resumidas as equações do Sistema Virtual.

$$M'_{AB}(\alpha) = sen(\alpha) \qquad \mathbf{S_1}$$
$$T'_{AB}(\alpha) = cos(\alpha) \qquad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$$

$$M'_{CB}(\alpha) = 0 \qquad \mathbf{S_2}$$
$$T'_{CB}(\alpha) = 0 \qquad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6} \qquad (4.7)$$

$$M'_{BD}(x) = T'_{AB}\left(\frac{\pi}{3}\right) \qquad \mathbf{S_3}$$
$$T'_{BD}(x) = -M'_{AB}\left(\frac{\pi}{3}\right) \qquad 0 \leq x \leq 2$$

4.4 SISTEMA VIRTUAL PARA CÁLCULO DE θ_{f_A} (FIGURA 4.10)

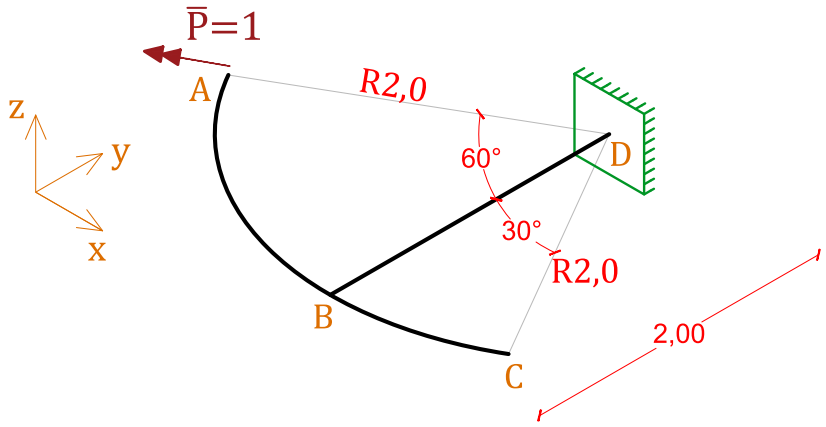
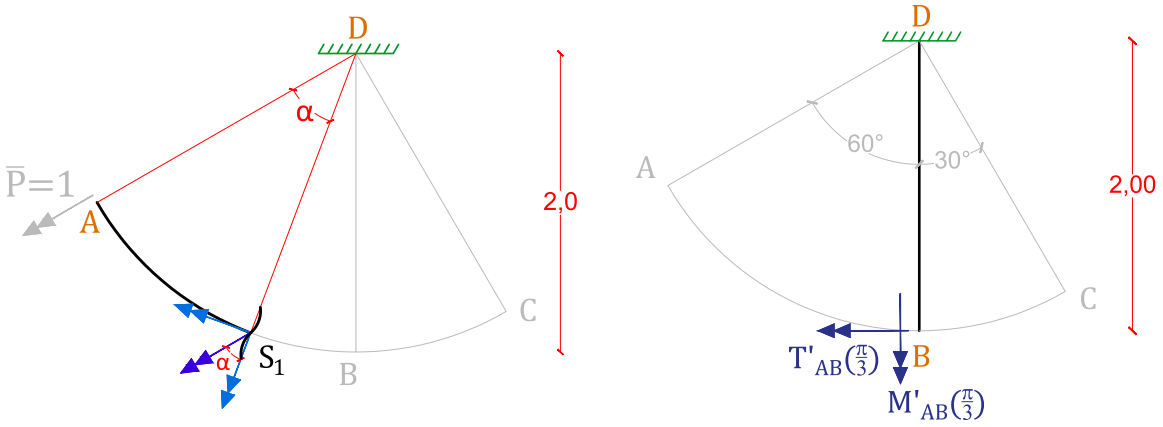


Figura 4.10 – Sistema Virtual para cálculo da rotação associada à flexão em *A*.

As equações dos esforços internos referentes ao Sistema Virtual em questão foram definidas com base na Figura 4.11. O momento fletor aplicado em *A* se desmembra em flexão e torção ao longo da barra *AB* (Figura 4.11a).



(a) (b)

Figura 4.11 – Parcelas para as equações do Sistema Virtual.

As equações desse Sistema Virtual estão apresentadas em (4.8):

$$M'_{AB}(\alpha) = -cos(\alpha) \qquad T'_{AB}(\alpha) = sen(\alpha) \qquad \textbf{S}_1: \ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{3}$$

$$M'_{CB}(\alpha) = 0 \qquad T'_{CB}(\alpha) = 0 \qquad \textbf{S}_2: \ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{6} \qquad (4.8)$$

$$M'_{BD}(x) = T'_{AB}\left(\frac{\pi}{3}\right) \qquad T'_{BD}(x) = -M'_{AB}\left(\frac{\pi}{3}\right) \qquad \textbf{S}_3: \ 0 \le x \le 2$$

4.5 CÁLCULO DE DESLOCAMENTO E/OU ROTAÇÃO

A integral para determinação do deslocamento vertical na seção correspondente ao nó A (δ_{V_A}) está apresentada em (4.9) utilizando as equações dispostas em (4.3), (4.4) e (4.6):

$$\begin{aligned}\delta_{V_A} = &\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{M_{AB}(\alpha) \cdot M'_{AB}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{T_{AB}(\alpha) \cdot T'_{AB}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{M_{CB}(\alpha) \cdot M'_{CB}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{T_{CB}(\alpha) \cdot T'_{CB}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{2} \frac{M_{BD}(x) \cdot M'_{BD}(x)}{E_c \cdot I_f} dx \\ &+ \int_0^{2} \frac{T_{BD}(x) \cdot T'_{BD}(x)}{G_c \cdot I_t} dx = \mathbf{2,42436\ m}\end{aligned} \tag{4.9}$$

A rotação associada à torção na seção correspondente ao nó A (θ_{t_A}) é calculada de acordo com (4.10), utilizando as formulações apresentadas em (4.3), (4.4) e (4.7):

$$\begin{aligned}\theta_{t_A} = &\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{M_{AB}(\alpha) \cdot M'_{AB}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{T_{AB}(\alpha) \cdot T'_{AB}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{M_{CB}(\alpha) \cdot M'_{CB}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{T_{CB}(\alpha) \cdot T'_{CB}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{2} \frac{M_{BD}(x) \cdot M'_{BD}(x)}{E_c \cdot I_f} dx \\ &+ \int_0^{2} \frac{T_{BD}(x) \cdot T'_{BD}(x)}{G_c \cdot I_t} dx = \mathbf{-1,26109 \cdot 10^{-3}\ rad}\end{aligned} \tag{4.10}$$

Para cálculo da rotação associada à flexão na seção correspondente ao nó A (θ_{f_A}) a integral é desenvolvida conforme (4.11), utilizando as equações explicitadas em (4.3), (4.4) e (4.8):

$$\theta_{f_A} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{M_{AB}(\alpha) \cdot M'_{AB}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{T_{AB}(\alpha) \cdot T'_{AB}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{M_{CB}(\alpha) \cdot M'_{CB}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{T_{CB}(\alpha) \cdot T'_{CB}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{2} \frac{M_{BD}(x) \cdot M'_{BD}(x)}{E_c \cdot I_f} dx + \int_0^{2} \frac{T_{BD}(x) \cdot T'_{BD}(x)}{G_c \cdot I_t} dx = \mathbf{1,71573 \cdot 10^{-4}\ rad} \quad (4.11)$$

5 EXERCÍCIO 5 (ISOSTÁTICO, ARCO, TRIAPOIADO)

Determinar o deslocamento vertical em B (δ_{V_B}) na grelha isostática da Figura 5.1. Considerar somente os esforços de flexão e torção.

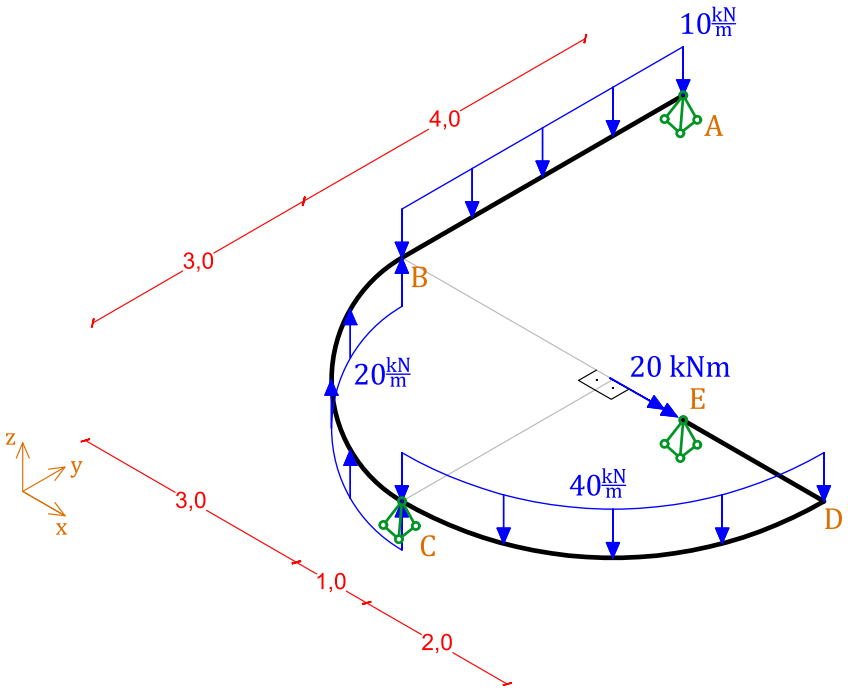


Figura 5.1 – Grelha do Exercício 5.

Dados do problema:

$E_c = 20\ GPa$ (Módulo de elasticidade longitudinal)

$G_c = 10\ GPa$ (Módulo de elasticidade transversal)

$I_f = 7{,}2 \cdot 10^{-3}\ m^4$ (Momento de inércia à flexão)

$I_t = 7{,}5 \cdot 10^{-3}\ m^4$ (Momento de inércia à torção)

5.1 SISTEMA REAL (FIGURA 5.2)

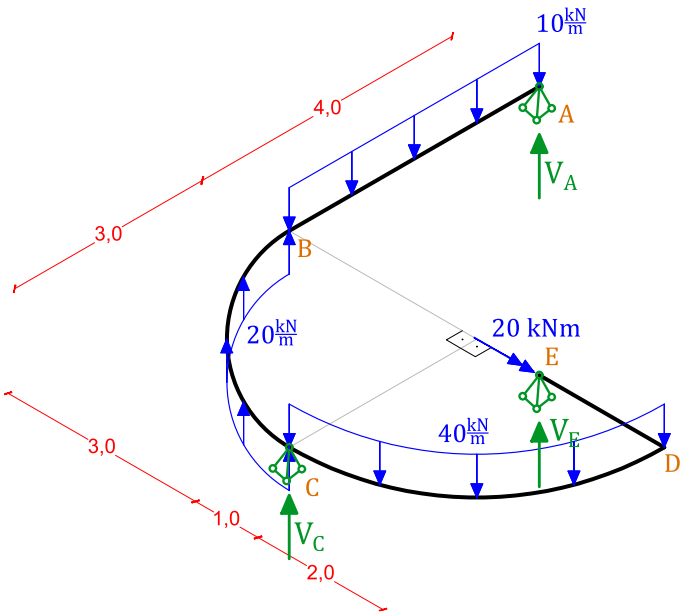


Figura 5.2 – Sistema Real do Exercício 5.

Para o Sistema Real serão calculadas as reações de apoio e esforços internos (Flexão e Torção). As resultantes das cargas distribuídas ao longo dos arcos de circunferência ficam localizadas conforme Figura 5.3.

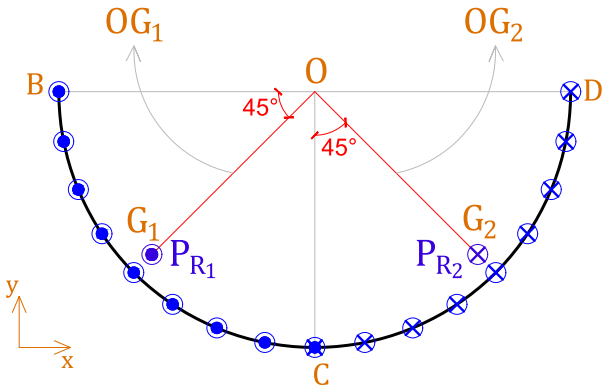


Figura 5.3 – Detalhe da posição das resultantes P_{R_1} e P_{R_2} em vista superior.

Determinação das resultantes dos carregamentos distribuídos nos arcos

$$OG(\alpha) = \frac{2 \cdot 3 \cdot sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\alpha}$$

$$OG_1 = OG_2 = OG\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad (5.1)$$

$$P_{R_1} = 20 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 3 = 94{,}248\ kN \qquad P_{R_2} = 40 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 3 = 188{,}496\ kN$$

Cálculo das reações de apoio

$$\boldsymbol{\Sigma F_Z}^{\odot^+} = \mathbf{0}$$
$$V_A + V_C + V_E + P_{R_1} - P_{R_2} - 10 \cdot 4 = 0 \tag{5.2}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{Y_A}}^{\downarrow^+} = \mathbf{0}$$
$$V_E \cdot 4 - P_{R_2} \cdot \left[OG_2 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3\right] + P_{R_1} \cdot \left[3 - OG_1 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] + V_C \cdot 3 = 0 \tag{5.3}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{X_C}}^{\twoheadrightarrow^+} = \mathbf{0}$$
$$20 + V_E \cdot 3 - P_{R_2} \cdot \left[3 - OG_2 \cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] + P_{R_1} \cdot \left[3 - OG_1 \cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - 10 \cdot 4 \cdot 5 + V_A \cdot 7 = 0 \tag{5.4}$$

Reações de Apoio		
$V_A = -61{,}079\ kN$	$V_C = -41{,}438\ kN$	$V_E = 236{,}764\ kN$

Tabela 5.1 – Resumo das reações de apoio do Sistema Real.

As equações do Sistema Real para a grelha da Figura 5.1 estão apresentadas em (5.5) e (5.6) com as respectivas seções na Figura 5.4.

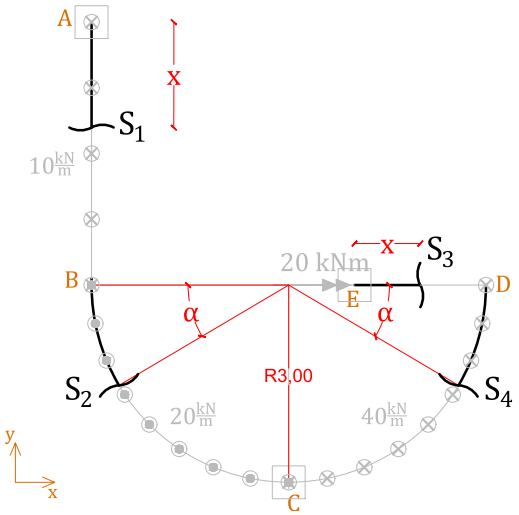


Figura 5.4 – Determinação das seções para as equações de momento fletor e torsor.

$$M_{AB}(x) = V_A \cdot x - 5 \cdot x^2$$

$$T_{AB}(x) = 0$$

$$\mathbf{S_1} \qquad 0 \leq x \leq 4 \tag{5.5}$$

Para a determinação de $M_{BC}(\alpha)$ e $T_{BC}(\alpha)$, além da carga distribuída ao longo do trecho e da carga concentrada – obtida a partir da reação em A e da resultante da carga distribuída em AB –, os momentos que entram constantes na seção em B se desmembram de acordo com a posição da seção transversal, como demonstrado para $M_{AB}(4)$ na seção S_2 da Figura 5.5. O mesmo acontece para M_{DC} e T_{DC} posteriormente.

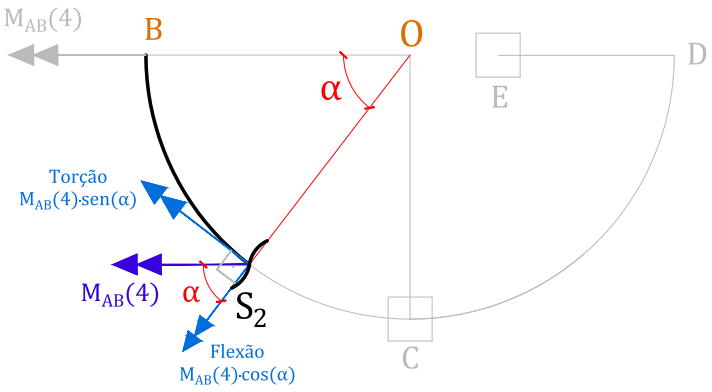


Figura 5.5 – Decomposição do vetor representativo $M_{AB}(4)$ na barra curva em vista superior.

$$M_{BC}(\alpha) = M_{AB}(4) \cdot \cos(\alpha) + (V_A - 10 \cdot 4) \cdot 3 \cdot sen(\alpha) + 20 \cdot 3 \cdot \alpha \cdot \left[OG(\alpha) \cdot sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

$$T_{BC}(\alpha) = (-V_A + 10 \cdot 4) \cdot 3 \cdot [1 - cos(\alpha)] - 20 \cdot 3 \cdot \alpha \cdot \left[3 - OG(\alpha) \cdot cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] - M_{AB}(4) \cdot \sin(\alpha)$$

S₂

$$0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

$$M_{ED}(x) = V_E \cdot x$$

$$T_{ED}(x) = -20$$

S₃

$$0 \le x \le 2$$

(5.6)

$$M_{DC}(\alpha) = -M_{ED}(2) \cdot sen(\alpha) + 20 \cdot \cos(\alpha) + V_E \cdot 3 \cdot sen(\alpha) - 40 \cdot 3 \cdot \alpha \cdot \left[OG(\alpha) \cdot sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

$$T_{DC}(\alpha) = M_{ED}(2) \cdot cos(\alpha) + 20 \cdot \text{sen}(\alpha) + V_E \cdot 3 \cdot [1 - cos(\alpha)] - 40 \cdot 3 \cdot \alpha \cdot \left[3 - OG(\alpha) \cdot cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

S₄

$$0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

5.2 SISTEMA VIRTUAL (FIGURA 5.6)

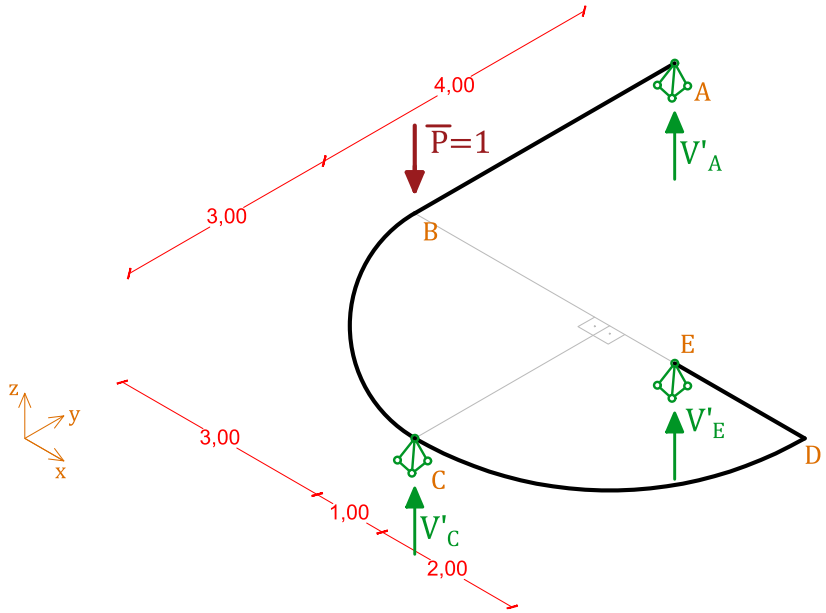


Figura 5.6 – Sistema Virtual do Exercício 5.

Cálculo das reações de apoio:

$$\boldsymbol{\Sigma F_Z}^{\odot+} = \mathbf{0}$$
$$V'_A + V'_C + V'_E - 1 = 0 \tag{5.7}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{Y_A}}^{\downarrow+} = \mathbf{0}$$
$$V'_E \cdot 4 + V'_C \cdot 3 = 0 \tag{5.8}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{X_C}}^{\twoheadrightarrow+} = \mathbf{0}$$
$$V'_E \cdot 3 + V'_A \cdot 7 - 1 \cdot 3 = 0 \tag{5.9}$$

Reações de Apoio		
$V'_A = 0{,}75$	$V'_C = 1$	$V'_E = -0{,}75$

Tabela 5.2 – Resumo das reações de apoio do Sistema Virtual.

Os esforços internos para o Sistema Virtual da Figura 5.6 constam em (5.10) conforme seções dispostas na Figura 5.4.

$$M'_{AB}(x) = V'_A \cdot x$$
$$T'_{AB}(x) = 0$$
$$\mathbf{S_1}$$
$$0 \le x \le 4 \tag{5.10}$$

$$M'_{BC}(\alpha) = M'_{AB}(4) \cdot \cos(\alpha) + (V'_A - 1) \cdot 3 \cdot sen(\alpha)$$
$$T'_{BC}(\alpha) = (-V'_A + 1) \cdot 3 \cdot [1 - cos(\alpha)] - M'_{AB}(4) \cdot \sin(\alpha)$$
S2 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

$$M'_{ED}(x) = V'_E \cdot x$$
$$T'_{ED}(x) = 0$$
S3 $0 \leq x \leq 2$

$$M'_{DC}(\alpha) = -M'_{ED}(2) \cdot sen(\alpha) + V'_E \cdot 3 \cdot sen(\alpha)$$
$$T'_{DC}(\alpha) = M'_{ED}(2) \cdot cos(\alpha) + V'_E \cdot 3 \cdot [1 - cos(\alpha)]$$
S4 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

5.3 Cálculo de Deslocamento e/ou Rotação

A integral para determinação do deslocamento vertical na seção correspondente ao nó *B* (δ_{V_B}) está apresentada em (5.11) utilizando as equações dispostas em (5.5), (5.6) e (5.10).

$$\begin{aligned}\delta_{V_B} = &\int_0^4 \frac{M_{AB}(x) \cdot M'_{AB}(x)}{E_c \cdot I_f} dx + \int_0^4 \frac{T_{AB}(x) \cdot T'_{AB}(x)}{G_c \cdot I_t} dx \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{BC}(\alpha) \cdot M'_{BC}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T_{BC}(\alpha) \cdot T'_{BC}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^2 \frac{M_{ED}(x) \cdot M'_{ED}(x)}{E_c \cdot I_f} dx \\ &+ \int_0^2 \frac{T_{ED}(x) \cdot T'_{ED}(x)}{G_c \cdot I_t} dx \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{DC}(\alpha) \cdot M'_{DC}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T_{DC}(\alpha) \cdot T'_{DC}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha = \mathbf{-1.25092 \cdot 10^{-1}\ m}\end{aligned} \tag{5.11}$$

6 EXERCÍCIO 6 (ISOSTÁTICO, BARRA INCLINADA, ARCO, TRIAPOIADO)

Calcular o deslocamento vertical no ponto B (δ_{V_B}) para a grelha da Figura 6.1. Considerar somente os esforços de flexão e torção.

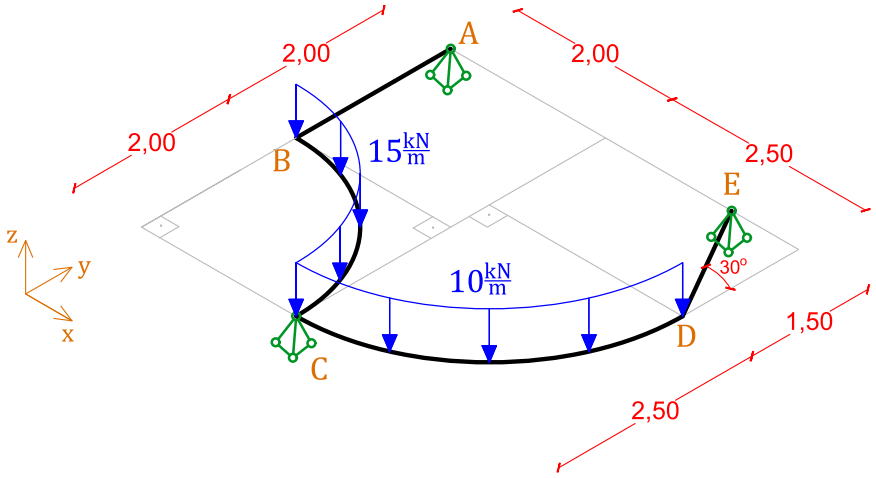


Figura 6.1 – Grelha do Exercício 6.

Dados do problema:

$E_c = 25\ GPa$ (Módulo de elasticidade longitudinal)

$G_c = 10\ GPa$ (Módulo de elasticidade transversal)

$I_f = 7{,}2 \cdot 10^{-3}\ m^4$ (Momento de inércia à flexão)

$I_t = 7{,}53 \cdot 10^{-3}\ m^4$ (Momento de inércia à torção)

6.1 SISTEMA REAL (FIGURA 6.2)

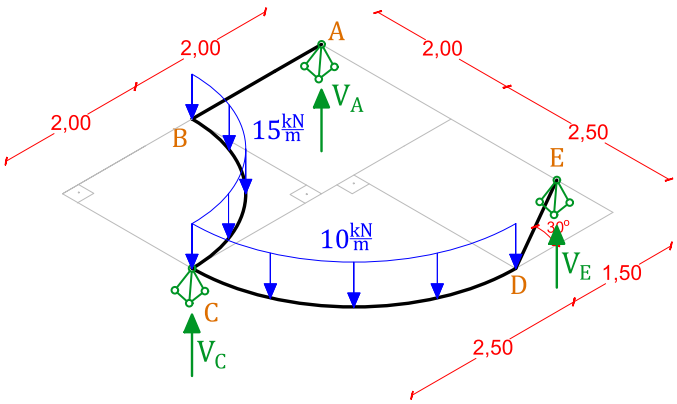


Figura 6.2 – Sistema Real do Exercício 6.

As reações de apoio serão calculadas a partir das equações de equilíbrio da estática, e a Figura 6.3 mostra a posição das resultantes para as cargas uniformemente distribuídas nos arcos *BC* e *CD*, determinadas em (6.1).

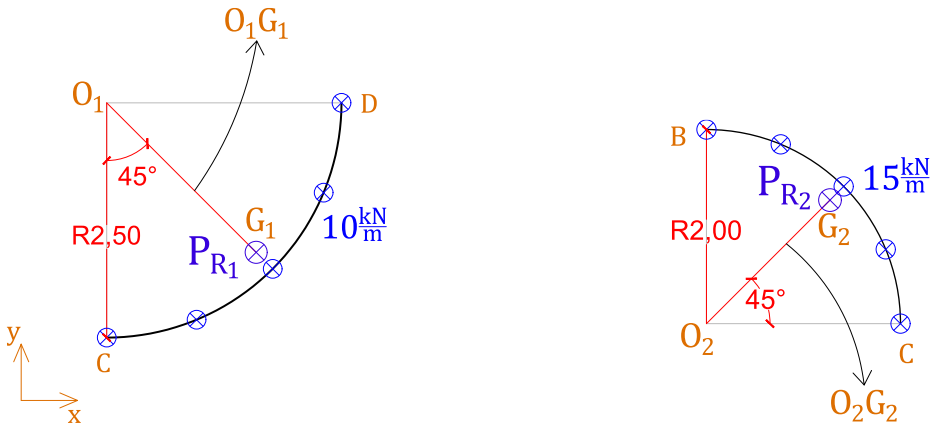


Figura 6.3 – Detalhe da posição das resultantes P_{R_1} e P_{R_2} em vista superior.

Determinação das resultantes dos carregamentos distribuídos nos arcos

$$OG(\alpha) = \frac{2 \cdot R \cdot sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\alpha}$$

$$O_1G_1 = \frac{2 \cdot 2{,}5 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{2}} \qquad O_2G_2 = \frac{2 \cdot 2 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{2}} \tag{6.1}$$

$$P_{R_1} = 10 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2{,}5 = 39{,}270\ kN \qquad P_{R_2} = 15 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 = 47{,}124\ kN$$

Cálculo das reações de apoio

$$\boldsymbol{\Sigma F_Z}^{\odot^+} = \mathbf{0}$$
$$V_A + V_C + V_E - P_{R_1} - P_{R_2} = 0 \tag{6.2}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{Y_A}}^{\downarrow^+} = \mathbf{0}$$
$$V_C \cdot 2 - P_{R_2} \cdot \left[O_2G_2 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - P_{R_1} \cdot \left[O_1G_1 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\right] + V_E \cdot \left[2 + 2{,}5 - 1{,}5 \cdot tg\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = 0 \tag{6.3}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{X_A}}^{\leftarrow^+} = \mathbf{0}$$
$$V_C \cdot 4 - P_{R_2} \cdot \left[2 - O_2G_2 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\right] - P_{R_1} \cdot \left[O_1G_1 \cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1{,}5\right] = 0 \tag{6.4}$$

Reações de Apoio		
$V_A = 2{,}98\ kN$	$V_C = 62{,}475\ kN$	$V_E = 20{,}938\ kN$

Tabela 6.1 – Resumo das reações de apoio do Sistema Real.

Para o problema em questão, as seções estão apresentadas na Figura 6.4, e as equações disponíveis em (6.5) e (6.6).

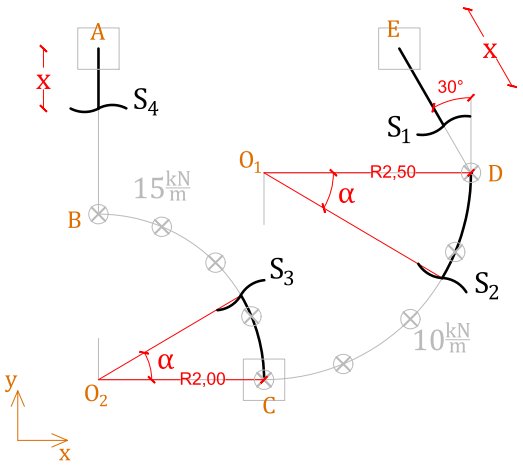


Figura 6.4 – Determinação das seções para as equações de momento fletor e torsor em vista superior.

$$M_{ED}(x) = V_E \cdot x$$

$$T_{ED}(x) = 0$$

$$\mathbf{S_1} \qquad 0 \leq x \leq 1{,}732 \qquad (6.5)$$

Para a determinação das equações de esforços em *DC* é necessário destacar o cálculo das componentes do momento $M_{ED}(1{,}732)$ cujo vetor representativo chega inclinado em relação à primeira seção do arco, em *D*, conforme ilustrado na Figura 6.5.

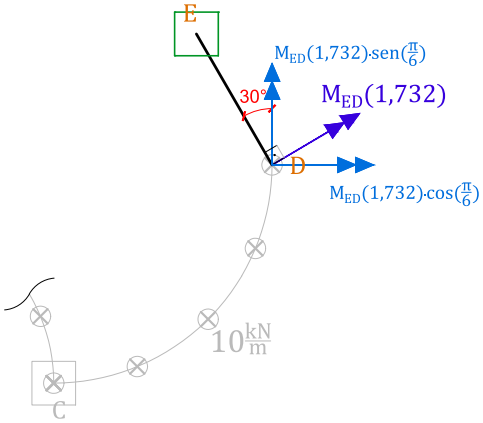


Figura 6.5 – Determinação das componentes de M_{ED} na seção *D* em vista superior.

Em seguida os dois momentos demonstrados na Figura 6.5, $M_{ED}(1{,}732) \cdot cos(\pi/6)$ e $M_{ED}(1{,}732) \cdot sen(\pi/6)$, serão multiplicados por específicas funções trigonométricas visando

a determinação dos momentos fletores e torsores correspondentes à seção S_2 do arco, apresentados na Figura 6.6. Para efeito ilustrativo, $M_{ED}(1{,}732)$ está representado por M_{ED}.

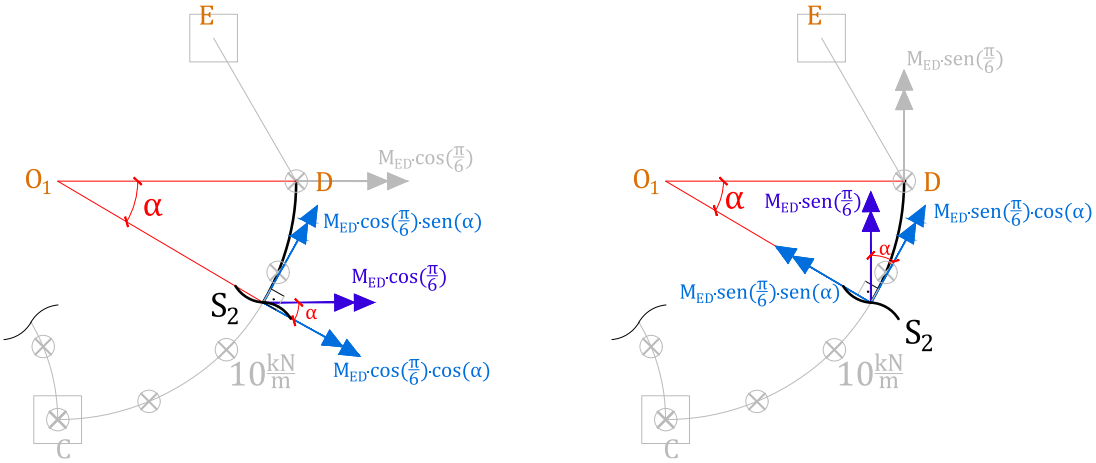


Figura 6.6 – Desmembramento dos momentos $M_{ED}(1{,}732) \cdot cos(\pi/6)$ e $M_{ED}(1{,}732) \cdot sen(\pi/6)$ no arco *DC* em vista superior.

$M_{DC}(\alpha)$ e $T_{DC}(\alpha)$, assim como as equações de esforços para as outras barras, são definidas conforme (6.6). De forma análoga, os momentos M_{DC} e T_{DC} são desmembrados para o cálculo de $M_{CB}(\alpha)$ e $T_{CB}(\alpha)$. As expressões $O_1G_1(\alpha)$ e $O_2G_2(\alpha)$ são calculadas a partir do demonstrado em (6.1) para $OG(\alpha)$.

$$
\begin{aligned}
M_{DC}(\alpha) &= M_{ED}(1{,}732) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos(\alpha) + V_E \cdot 2{,}5 \cdot sen(\alpha) \\
&\quad - 10 \cdot 2{,}5 \cdot \alpha \cdot \left[O_1G_1(\alpha) \cdot sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] \\
&\quad - M_{ED}(1{,}732) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \operatorname{sen}(\alpha) \\
T_{DC}(\alpha) &= M_{ED}(1{,}732) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \operatorname{sen}(\alpha) + V_E \cdot 2{,}5 \\
&\quad \cdot [1 - cos(\alpha)] - 10 \cdot 2{,}5 \cdot \alpha \\
&\quad \cdot \left[2{,}5 - O_1G_1(\alpha) \cdot cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] + M_{ED}(1{,}732) \\
&\quad \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos(\alpha)
\end{aligned}
\qquad \mathbf{S_2} \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \qquad (6.6)
$$

$$M_{CB}(\alpha) = M_{DC}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot sen(\alpha) + \left(V_E + V_C - 10\cdot 2{,}5\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2$$
$$\cdot sen(\alpha) - 15\cdot 2\cdot\alpha\cdot\left[O_2G_2(\alpha)\cdot sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$
$$- T_{DC}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\alpha) \qquad \textbf{S}_3$$
$$0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$
$$T_{CB}(\alpha) = M_{DC}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot cos(\alpha) - \left(V_E + V_C - 10\cdot 2{,}5\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2$$
$$\cdot[1-\cos(\alpha)] + 15\cdot 2\cdot\alpha$$
$$\cdot\left[2 - O_2G_2(\alpha)\cdot cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] + T_{DC}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot \text{sen}(\alpha)$$

$$M_{AB}(x) = V_A\cdot x$$
$$\textbf{S}_4$$
$$T_{AB}(x) = 0 \qquad 0 \le x \le 2$$

6.2 SISTEMA VIRTUAL (FIGURA 6.7)

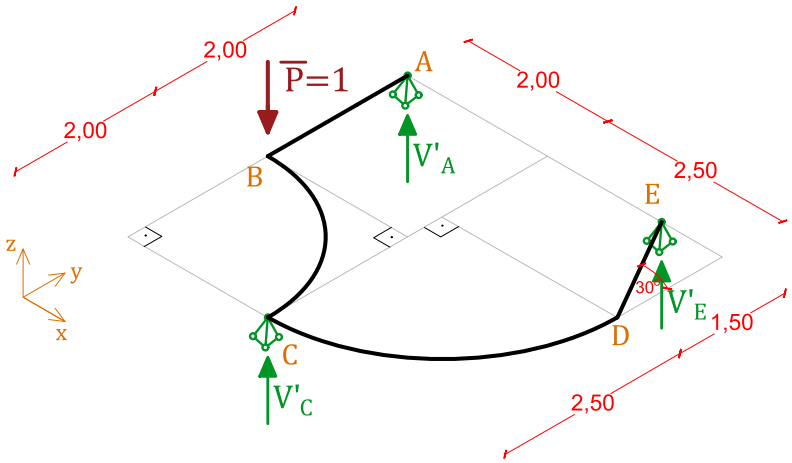


Figura 6.7 – Sistema Virtual do Exercício 6.

Cálculo das reações de apoio

$$\boldsymbol{\Sigma F_Z}^{\odot^+} = \mathbf{0}$$
$$V'_A + V'_C + V'_E - 1 = 0 \qquad (6.7)$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{Y_A}}^{\downarrow^+} = \mathbf{0}$$
$$V'_C\cdot 2 + V'_E\cdot\left[2 + 2{,}5 - 1{,}5\cdot tg\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = 0 \qquad (6.8)$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{X_A}}^{\leftarrow^+} = \mathbf{0}$$
$$V'_C\cdot 4 - 1\cdot 2 = 0 \qquad (6.9)$$

Reações de Apoio		
$V'_A = 0{,}775$	$V'_C = 0{,}5$	$V'_E = -0{,}275$

Tabela 6.2 – Resumo das reações de apoio do Sistema Virtual.

As seções transversais para cálculo das equações estão demonstradas na Figura 6.4 e as equações de esforços estão explícitas em (6.10).

$$
\begin{aligned}
&M'_{ED}(x) = V'_E \cdot x \qquad \textbf{S}_1 \\
&T'_{ED}(x) = 0 \qquad 0 \le x \le 1{,}732 \\
\\
&M'_{DC}(\alpha) = M'_{ED}(1{,}732) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos(\alpha) + V'_E \cdot 2{,}5 \\
&\qquad \cdot sen(\alpha) - M'_{ED}(1{,}732) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \operatorname{sen}(\alpha) \\
&T'_{DC}(\alpha) = M'_{ED}(1{,}732) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \operatorname{sen}(\alpha) + V'_E \cdot 2{,}5 \qquad \textbf{S}_2 \\
&\qquad \cdot [1 - cos(\alpha)] + M'_{ED}(1{,}732) \qquad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \\
&\qquad \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos(\alpha) \qquad (6.10) \\
\\
&M'_{CB}(\alpha) = M'_{DC}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot sen(\alpha) + (V'_E + V'_C) \cdot 2 \cdot sen(\alpha) \\
&\qquad - T'_{DC}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(\alpha) \qquad \textbf{S}_3 \\
&T'_{CB}(\alpha) = M'_{DC}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot cos(\alpha) - (V'_E + V'_C) \cdot 2 \qquad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \\
&\qquad \cdot [1 - \cos(\alpha)] + T'_{DC}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}(\alpha) \\
\\
&M'_{AB}(x) = V'_A \cdot x \qquad \textbf{S}_4 \\
&T'_{AB}(x) = 0 \qquad 0 \le x \le 2
\end{aligned}
$$

6.3 CÁLCULO DE DESLOCAMENTO E/OU ROTAÇÃO

De posse das equações resumidas em (6.5), (6.6), e (6.10), parte-se para as integrais de cálculo do deslocamento vertical em B (δ_{V_B}), dispostas em (6.11).

$$\delta_{V_B} = \int_0^{1,732} \frac{M_{ED}(x) \cdot M'_{ED}(x)}{E_c \cdot I_f} dx + \int_0^{1,732} \frac{T_{ED}(x) \cdot T'_{ED}(x)}{G_c \cdot I_t} dx$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{DC}(\alpha) \cdot M'_{DC}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2{,}5 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T_{DC}(\alpha) \cdot T'_{DC}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2{,}5 \cdot d\alpha$$
$$++ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{CB}(\alpha) \cdot M'_{CB}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T_{CB}(\alpha) \cdot T'_{CB}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{2} \frac{M_{AB}(x) \cdot M'_{AB}(x)}{E_c \cdot I_f} dx$$
$$+ \int_0^{2} \frac{T_{AB}(x) \cdot T'_{AB}(x)}{G_c \cdot I_t} dx = \mathbf{-1,65412 \cdot 10^{-3}\ m} \quad (6.11)$$

7 EXERCÍCIO 7 (HIPERESTÁTICO, ARCO, BARRA INCLINADA)

Determinar a rotação em relação ao eixo *y* no ponto *D* (θ_{y_D}), e o deslocamento vertical no ponto *C* (δ_{V_C}) na grelha hiperestática da Figura 7.1. Considerar somente os esforços de flexão e torção.

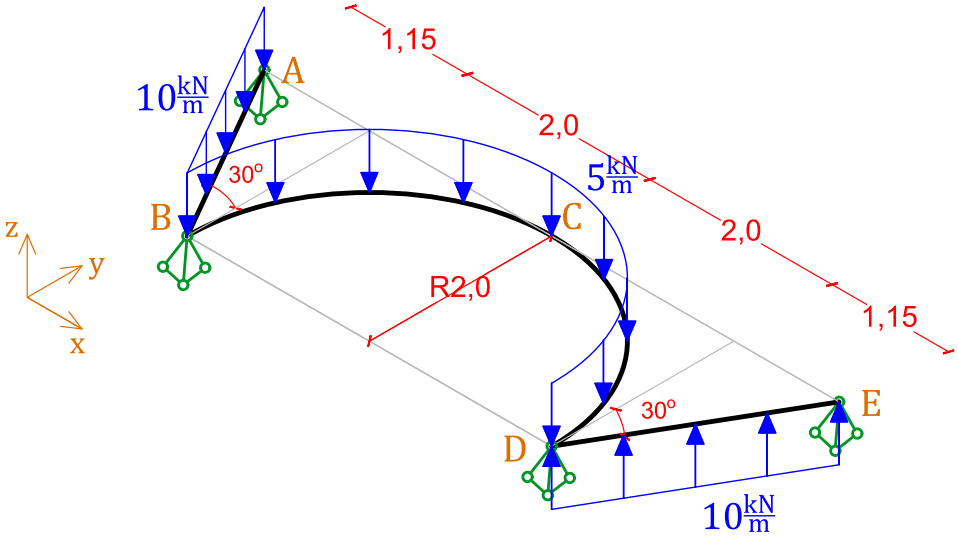


Figura 7.1 – Grelha do Exercício 7.

Dados do problema:

$E_c = 20\ GPa$ (Módulo de elasticidade longitudinal)

$G_c = 8\ GPa$ (Módulo de elasticidade transversal)

$I_f = 7{,}0 \cdot 10^{-3}\ m^4$ (Momento de inércia à flexão)

$I_t = 7{,}2 \cdot 10^{-3}\ m^4$ (Momento de inércia à torção)

A grelha da questão 7 possui quatro apoios, consequentemente é uma vez hiperestática. A resolução será feita pelo Método das Forças a partir da retirada do apoio em *E*, conforme Figura 7.2.

7.1 SISTEMA PRINCIPAL DO SISTEMA REAL (FIGURA 7.2)

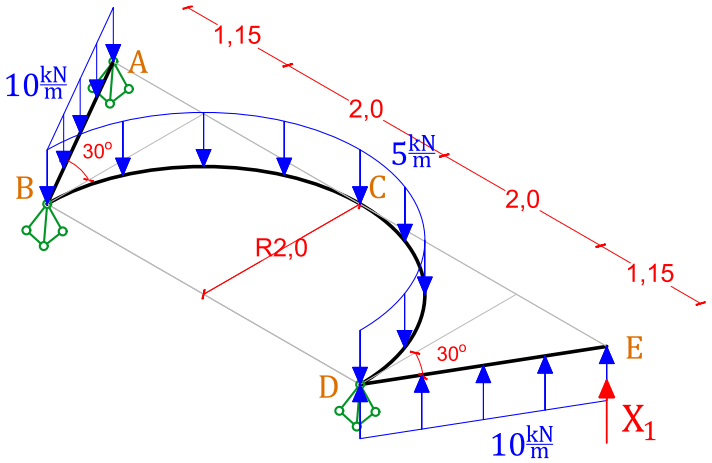


Figura 7.2 – Sistema Principal do Sistema Real do Exercício 7.

O Sistema [0] do Sistema Real é apresentado no tópico 7.2, a partir da remoção do hiperestático X_1.

7.2 SISTEMA [0] DO SISTEMA REAL (FIGURA 7.3)

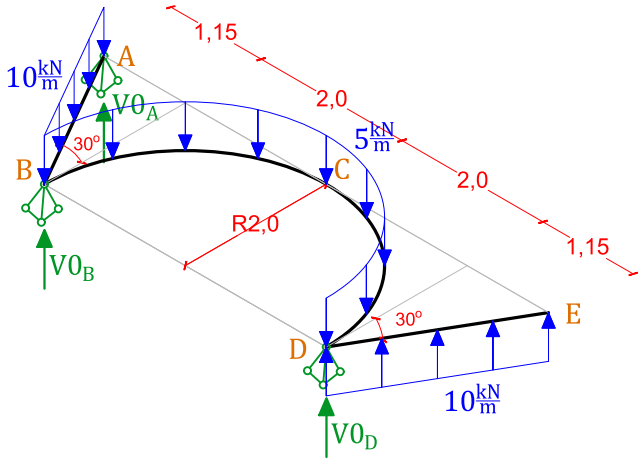


Figura 7.3 – Sistema [0] do Sistema Real.

Determinação das resultantes dos carregamentos distribuídos nos arcos

O arco *BCD* será analisado em dois trechos distintos, *BC* e *CD*, conforme ilustrado na Figura 7.4. Essa divisão decorre do Sistema Virtual utilizado para o cálculo do deslocamento vertical no ponto C (ver tópico 7.5), que introduz uma descontinuidade nesse nó, por meio da carga virtual $\bar{P} = 1$.

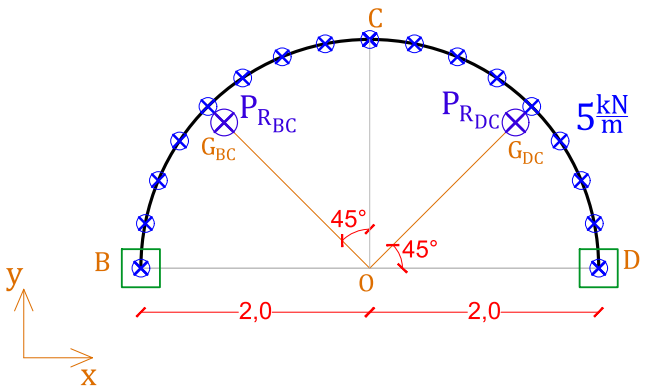


Figura 7.4 – Detalhe da posição das resultantes $P_{R_{BC}}$ e $P_{R_{DC}}$ em vista superior.

$$OG(\alpha) = \frac{2 \cdot R \cdot sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\alpha}$$

$$OG_{BC} = OG_{DC} = \frac{2 \cdot 2 \cdot sen\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} \tag{7.1}$$

$$P_{R_{ij}} = q \cdot \alpha \cdot R$$

$$P_{R_{BC}} = P_{R_{DC}} = 5 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2$$

Cálculo das reações de apoio

$$\boldsymbol{\Sigma F_Z}^{\odot^+} = \mathbf{0}$$

$$V0_A + V0_B + V0_D - P_{R_{BC}} - P_{R_{DC}} - 10 \cdot \frac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} + 10 \cdot \frac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = 0 \tag{7.2}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{X_B}}^{\twoheadrightarrow^+} = \mathbf{0}$$

$$V0_A \cdot 2 - 10 \cdot \frac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} \cdot 1 - P_{R_{BC}} \cdot OG_{BC} \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right) - P_{R_{DC}} \cdot OG_{DC} \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right) + 10 \cdot \frac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} \cdot 1 = 0 \tag{7.3}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{Y_C}}^{\uparrow+} = \mathbf{0}$$

$$V0_A \cdot \left\{\left[tg\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot 2\right] + 2\right\} + V0_B \cdot 2 - 10 \cdot \frac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} \cdot \left\{\frac{\left[tg\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot 2\right]}{2} + 2\right\} \tag{7.4}$$

$$- P_{R_{BC}} \cdot OG_{BC} \cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + P_{R_{DC}} \cdot OG_{DC} \cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - V0_D \cdot 2$$

$$- 10 \cdot \frac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} \cdot \left\{\frac{\left[tg\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot 2\right]}{2} + 2\right\} = 0$$

Reações de Apoio		
$V0_A = 20\ kN$	$V0_B = 19{,}695\ kN$	$V0_D = -8{,}279\ kN$

Tabela 7.1 – Resumo das reações de apoio no Sistema [0] do Sistema Real.

As seções que serão utilizadas para as equações estão demonstradas na Figura 7.5.

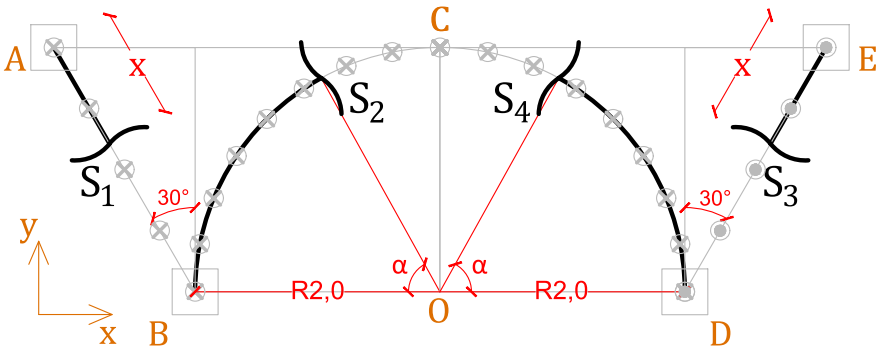


Figura 7.5 – Determinação das seções para as equações de momento fletor e torsor em vista superior.

As equações para o trecho *AB* estão dispostas em (7.5).

$$M0_{AB}(x) = V0_A \cdot x - 5 \cdot x^2$$

$$\mathbf{S_1}$$
$$0 \leq x \leq 2{,}309 \tag{7.5}$$

$$T0_{AB}(x) = 0$$

A Figura 7.6 ilustra as excentricidades para determinação das equações $M0_{BC}(\alpha)$ e $T0_{BC}(\alpha)$, calculadas em (7.6).

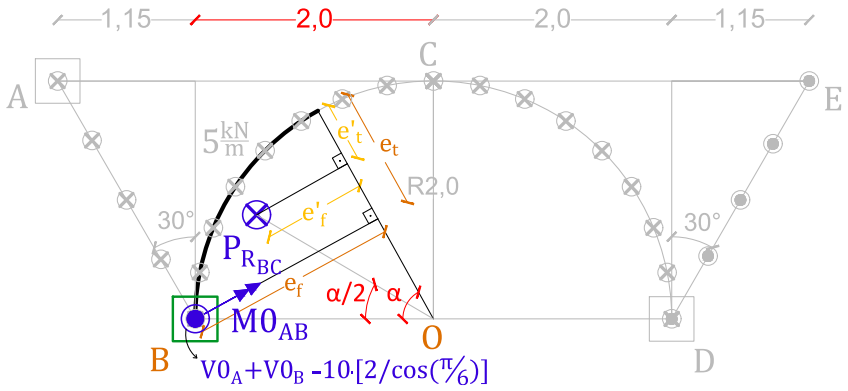


Figura 7.6 – Detalhes das excentricidades para as equações $M0_{BC}(\alpha)$ e $T0_{BC}(\alpha)$.

$$e_f(\alpha) = 2 \cdot \text{sen}(\alpha) \qquad e_t(\alpha) = 2 \cdot [1 - \cos(\alpha)]$$
$$e'_f(\alpha) = OG(\alpha) \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \qquad e'_t(\alpha) = 2 - OG(\alpha) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{7.6}$$

As equações estão resumidas em (7.7).

$$M0_{BC}(\alpha) = -M0_{AB}(2{,}309) \cdot cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos(\alpha) + \left[V0_A + V0_B - 10 \cdot \frac{2}{cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right] \cdot e_f(\alpha) - 5 \cdot 2 \cdot \alpha \cdot e'_f(\alpha) + M0_{AB}(2{,}309) \cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot sen(\alpha)$$

$$T0_{BC}(\alpha) = -M0_{AB}(2{,}309) \cdot cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot sen(\alpha) + \left[V0_A + V0_B - 10 \cdot \frac{2}{cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right] \cdot e_t(\alpha) - 5 \cdot 2 \cdot \alpha \cdot e'_t(\alpha) - M0_{AB}(2{,}309) \cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot cos\,(\alpha)$$

$$\mathbf{S_2}: \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \tag{7.7}$$

$$M0_{ED}(x) = 5 \cdot x^2$$

$$T0_{ED}(x) = 0$$

$$\mathbf{S_3}: \quad 0 \le x \le 2{,}309$$

De forma similar à Figura 7.6, a Figura 7.7 ilustra os dados para determinação das equações $M0_{DC}(\alpha)$ e $T0_{DC}(\alpha)$, resumidas em (7.8).

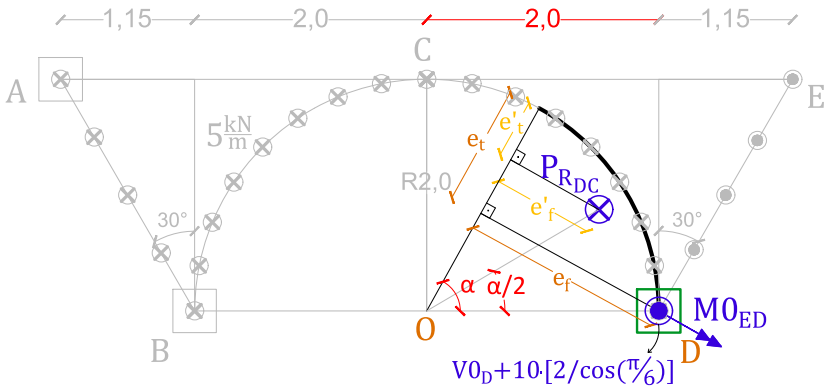


Figura 7.7 – Detalhes das excentricidades para as equações $M0_{DC}(\alpha)$ e $T0_{DC}(\alpha)$.

$$M0_{DC}(\alpha) = -M0_{ED}(2{,}309) \cdot cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot cos\,(\alpha) + \left(V0_D + 10 \cdot \frac{2}{cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right) \cdot e_f(\alpha) - 5 \cdot 2 \cdot \alpha \cdot e_f'(\alpha) + M0_{ED}(2{,}309) \cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot sen(\alpha)$$

$$T0_{DC}(\alpha) = M0_{ED}(2{,}309) \cdot cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot sen(\alpha) + \left(-V0_D - 10 \cdot \frac{2}{cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right) \cdot e_t(\alpha) + 5 \cdot 2 \cdot \alpha \cdot e_t'(\alpha) + M0_{ED}(2{,}309) \cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot cos(\alpha) \qquad \mathbf{S_4} \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \qquad (7.8)$$

7.3 SISTEMA [1] DO SISTEMA REAL (FIGURA 7.8)

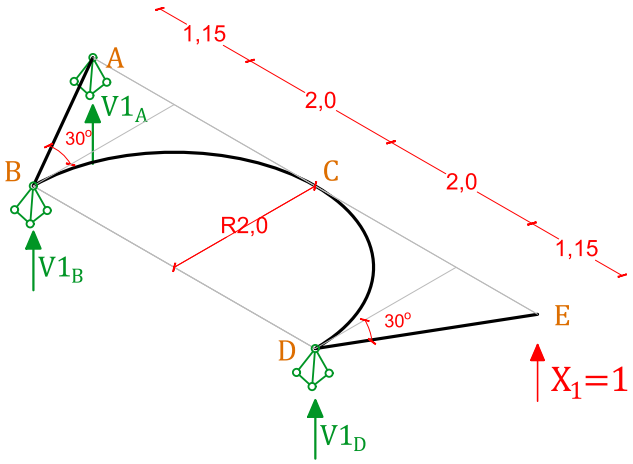


Figura 7.8 – Sistema [1] do Sistema Real.

Cálculo das reações de apoio

$$\boldsymbol{\Sigma F_Z}^{\odot^+} = \mathbf{0}$$
$$V1_A + V1_B + V1_D + 1 = 0 \tag{7.9}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{X_B}}^{\twoheadrightarrow^+} = \mathbf{0}$$
$$V1_A \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 0 \tag{7.10}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{Y_C}}^{\upuparrows^+} = \mathbf{0}$$
$$V1_A \cdot \left\{\left[tg\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot 2\right] + 2\right\} + V1_B \cdot 2 - V1_D \cdot 2 - 1 \cdot \left\{\left[tg\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot 2\right] + 2\right\} = 0 \tag{7.11}$$

As reações de apoio estão na Tabela 7.2 enquanto as equações de esforços internos são apresentadas em (7.12).

Reações de Apoio		
$V1_A = -1\frac{kN}{kN}$	$V1_B = 1{,}577\frac{kN}{kN}$	$V1_D = -1{,}577\frac{kN}{kN}$

Tabela 7.2 – Resumo das reações de apoio no Sistema [1] do Sistema Real.

S₁

$$M1_{AB}(x) = V1_A \cdot x$$
$$0 \leq x \leq 2{,}309$$
$$T1_{AB}(x) = 0$$

S₂

$$M1_{BC}(\alpha) = -M1_{AB}(2{,}309) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos(\alpha) + (V1_A + V1_B) \cdot e_f(\alpha) + M1_{AB}(2{,}309) \cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot sen(\alpha)$$
$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$
$$T1_{BC}(\alpha) = -M1_{AB}(2{,}309) \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos(\alpha) + (V1_A + V1_B) \cdot e_t(\alpha) - M1_{AB}(2{,}309) \cdot cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot sen(\alpha) \tag{7.12}$$

S₃

$$M1_{ED}(x) = x$$
$$0 \leq x \leq 2{,}309$$
$$T1_{ED}(x) = 0$$

$$M1_{DC}(\alpha) = -M1_{ED}(2{,}309) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos(\alpha) + (V1_D + 1) \cdot e_f(\alpha) + M1_{ED}(2{,}309) \cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot sen(\alpha)$$

S4

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$T1_{DC}(\alpha) = M1_{ED}(2{,}309) \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos(\alpha) - (V1_D + 1) \cdot e_t(\alpha) + M1_{ED}(2{,}309) \cdot cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot sen(\alpha)$$

7.3.1 *Cálculo dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade para o Sistema Real*

O termo de carga e o coeficiente de flexibilidade estão dispostos em (7.13).

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta_{10}} = &\int_0^{2{,}309} \frac{M0_{AB}(x) \cdot M1_{AB}(x)}{E_c \cdot I_f} dx + \int_0^{2{,}309} \frac{T0_{AB}(x) \cdot T1_{AB}(x)}{G_c \cdot I_t} dx \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{BC}(\alpha) \cdot M1_{BC}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{BC}(\alpha) \cdot T1_{BC}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha \\ &+ \int_0^{2{,}309} \frac{M0_{ED}(x) \cdot M1_{ED}(x)}{E_c \cdot I_f} dx + \int_0^{2{,}309} \frac{T0_{ED}(x) \cdot T1_{ED}(x)}{G_c \cdot I_t} dx \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{DC}(\alpha) \cdot M1_{DC}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{DC}(\alpha) \cdot T1_{DC}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha \\ &= \mathbf{1{,}1189900666 \cdot 10^{-3}\ m}\end{aligned} \tag{7.13}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta_{11}} = &\int_0^{2{,}309} \frac{[M1_{AB}(x)]^2}{E_c \cdot I_f} dx + \int_0^{2{,}309} \frac{[T1_{AB}(x)]^2}{G_c \cdot I_t} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[M1_{BC}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[T1_{BC}(\alpha)]^2}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{2{,}309} \frac{[M1_{ED}(x)]^2}{E_c \cdot I_f} dx + \int_0^{2{,}309} \frac{[T1_{ED}(x)]^2}{G_c \cdot I_t} dx \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[M1_{DC}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[T1_{DC}(\alpha)]^2}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha \\ &= \mathbf{8{,}327716564 \cdot 10^{-4}\ \frac{m}{kN}}\end{aligned}$$

O hiperestático X_1 (Figura 7.2) é obtido a partir da compatibilização dos deslocamentos e rotações, demonstrada em (7.14).

$$\begin{gathered}\{\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \\ X_1 = -1{,}3436937461\ kN\end{gathered} \tag{7.14}$$

Cálculo das reações de apoio do Sistema Real ($\circledcirc^{+}, \Uparrow^{+}, \twoheadrightarrow^{+}$)

$$
\begin{aligned}
V_A &= V0_A + V1_A \cdot X_1 = 21{,}3436937461\ kN \quad &\Rightarrow\quad |V_A| &= 21{,}3436937461\ kN\ \circledcirc \\
V_B &= V0_B + V1_B \cdot X_1 = 17{,}5756623182\ kN \quad &\Rightarrow\quad |V_B| &= 17{,}5756623182\ kN\ \circledcirc \\
V_D &= V0_D + V1_D \cdot X_1 = -6{,}1597357823\ kN \quad &\Rightarrow\quad |V_D| &= 6{,}1597357823\ kN\ \otimes \\
V_E &= X_1 = -1{,}3436937461\ kN \quad &\Rightarrow\quad |V_E| &= 1{,}3436937461\ kN\ \otimes
\end{aligned}
\tag{7.15}
$$

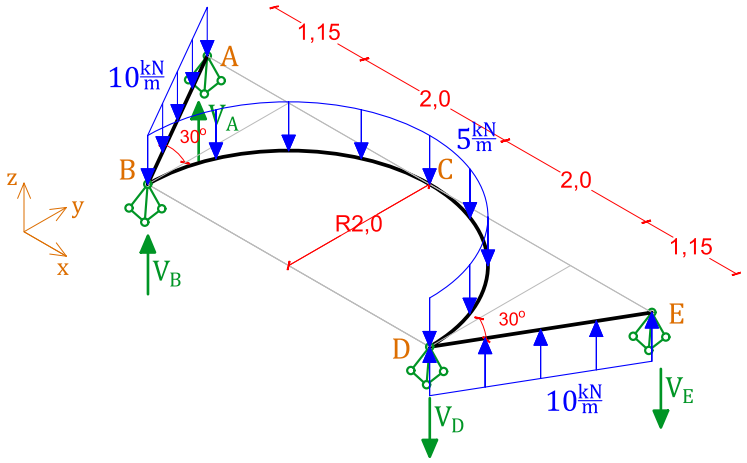


Figura 7.9 – Reações de apoio do Sistema Real.

As equações de esforços internos para o Sistema Real estão ilustradas em (7.16), utilizando as reações calculadas em (7.15) e dispostas com seu sentido correto na Figura 7.9.

$$
M_{AB}(x) = V_A \cdot x - 5 \cdot x^2 \qquad \mathbf{S_1}
$$

$$
0 \le x \le 2{,}309
$$

$$
T_{AB}(x) = 0
$$

$$
\begin{aligned}
M_{BC}(\alpha) = {} & -M_{AB}(2{,}309) \cdot cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot cos(\alpha) \\
& + \left[V_A + V_B - 10 \cdot \frac{2}{cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right] \cdot e_f(\alpha) - 5 \cdot 2 \\
& \cdot \alpha \cdot e_f'(\alpha) + M_{AB}(2{,}309) \cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot sen(\alpha)
\end{aligned}
\qquad \mathbf{S_2}
$$

$$
0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}
\tag{7.16}
$$

$$T_{BC}(\alpha) = -M_{AB}(2{,}309) \cdot cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot sen(\alpha)$$
$$+\left[V_A + V_B - 10 \cdot \frac{2}{cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right] \cdot e_t(\alpha) - 5 \cdot 2$$
$$\cdot \alpha \cdot e_t'(\alpha) - M_{AB}(2{,}309) \cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot cos(\alpha)$$

$$M_{ED}(x) = -V_E \cdot x + 5 \cdot x^2$$

S3

$$0 \leq x \leq 2{,}309$$

$$T_{ED}(x) = 0$$

$$M_{DC}(\alpha) = -M_{ED}(2{,}309) \cdot cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot cos(\alpha)$$
$$+\left[-V_E - V_D + 10 \cdot \frac{2}{cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right] \cdot e_f(\alpha) - 5 \cdot 2$$
$$\cdot \alpha \cdot e_f'(\alpha) + M_{ED}(2{,}309) \cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot sen(\alpha)$$

S4

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$T_{DC}(\alpha) = M_{ED}(2{,}309) \cdot cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot sen(\alpha)$$
$$+\left[V_E + V_D - 10 \cdot \frac{2}{cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right] \cdot e_t(\alpha) + 5 \cdot 2$$
$$\cdot \alpha \cdot e_t'(\alpha) + M_{ED}(2{,}309) \cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot cos(\alpha)$$

7.4 SISTEMA PRINCIPAL DO SISTEMA VIRTUAL PARA CÁLCULO DE θ_{y_D} (FIGURA 7.10)

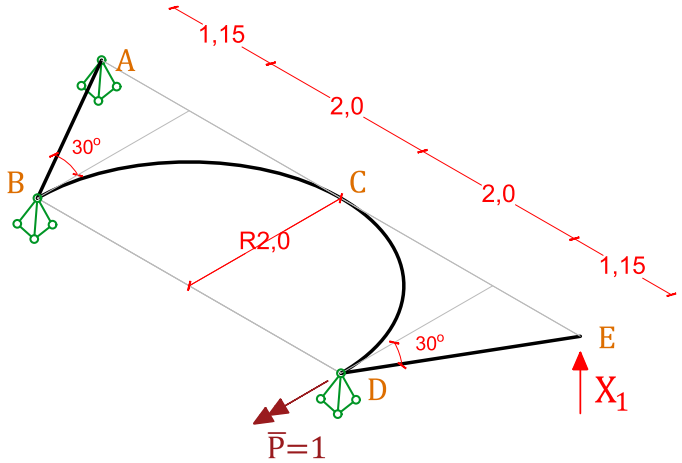


Figura 7.10 – Sistema principal do Sistema Virtual para cálculo de θ_{y_D} do Exercício 7.

7.4.1 *Sistema [0] do Sistema Virtual (Figura 7.11)*

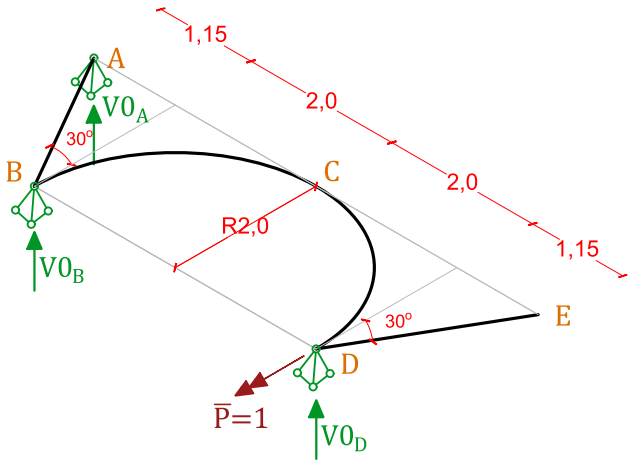


Figura 7.11 – Sistema [0] do Sistema Virtual.

Cálculo das reações de apoio

$$\boldsymbol{\Sigma F_Z}^{\odot+} = \mathbf{0}$$
$$V0_A + V0_B + V0_D = 0 \tag{7.17}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{X_B}}^{\twoheadrightarrow+} = \mathbf{0}$$
$$V0_A \cdot 2 = 0 \tag{7.18}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{Y_C}}^{\upuparrows+} = \mathbf{0}$$
$$V0_A \cdot \left\{\left[tg\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot 2\right] + 2\right\} + V0_B \cdot 2 - V0_D \cdot 2 - 1 = 0 \tag{7.19}$$

Reações de Apoio		
$V0_A = 0\,\frac{kN}{kN \cdot m}$	$V0_B = 0{,}25\,\frac{kN}{kN \cdot m}$	$V0_D = -0{,}25\,\frac{kN}{kN \cdot m}$

Tabela 7.3 – Resumo das reações de apoio do Sistema [0] do Sistema Virtual para cálculo de θ_{y_D}.

As equações de esforços estão dispostas em (7.20).

$$M0_{AB}(x) = 0$$
$$T0_{AB}(x) = 0$$
$$\mathbf{S_1}$$
$$0 \leq x \leq 2{,}309 \tag{7.20}$$

$$M0_{BC}(\alpha) = V0_B \cdot e_f(\alpha)$$

$$T0_{BC}(\alpha) = V0_B \cdot e_t(\alpha)$$

S₂

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$M0_{ED}(x) = 0$$

$$T0_{ED}(x) = 0$$

S₃

$$0 \leq x \leq 2{,}309$$

$$M0_{DC}(\alpha) = V0_D \cdot e_f(\alpha) + 1 \cdot sen(\alpha)$$

$$T0_{DC}(\alpha) = -V0_D \cdot e_t(\alpha) + 1 \cdot cos(\alpha)$$

S₄

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

7.4.2 *Cálculo dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade para o Sistema Virtual*

As integrais do sistema [1] do **Sistema Virtual** são iguais às integrais do sistema [1] do **Sistema Real**, apresentadas no tópico 7.3. O termo de carga atualizado está disposto em (7.21).

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta_{10}} = &\int_0^{2{,}309} \frac{M0_{AB}(x) \cdot M1_{AB}(x)}{E_c \cdot I_f} dx + \int_0^{2{,}309} \frac{T0_{AB}(x) \cdot T1_{AB}(x)}{G_c \cdot I_t} dx \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{BC}(\alpha) \cdot M1_{BC}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{BC}(\alpha) \cdot T1_{BC}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha \\ &+ \int_0^{2{,}309} \frac{M0_{ED}(x) \cdot M1_{ED}(x)}{E_c \cdot I_f} dx + \int_0^{2{,}309} \frac{T0_{ED}(x) \cdot T1_{ED}(x)}{G_c \cdot I_t} dx \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{DC}(\alpha) \cdot M1_{DC}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{DC}(\alpha) \cdot T1_{DC}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha \\ &= \mathbf{1{,}3242358904 \cdot 10^{-4}} \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{kN \cdot m}}\end{aligned} \tag{7.21}$$

O X_1 da Figura 7.10 é calculado em (7.22).

$$\begin{aligned}&\{\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \\ &X_1 = -0{,}1590154852 \frac{kN}{kN \cdot m}\end{aligned} \tag{7.22}$$

<u>Cálculo das reações de apoio do Sistema Virtual</u> ($\odot^{+}, \uparrow^{+}, \twoheadrightarrow^{+}$)

$$
\begin{aligned}
V'_A &= V0_A + V1_A \cdot X_1 = 0{,}1590154852 \frac{kN}{kN \cdot m} && \Rightarrow \quad |V'_A| = 0{,}1590154852 \frac{kN}{kN \cdot m} \odot \\
V'_B &= V0_B + V1_B \cdot X_1 = 0 \ \frac{kN}{kN \cdot m} && \Rightarrow \quad |V'_B| = 0 \\
V'_D &= V0_D + V1_D \cdot X_1 = 0 \ \frac{kN}{kN \cdot m} && \Rightarrow \quad |V'_D| = 0 \\
V'_E &= X_1 = -0{,}1590154852 \frac{kN}{kN \cdot m} && \Rightarrow \quad |V'_E| = 0{,}1590154852 \frac{kN}{kN \cdot m} \otimes
\end{aligned}
\tag{7.23}
$$

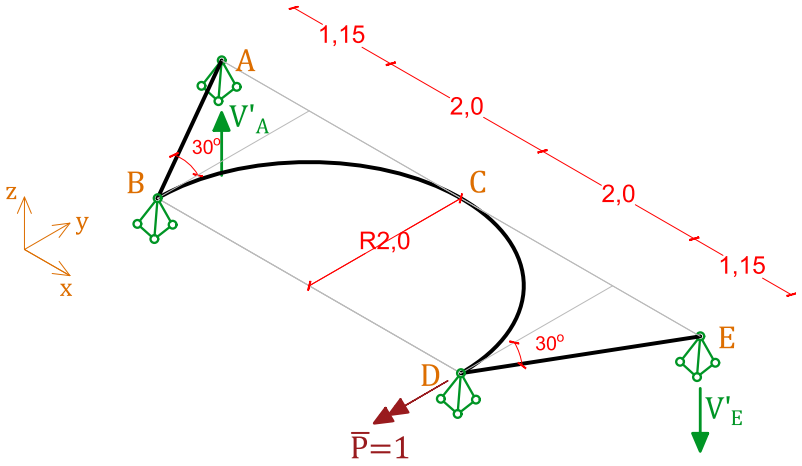


Figura 7.12 – Reações de apoio do Sistema Virtual para cálculo de θ_{y_D}.

De posse das reações de apoio exibidas em (7.23) e ilustradas com seus sentidos corretos na Figura 7.12, determinam-se as equações de momento fletor e torsor em todas as seções estabelecidas na Figura 7.5, resumidas em (7.24).

$$
\begin{aligned}
&M'_{AB}(x) = V'_A \cdot x \\
&T'_{AB}(x) = 0
\end{aligned}
\qquad \mathbf{S_1} \quad 0 \leq x \leq 2{,}309
$$

$$
\begin{aligned}
M'_{BC}(\alpha) &= -M'_{AB}(2{,}309) \cdot cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot cos(\alpha) + V'_A \cdot e_f(\alpha) \\
&\quad + M'_{AB}(2{,}309) \cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot sen(\alpha) \\
T'_{BC}(\alpha) &= -M'_{AB}(2{,}309) \cdot cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot sen(\alpha) + V'_A \cdot e_t(\alpha) \\
&\quad - M'_{AB}(2{,}309) \cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot cos(\alpha)
\end{aligned}
\qquad \mathbf{S_2} \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}
\tag{7.24}
$$

$$M'_{ED}(x) = -V'_E \cdot x \qquad \textbf{S}_3 \quad 0 \le x \le 2{,}309$$

$$T'_{ED}(x) = 0$$

$$M'_{DC}(\alpha) = -M'_{ED}(2{,}309) \cdot cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot cos(\alpha) - V'_E \cdot e_f(\alpha) + 1 \cdot sen(\alpha) + M'_{ED}(2{,}309) \cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot sen(\alpha)$$

$$T'_{DC}(\alpha) = M'_{ED}(2{,}309) \cdot cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot sen(\alpha) + V'_E \cdot e_t(\alpha) + 1 \cdot \cos(\alpha) + M'_{ED}(2{,}309) \cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot cos(\alpha) \qquad \textbf{S}_4 \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

7.5 SISTEMA PRINCIPAL DO SISTEMA VIRTUAL PARA CÁLCULO DE δ_{V_C} (FIGURA 7.14)

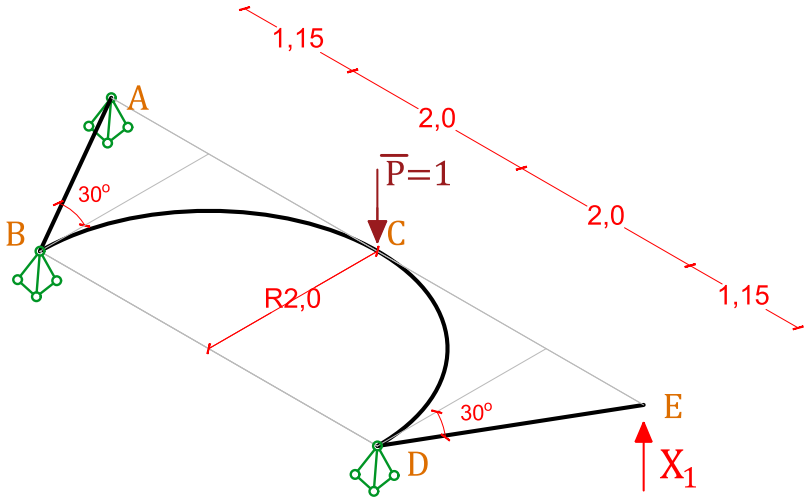


Figura 7.13 – Sistema Principal do Sistema Virtual para cálculo de δ_{V_C} do Exercício 7.

7.5.1 *Sistema [0] do Sistema Virtual (Figura 7.14)*

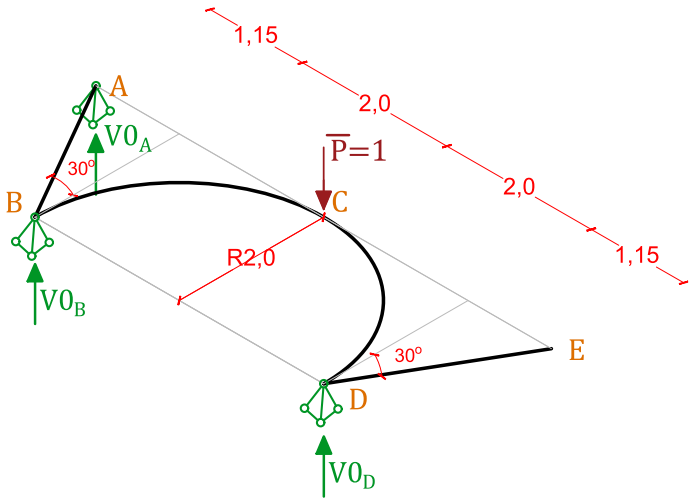


Figura 7.14 – Sistema [0] do Sistema Virtual.

Cálculo das reações de apoio

$$\boldsymbol{\Sigma F_Z}^{\odot+} = \mathbf{0}$$
$$V0_A + V0_B + V0_D - 1 = 0 \tag{7.25}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{X_B}}^{\twoheadrightarrow+} = \mathbf{0}$$
$$V0_A \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0 \tag{7.26}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{Y_C}}^{\upuparrows+} = \mathbf{0}$$
$$V0_A \cdot \left\{\left[\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot 2\right] + 2\right\} + V0_B \cdot 2 - V0_D \cdot 2 = 0 \tag{7.27}$$

Reações de Apoio		
$V0_A = 1\frac{kN}{kN}$	$V0_B = -0{,}789\frac{kN}{kN}$	$V0_D = 0{,}789\frac{kN}{kN}$

Tabela 7.4 – Resumo das reações de apoio do Sistema [0] do Sistema Virtual para cálculo de δ_{V_C}.

As equações estão resumidas em (7.28).

$$M0_{AB}(x) = V0_A \cdot x$$
$$T0_{AB}(x) = 0 \qquad \begin{matrix}\mathbf{S_1}\\ 0 \le x \le 2{,}309\end{matrix} \tag{7.28}$$

$$M0_{BC}(\alpha) = -M0_{AB}(2{,}309) \cdot cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot cos(\alpha) + (V0_A + V0_B) \cdot e_f(\alpha) + M0_{AB}(2{,}309) \cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot sen(\alpha)$$

$$T0_{BC}(\alpha) = -M0_{AB}(2{,}309) \cdot cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot sen(\alpha) + (V0_A + V0_B) \cdot e_t(\alpha) - M0_{AB}(2{,}309) \cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot cos(\alpha)$$

S₂

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$M0_{ED}(x) = 0$$

$$T0_{ED}(x) = 0$$

S₃

$$0 \leq x \leq 2{,}309$$

$$M0_{DC}(\alpha) = V0_D \cdot e_f(\alpha)$$

$$T0_{DC}(\alpha) = -V0_D \cdot e_t(\alpha)$$

S₄

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

7.5.2 *Cálculo dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade para o Sistema Virtual*

Análogo ao tópico 7.4.2, o Sistema [1] pode ser igual nos sistemas **Virtual** e **Real** e já foi apresentado em detalhes no tópico 7.3. A atualização no termo de carga está demonstrada em (7.29) utilizando as equações de (7.12) e (7.28).

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta_{10}} = &\int_0^{2{,}309} \frac{M0_{AB}(x) \cdot M1_{AB}(x)}{E_c \cdot I_f} dx + \int_0^{2{,}309} \frac{T0_{AB}(x) \cdot T1_{AB}(x)}{G_c \cdot I_t} dx \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{BC}(\alpha) \cdot M1_{BC}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{BC}(\alpha) \cdot T1_{BC}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha \\ &+ \int_0^{2{,}309} \frac{M0_{ED}(x) \cdot M1_{ED}(x)}{E_c \cdot I_f} dx + \int_0^{2{,}309} \frac{T0_{ED}(x) \cdot T1_{ED}(x)}{G_c \cdot I_t} dx \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{DC}(\alpha) \cdot M1_{DC}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{DC}(\alpha) \cdot T1_{DC}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha \\ &= \boldsymbol{-4{,}163858282 \cdot 10^{-4} \frac{m}{kN}}\end{aligned} \tag{7.29}$$

O hiperestático X_1 escolhido para a resolução, ilustrado na Figura 7.13, é calculado em (7.30).

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \\ X_1 = 0{,}5 \dfrac{kN}{kN} \end{cases} \tag{7.30}$$

<u>Cálculo das reações de apoio do Sistema Virtual</u> (◉⁺, ↟⁺, ↠⁺)

$$\begin{aligned} V'_A &= V0_A + V1_A \cdot X_1 = 0{,}5 \frac{kN}{kN} && \Rightarrow && |V'_A| = 0{,}5 \frac{kN}{kN} \circledcirc \\ V'_B &= V0_B + V1_B \cdot X_1 = 0 \frac{kN}{kN} && \Rightarrow && |V'_B| = 0 \\ V'_D &= V0_D + V1_D \cdot X_1 = 0 \frac{kN}{kN} && \Rightarrow && |V'_D| = 0 \\ V'_E &= X_1 = 0{,}5 \frac{kN}{kN} && \Rightarrow && |V'_E| = 0{,}5 \frac{kN}{kN} \circledcirc \end{aligned} \tag{7.31}$$

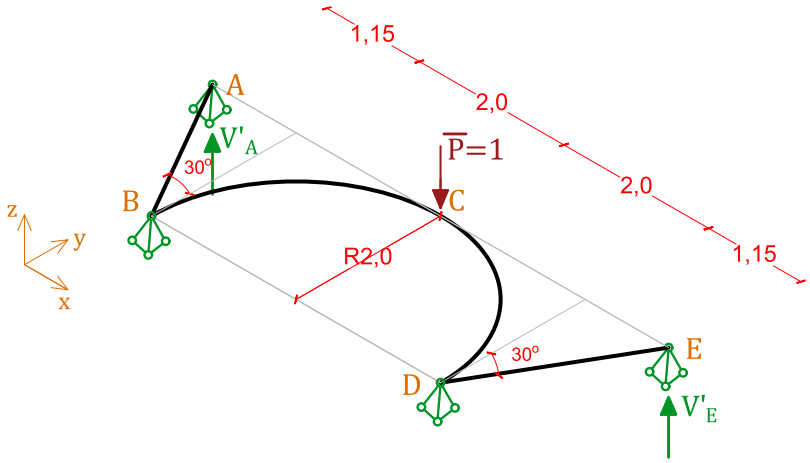


Figura 7.15 – Reações de apoio do Sistema Virtual para cálculo de δ_{V_C}.

Utilizando as reações expostas com sentido correto na Figura 7.15, e valores em (7.31), calcula-se as equações de esforços internos, (7.32), visando a determinação do deslocamento vertical em *C*.

$$M'_{AB}(x) = V'_A \cdot x \qquad \mathbf{S_1}$$

$$0 \leq x \leq 2{,}309$$

$$T'_{AB}(x) = 0$$

$$M'_{BC}(\alpha) = -M'_{AB}(2{,}309) \cdot cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot cos(\alpha) + V'_A \cdot e_f(\alpha) + M'_{AB}(2{,}309) \cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot sen(\alpha) \qquad \mathbf{S_2}$$

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \tag{7.32}$$

$$T'_{BC}(\alpha) = -M'_{AB}(2{,}309) \cdot cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot sen(\alpha) + V'_A \cdot e_t(\alpha)$$
$$- M'_{AB}(2{,}309) \cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot cos(\alpha)$$

$$M'_{ED}(x) = V'_E \cdot x$$

S3
$$0 \leq x \leq 2{,}309$$

$$T'_{ED}(x) = 0$$

$$M'_{DC}(\alpha) = -M'_{ED}(2{,}309) \cdot cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot cos(\alpha) + V'_E \cdot e_f(\alpha)$$
$$+ M'_{ED}(2{,}309) \cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot sen(\alpha)$$

S4
$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$T'_{DC}(\alpha) = M'_{ED}(2{,}309) \cdot cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot sen(\alpha) - V'_E \cdot e_t(\alpha)$$
$$+ M'_{ED}(2{,}309) \cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot cos(\alpha)$$

7.6 Cálculo de Deslocamento e/ou Rotação

A integral para o cálculo de θ_{y_D} é apresentado em (7.33) utilizando as equações de (7.16) e (7.24).

$$\theta_{y_D} = \int_0^{2{,}309} \frac{M_{AB}(x) \cdot M'_{AB}(x)}{E_c \cdot I_f} dx + \int_0^{2{,}309} \frac{T_{AB}(x) \cdot T'_{AB}(x)}{G_c \cdot I_t} dx$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{BC}(\alpha) \cdot M'_{BC}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T_{BC}(\alpha) \cdot T'_{BC}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{2{,}309} \frac{M_{ED}(x) \cdot M'_{ED}(x)}{E_c \cdot I_f} dx + \int_0^{2{,}309} \frac{T_{ED}(x) \cdot T'_{ED}(x)}{G_c \cdot I_t} dx \qquad (7.33)$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{DC}(\alpha) \cdot M'_{DC}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T_{DC}(\alpha) \cdot T'_{DC}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha$$
$$= \mathbf{7{,}0044 \cdot 10^{-4}\ rad}$$

Para o cálculo do deslocamento vertical em C (δ_{V_C}), as equações (7.16) e (7.32) são integradas em (7.34).

$$\delta_{V\,C} = \int_0^{2{,}309} \frac{M_{AB}(x) \cdot M'_{AB}(x)}{E_c \cdot I_f} dx + \int_0^{2{,}309} \frac{T_{AB}(x) \cdot T'_{AB}(x)}{G_c \cdot I_t} dx$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{BC}(\alpha) \cdot M'_{BC}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T_{BC}(\alpha) \cdot T'_{BC}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{2{,}309} \frac{M_{ED}(x) \cdot M'_{ED}(x)}{E_c \cdot I_f} dx + \int_0^{2{,}309} \frac{T_{ED}(x) \cdot T'_{ED}(x)}{G_c \cdot I_t} dx \qquad (7.34)$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{DC}(\alpha) \cdot M'_{DC}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T_{DC}(\alpha) \cdot T'_{DC}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha$$
$$= \mathbf{1{,}8046 \cdot 10^{-3}\ m}$$

8 EXERCÍCIO 8 (HIPERESTÁTICO, ARCO, QUADRO FECHADO)

Calcular o deslocamento vertical do ponto *B* (δ_{V_B}) da grelha apresentada na Figura 8.1. Considerar somente os esforços de flexão e torção.

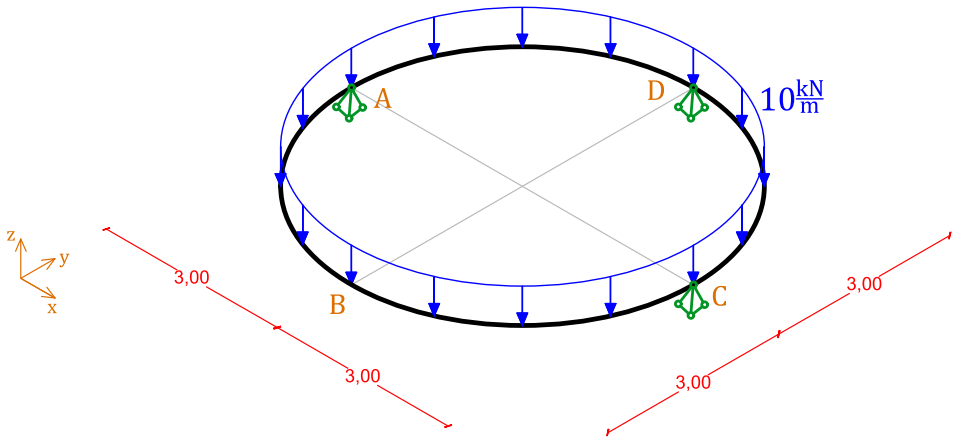


Figura 8.1 – Grelha do Exercício 8.

Dados do problema:

$E_c = 20\ GPa$ (Módulo de elasticidade longitudinal)

$G_c = \frac{25}{3} GPa$ (Módulo de elasticidade transversal)

$I_f = 7{,}2 \cdot 10^{-3}\ m^4$ (Momento de inércia à flexão)

$I_t = 7{,}5 \cdot 10^{-3}\ m^4$ (Momento de inércia à torção)

A grelha triapoiada da Figura 8.1 possui um quadro fechado, o que acrescenta três incógnitas ao sistema isostático definido pelos três apoios. A estrutura é então *3* vezes hiperestática, e será resolvida a partir de uma seção no ponto *B*, conforme Figura 8.2.

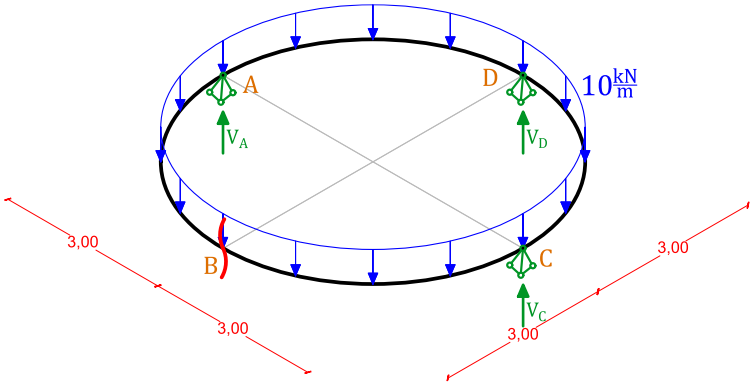


Figura 8.2 – Posição da seção no Sistema Principal do Sistema Real do Exercício 8.

8.1 SISTEMA PRINCIPAL DO SISTEMA REAL

A estrutura isostática auxiliar formada a partir da secção comentada anteriormente é denominada de sistema principal e está demonstrada na Figura 8.3, onde é possível identificar também os hiperestáticos X_1, X_2 e X_3 que serão utilizados na resolução pelo Método das Forças.

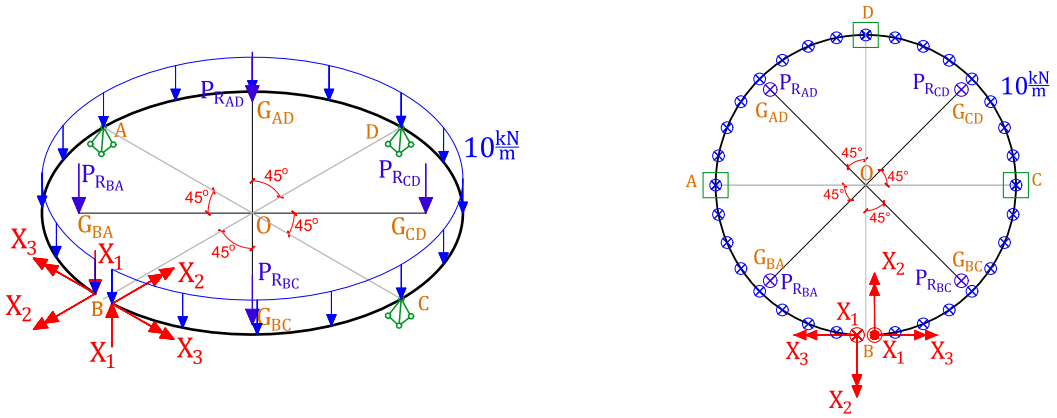


Figura 8.3 – Sistema Principal do Sistema Real do Exercício 8 em perspectiva isométrica e vista superior.

8.1.1 *Sistema [0] do Sistema Real (Figura 8.4)*

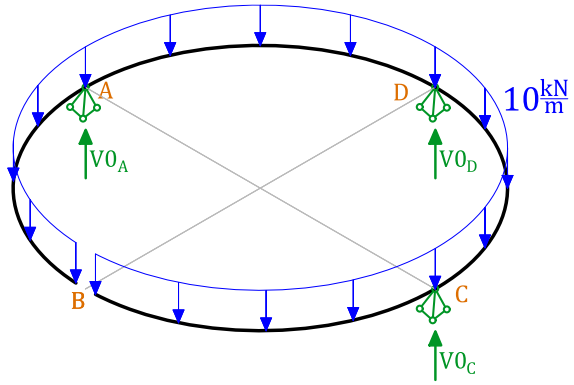


Figura 8.4 – Sistema [0] do Sistema Real.

<u>Determinação das resultantes dos carregamentos distribuídos nos arcos</u>

$$OG(\alpha) = \frac{2 \cdot R \cdot sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\alpha}$$

$$OG_{BA} = OG_{AD} = OG_{BC} = OG_{CD} = \frac{2 \cdot 3 \cdot sen\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} \tag{8.1}$$

$$P_{R_{ij}} = q \cdot \alpha \cdot R$$

$$P_{R_{BA}} = P_{R_{AD}} = P_{R_{BC}} = P_{R_{CD}} = 10 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 3$$

Cálculo das reações de apoio

$$\boldsymbol{\Sigma F_Z}^{\odot^+} = \mathbf{0}$$

$$V0_A + V0_C + V0_D + 4 \cdot \left(-10 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 3\right) = 0 \tag{8.2}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{Y_B}}^{\uparrow^+} = \mathbf{0}$$

$$V0_A \cdot 3 - V0_C \cdot 3 + 2 \cdot \left[10 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 3 \cdot OG\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - 2 \cdot \left[10 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 3 \cdot OG\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = 0 \tag{8.3}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{X_A}}^{\twoheadrightarrow^+} = \mathbf{0}$$

$$V0_D \cdot 3 + 2 \cdot \left[10 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 3 \cdot OG\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - 2 \cdot \left[10 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 3 \cdot OG\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = 0 \tag{8.4}$$

Reações de Apoio		
$V0_A = 30 \cdot \pi\ kN$	$V0_C = 30 \cdot \pi\ kN$	$V0_D = 0\ kN$

Tabela 8.1 – Resumo das reações de apoio do Sistema Real.

As seções utilizadas para as equações estão destacadas na Figura 8.5.

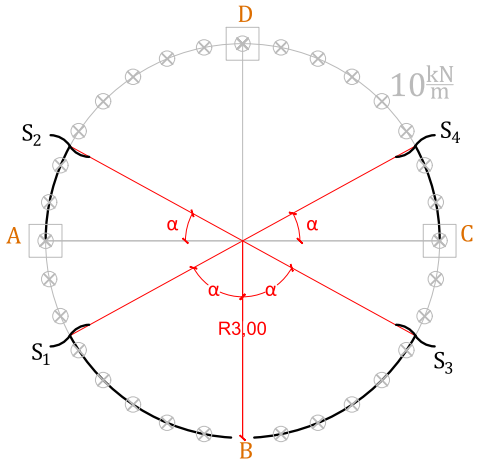


Figura 8.5 – Determinação das seções para as equações de momento fletor e torsor em vista superior.

A Figura 8.6 destaca a posição da resultante do carregamento distribuído para o trecho AB do arco com ênfase nas excentricidades e'_f e e'_t, calculadas em (8.5), de acordo com o demonstrado em (8.1).

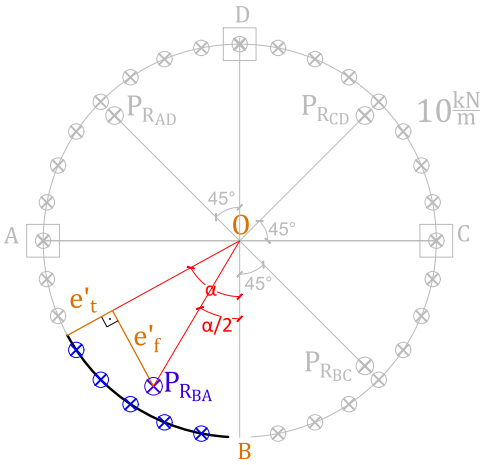


Figura 8.6 – Excentricidades para equações de momentos no trecho *BA*.

$$e'_f(\alpha) = OG(\alpha) \cdot sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$e'_t(\alpha) = 3 - OG(\alpha) \cdot cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \qquad (8.5)$$

$$M0_{BA}(\alpha) = -10 \cdot 3 \cdot \alpha \cdot e'_f(\alpha)$$

$$T0_{BA}(\alpha) = -10 \cdot 3 \cdot \alpha \cdot e'_t(\alpha)$$

S1

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \qquad (8.6)$$

Para a equação do trecho *AD*, a Figura 8.7 destaca todos os esforços solicitantes da seção S_2 (ver Figura 8.5), que incluem a resultante da carga distribuída ($P_{R_{BA}}$), a flexão ($M0_{BA}$) e a torção ($T0_{BA}$) do trecho *BA*, e a reação de apoio em *A* ($V0_A$). As excentricidades das cargas concentradas estão demonstradas em (8.7).

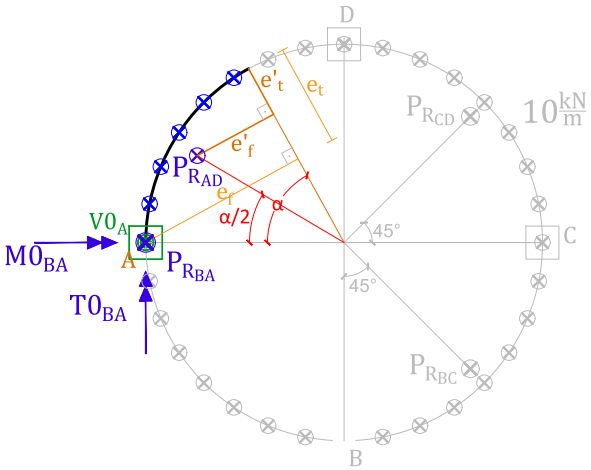


Figura 8.7 – Componentes da equação para o trecho *AD*.

$$e_f(\alpha) = 3 \cdot sen(\alpha)$$
$$e_t(\alpha) = 3 \cdot [1 - cos(\alpha)] \qquad (8.7)$$

$$M0_{AD}(\alpha) = -10 \cdot 3 \cdot \alpha \cdot e'_f(\alpha) + \left(V0_A - P_{R_{BA}}\right) \cdot e_f(\alpha) + M0_{BA}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(\alpha) - T0_{BA}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{sen}(\alpha)$$

$$T0_{AD}(\alpha) = -10 \cdot 3 \cdot \alpha \cdot e'_t(\alpha) + \left(V0_A - P_{R_{BA}}\right) \cdot e_t(\alpha) + M0_{BA}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{sen}(\alpha) + T0_{BA}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(\alpha)$$

S₂ $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ (8.8)

Para a determinação das equações nos trechos *BC* e *CD*, o raciocínio é muito semelhante ao desenvolvido para *BA* e *AD*, respectivamente (atentar para a mudança de alguns sinais). Ainda, $P_{R_{BC}} = P_{R_{BA}}$, calculado em (8.1). As expressões resultantes estão resumidas em (8.9) e (8.10).

$$M0_{BC}(\alpha) = -10 \cdot 3 \cdot \alpha \cdot e'_f(\alpha)$$

$$T0_{BC}(\alpha) = 10 \cdot 3 \cdot \alpha \cdot e'_t(\alpha)$$

S₃ $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ (8.9)

$$M0_{CD}(\alpha) = -10 \cdot 3 \cdot \alpha \cdot e'_f(\alpha) + \left(V0_C - P_{R_{BC}}\right) \cdot e_f(\alpha) + M0_{BC}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(\alpha) + T0_{BC}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{sen}(\alpha)$$

$$T0_{CD}(\alpha) = 10 \cdot 3 \cdot \alpha \cdot e'_t(\alpha) - \left(V0_C - P_{R_{BC}}\right) \cdot e_t(\alpha) - M0_{BC}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{sen}(\alpha) + T0_{BC}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(\alpha)$$

S₄ $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ (8.10)

8.1.2 *Sistema [1] do Sistema Real (Figura 8.8)*

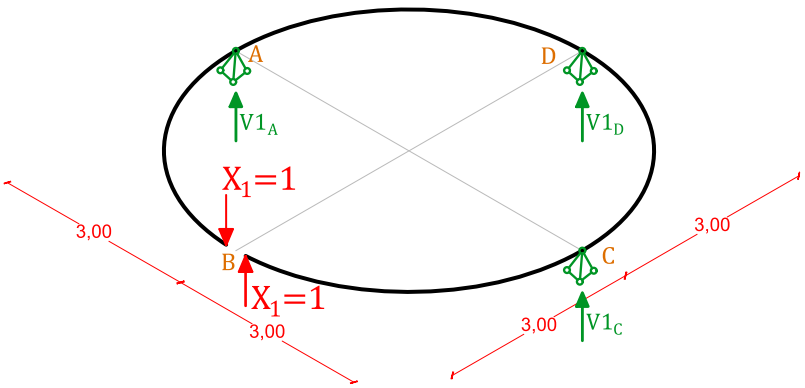


Figura 8.8 – Sistema [1] do Sistema Real.

Cálculo das reações de apoio

$$\boldsymbol{\Sigma F_Z}^{\odot^+} = \mathbf{0}$$
$$V1_A + V1_C + V1_D - 1 + 1 = 0 \tag{8.11}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{Y_B}}^{\uparrow^+} = \mathbf{0}$$
$$V1_A \cdot 3 - V1_C \cdot 3 = 0 \tag{8.12}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{X_A}}^{\twoheadrightarrow^+} = \mathbf{0}$$
$$V1_D \cdot 3 + 1 \cdot 3 - 1 \cdot 3 = 0 \tag{8.13}$$

Reações de Apoio		
$V1_A = 0$	$V1_C = 0$	$V1_D = 0$

Tabela 8.2 – Resumo das reações de apoio do Sistema [1] do Sistema Real.

$$M1_{BA}(\alpha) = -1 \cdot e_f(\alpha)$$
$$T1_{BA}(\alpha) = -1 \cdot e_t(\alpha)$$
S1 $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

$$M1_{AD}(\alpha) = -1 \cdot e_f(\alpha) + M1_{BA}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(\alpha) - T1_{BA}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}(\alpha)$$
$$T1_{AD}(\alpha) = -1 \cdot e_t(\alpha) + M1_{BA}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}(\alpha) + T1_{BA}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(\alpha)$$
S2 $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

$$M1_{BC}(\alpha) = 1 \cdot e_f(\alpha)$$
$$T1_{BC}(\alpha) = -1 \cdot e_t(\alpha)$$
S3 $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

$$M1_{CD}(\alpha) = 1 \cdot e_f(\alpha) + M1_{BC}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(\alpha) + T1_{BC}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}(\alpha)$$
$$T1_{CD}(\alpha) = -1 \cdot e_t(\alpha) - M1_{BC}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}(\alpha) + T1_{BC}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(\alpha)$$
S4 $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

(8.14)

8.1.3 *Sistema [2] do Sistema Real (Figura 8.9)*

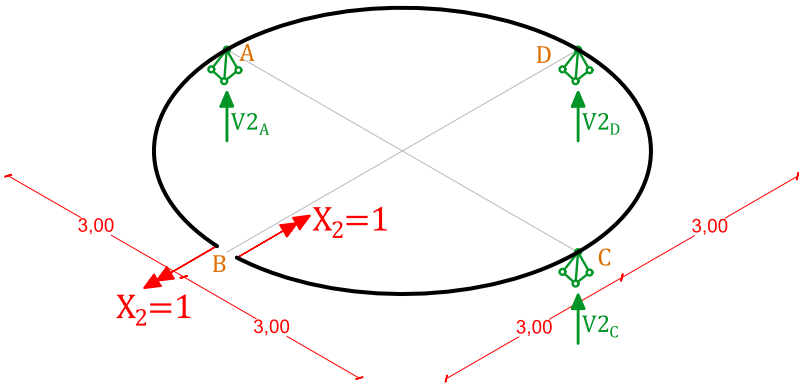


Figura 8.9 – Sistema [2] do Sistema Real.

Cálculo das reações de apoio

$$\boldsymbol{\Sigma F_Z}^{\odot+} = \mathbf{0}$$
$$V2_A + V2_C + V2_D = 0 \tag{8.15}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{Y_B}}^{\uparrow+} = \mathbf{0}$$
$$V2_A \cdot 3 - V2_C \cdot 3 - 1 + 1 = 0 \tag{8.16}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{X_A}}^{\twoheadrightarrow+} = \mathbf{0}$$
$$V2_D \cdot 3 = 0 \tag{8.17}$$

Reações de Apoio		
$V2_A = 0$	$V2_C = 0$	$V2_D = 0$

Tabela 8.3 – Resumo das reações de apoio do Sistema [2] do Sistema Real.

$$M2_{BA}(\alpha) = 1 \cdot cos(\alpha)$$
$$T2_{BA}(\alpha) = 1 \cdot sen(\alpha)$$
$$\mathbf{S_1}\quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$M2_{AD}(\alpha) = -T2_{BA}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot sen(\alpha)$$
$$T2_{AD}(\alpha) = T2_{BA}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot cos(\alpha)$$
$$\mathbf{S_2}\quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \tag{8.18}$$

$$M2_{BC}(\alpha) = 1 \cdot cos(\alpha)$$

S3

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$T2_{BC}(\alpha) = -1 \cdot sen(\alpha)$$

$$M2_{CD}(\alpha) = T2_{BC}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot sen(\alpha)$$

S4

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$T2_{CD}(\alpha) = T2_{BC}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot cos(\alpha)$$

8.1.4 *Sistema [3] do Sistema Real (Figura 8.10)*

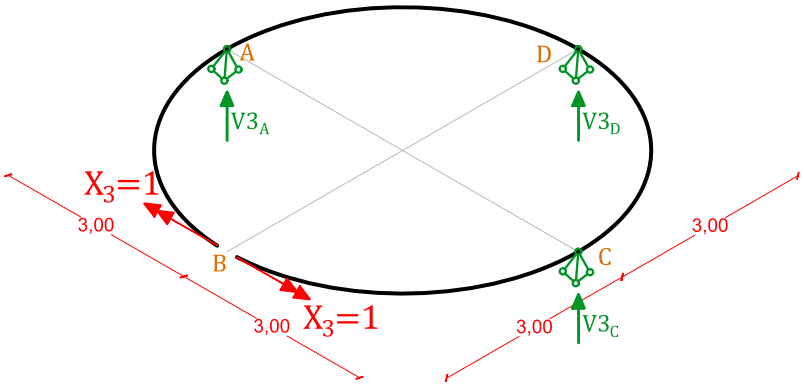


Figura 8.10 – Sistema [3] do Sistema Real.

Cálculo das reações de apoio

$$\boldsymbol{\Sigma F_Z}^{\odot +} = \mathbf{0}$$

$$V3_A + V3_C + V3_D = 0 \tag{8.19}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{Y_B}}^{\uparrow +} = \mathbf{0}$$

$$V3_A \cdot 3 - V3_C \cdot 3 = 0 \tag{8.20}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{X_A}}^{\twoheadrightarrow +} = \mathbf{0}$$

$$V3_D \cdot 3 - 1 + 1 = 0 \tag{8.21}$$

Reações de Apoio		
$V3_A = 0$	$V3_C = 0$	$V3_D = 0$

Tabela 8.4 – Resumo das reações de apoio do Sistema [3] do Sistema Real.

$$M3_{BA}(\alpha) = 1 \cdot sen(\alpha)$$

$$T3_{BA}(\alpha) = -1 \cdot cos(\alpha)$$

S1

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$M3_{AD}(\alpha) = M3_{BA}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(\alpha)$$

$$T3_{AD}(\alpha) = M3_{BA}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{sen}(\alpha)$$

S2

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

(8.22)

$$M3_{BC}(\alpha) = -1 \cdot sen(\alpha)$$

$$T3_{BC}(\alpha) = -1 \cdot cos(\alpha)$$

S3

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$M3_{CD}(\alpha) = M3_{BC}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(\alpha)$$

$$T3_{CD}(\alpha) = -M3_{BC}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{sen}(\alpha)$$

S4

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

8.1.5 *Cálculo dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade para o Sistema Real*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta_{10}} = &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{BA}(\alpha) \cdot M1_{BA}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{BA}(\alpha) \cdot T1_{BA}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{AD}(\alpha) \cdot M1_{AD}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{AD}(\alpha) \cdot T1_{AD}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{BC}(\alpha) \cdot M1_{BC}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{BC}(\alpha) \cdot T1_{BC}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{CD}(\alpha) \cdot M1_{CD}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{CD}(\alpha) \cdot T1_{CD}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha = \mathbf{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta_{20}} = &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{BA}(\alpha) \cdot M2_{BA}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{BA}(\alpha) \cdot T2_{BA}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{AD}(\alpha) \cdot M2_{AD}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{AD}(\alpha) \cdot T2_{AD}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{BC}(\alpha) \cdot M2_{BC}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{BC}(\alpha) \cdot T2_{BC}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{CD}(\alpha) \cdot M2_{CD}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{CD}(\alpha) \cdot T2_{CD}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha \\ &= \mathbf{-1{,}1108933143 \cdot 10^{-2}\ rad}\end{aligned}$$

(8.23)

$$\boldsymbol{\delta_{30}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{BA}(\alpha) \cdot M3_{BA}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{BA}(\alpha) \cdot T3_{BA}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{AD}(\alpha) \cdot M3_{AD}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{AD}(\alpha) \cdot T3_{AD}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{BC}(\alpha) \cdot M3_{BC}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{BC}(\alpha) \cdot T3_{BC}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{CD}(\alpha) \cdot M3_{CD}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{CD}(\alpha) \cdot T3_{CD}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\delta_{11}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[M1_{BA}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[T1_{BA}(\alpha)]^2}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[M1_{AD}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[T1_{AD}(\alpha)]^2}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[M1_{BC}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[T1_{BC}(\alpha)]^2}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[M1_{CD}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[T1_{CD}(\alpha)]^2}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha$$
$$= \mathbf{4,6605527016 \cdot 10^{-3}} \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{kN}}$$

$$\boldsymbol{\delta_{22}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[M2_{BA}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[T2_{BA}(\alpha)]^2}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[M2_{AD}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[T2_{AD}(\alpha)]^2}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[M2_{BC}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[T2_{BC}(\alpha)]^2}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[M2_{CD}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[T2_{CD}(\alpha)]^2}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha$$
$$= \mathbf{2,1624629432 \cdot 10^{-4}} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{kN \cdot m}}$$

$$\boldsymbol{\delta_{33}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[M3_{BA}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[T3_{BA}(\alpha)]^2}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[M3_{AD}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[T3_{AD}(\alpha)]^2}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[M3_{BC}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[T3_{BC}(\alpha)]^2}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[M3_{CD}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[T3_{CD}(\alpha)]^2}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha$$
$$= \mathbf{2,1624629432 \cdot 10^{-4}} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{kN \cdot m}}$$

$$\boldsymbol{\delta_{12}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M2_{BA}(\alpha) \cdot M1_{BA}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T2_{BA}(\alpha) \cdot T1_{BA}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M2_{AD}(\alpha) \cdot M1_{AD}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T2_{AD}(\alpha) \cdot T1_{AD}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M2_{BC}(\alpha) \cdot M1_{BC}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T2_{BC}(\alpha) \cdot T1_{BC}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M2_{CD}(\alpha) \cdot M1_{CD}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T2_{CD}(\alpha) \cdot T1_{CD}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\delta_{13}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M3_{BA}(\alpha) \cdot M1_{BA}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T3_{BA}(\alpha) \cdot T1_{BA}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M3_{AD}(\alpha) \cdot M1_{AD}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T3_{AD}(\alpha) \cdot T1_{AD}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M3_{BC}(\alpha) \cdot M1_{BC}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T3_{BC}(\alpha) \cdot T1_{BC}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M3_{CD}(\alpha) \cdot M1_{CD}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T3_{CD}(\alpha) \cdot T1_{CD}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha$$
$$= \boldsymbol{-6,4873888297 \cdot 10^{-4} \frac{1}{kN}}$$

$$\boldsymbol{\delta_{23}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M2_{BA}(\alpha) \cdot M3_{BA}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T2_{BA}(\alpha) \cdot T3_{BA}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M2_{AD}(\alpha) \cdot M3_{AD}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T2_{AD}(\alpha) \cdot T3_{AD}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M2_{BC}(\alpha) \cdot M3_{BC}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T2_{BC}(\alpha) \cdot T3_{BC}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M2_{CD}(\alpha) \cdot M3_{CD}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T2_{CD}(\alpha) \cdot T3_{CD}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha = \mathbf{0}$$

Para a determinação dos hiperestáticos resumidos na Figura 8.3, a equação (8.24) demonstra a compatibilização dos deslocamentos e rotações calculados em (8.23).

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{12} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 = 0 \\ \delta_{30} + \delta_{13} \cdot X_1 + \delta_{23} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 = 0 \end{cases} \tag{8.24}$$

$$X_1 = 0$$
$$X_2 = 51{,}3716694115\ kN \cdot m$$
$$X_3 = 0$$

<u>Cálculo das reações de apoio do Sistema Real</u> (◉⁺, ↟⁺, ↠⁺)

$$V_A = V0_A + V1_A \cdot X_1 + V2_A \cdot X_2 + V3_A \cdot X_3 = 94{,}2477796077\ kN \quad \Rightarrow \quad |V_A| = 94{,}2477796077\ kN\ ◉$$
$$V_C = V0_C + V1_C \cdot X_1 + V2_C \cdot X_2 + V3_C \cdot X_3 = 94{,}2477796077\ kN \quad \Rightarrow \quad |V_C| = 94{,}2477796077\ kN\ ◉$$
$$V_D = V0_D + V1_D \cdot X_1 + V2_D \cdot X_2 + V3_D \cdot X_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad |V_D| = 0 \tag{8.25}$$

$$|X_1| = 0$$

$$|X_2| = 51{,}3716694115\ kN \cdot m \ \ \downarrow \textbf{nó B} \uparrow$$

$$|X_3| = 0$$

As equações de momento fletor e torsor para o Sistema Real estão resumidas em (8.26) com as reações e hiperestáticos calculados em (8.25) e dispostos com o sentido correto na Figura 8.11.

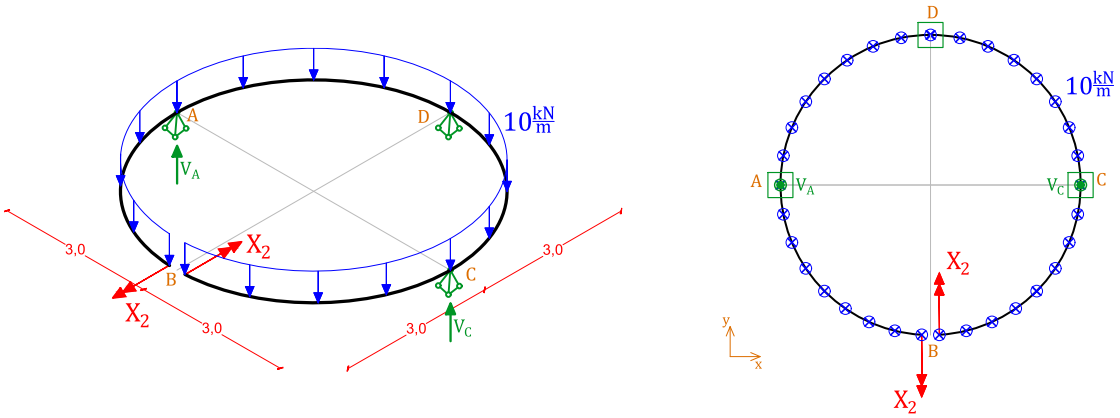


Figura 8.11 – Reações de apoio e hiperestáticos para o Sistema Real do Exercício 8.

$$M_{BA}(\alpha) = -10 \cdot 3 \cdot \alpha \cdot e'_f(\alpha) + X_2 \cdot cos\,(\alpha)$$

$$T_{BA}(\alpha) = -10 \cdot 3 \cdot \alpha \cdot e'_t(\alpha) + X_2 \cdot sen(\alpha)$$

S₁ $\quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

$$M_{AD}(\alpha) = -10 \cdot 3 \cdot \alpha \cdot e'_f(\alpha) + \left(V_A - 10 \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot e_f(\alpha) + M_{BA}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot cos(\alpha)$$

$$T_{AD}(\alpha) = -10 \cdot 3 \cdot \alpha \cdot e'_t(\alpha) + \left(V_A - 10 \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot e_t(\alpha) + M_{BA}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot sen(\alpha)$$

S₂ $\quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

(8.26)

$$M_{BC}(\alpha) = -10 \cdot 3 \cdot \alpha \cdot e'_f(\alpha) + X_2 \cdot cos\,(\alpha)$$

$$T_{BC}(\alpha) = 10 \cdot 3 \cdot \alpha \cdot e'_t(\alpha) - X_2 \cdot sen(\alpha)$$

S₃ $\quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

$$M_{CD}(\alpha) = -10 \cdot 3 \cdot \alpha \cdot e'_f(\alpha) + \left(V_C - 10 \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot e_f(\alpha) + M_{BC}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot cos(\alpha) + T_{BC}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot sen(\alpha)$$

$$T_{CD}(\alpha) = 10 \cdot 3 \cdot \alpha \cdot e'_t(\alpha) - \left(V_C - 10 \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot e_t(\alpha) - M_{BC}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot sen(\alpha) + T_{BC}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot cos(\alpha)$$

S₄ $\quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

8.2 SISTEMA PRINCIPAL DO SISTEMA VIRTUAL (FIGURA 8.12)

Para o Sistema Virtual a grelha do Exercício 8 será seccionada no ponto *B*, descarregada, e um esforço virtual será aplicado conforme Figura 8.12.

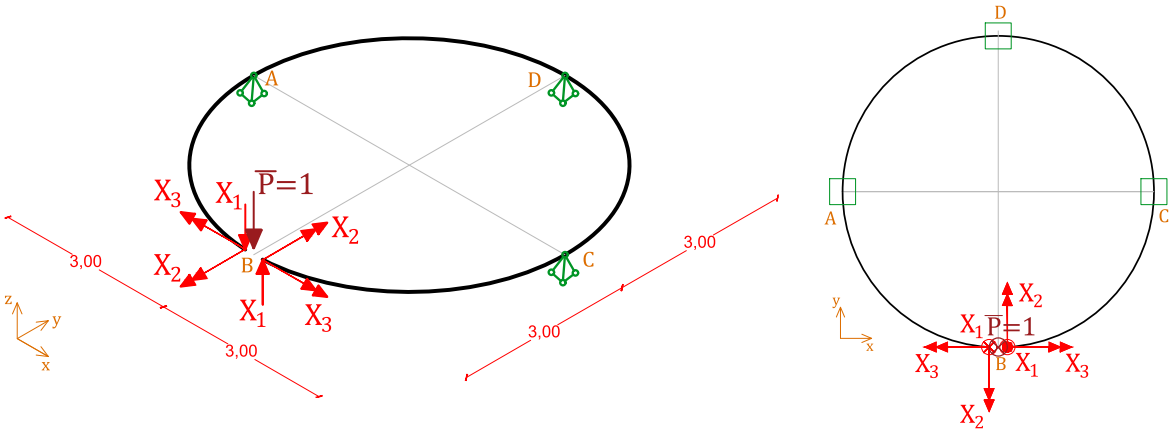


Figura 8.12 – Sistema Principal do Sistema Virtual do Exercício 8 em perspectiva isométrica e vista superior.

8.2.1 *Sistema [0] do Sistema Virtual (Figura 8.13)*

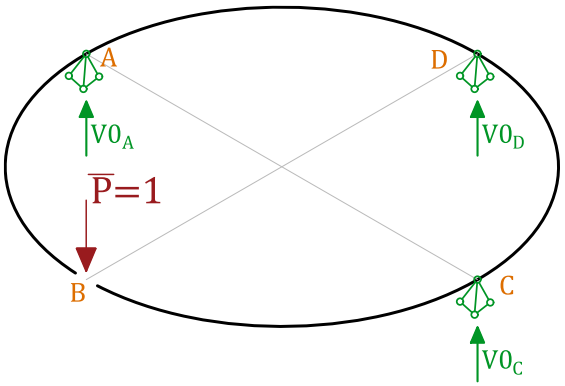


Figura 8.13 – Sistema [0] do Sistema Virtual.

Cálculo das reações de apoio

$$\boldsymbol{\Sigma F_Z}^{\odot^+} = \mathbf{0}$$
$$V0_A + V0_C + V0_D - 1 = 0 \tag{8.27}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{Y_B}}^{\uparrow^+} = \mathbf{0}$$
$$V0_A \cdot 3 - V0_C \cdot 3 = 0 \tag{8.28}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{X_A}}^{\twoheadrightarrow^+} = \mathbf{0}$$
$$V0_D \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 0 \tag{8.29}$$

Reações de Apoio		
$V0_A = 1\frac{kN}{kN}$	$V0_C = 1\frac{kN}{kN}$	$V0_D = -1\frac{kN}{kN}$

Tabela 8.5 – Resumo das reações de apoio do Sistema [0] do Sistema Virtual.

A Figura 8.5 mostra as seções transversais genéricas empregadas para a escrita das equações de esforços internos, conforme (8.30).

$$
\begin{aligned}
M0_{BA}(\alpha) &= -1 \cdot e_f(\alpha) && \textbf{S}_1 \\
& && 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \\
T0_{BA}(\alpha) &= -1 \cdot e_t(\alpha) \\
M0_{AD}(\alpha) &= (V0_A - 1) \cdot e_f(\alpha) + M0_{BA}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(\alpha) \\
&\quad - T0_{BA}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}(\alpha) && \textbf{S}_2 \\
& && 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \\
T0_{AD}(\alpha) &= (V0_A - 1) \cdot e_t(\alpha) + M0_{BA}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}(\alpha) \\
&\quad + T0_{BA}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(\alpha)
\end{aligned}
\qquad (8.30)
$$

Para a escrita das equações do trecho *BC* e *CD*, vale a observação que a carga unitária deverá ser contabilizada somente para uma das equações advindas do nó em que é aplicada. Nesta resolução optou-se por considerar em *B* no sentido horário, e consequentemente $M0_{BC}$ e $T0_{BC}$ serão nulos por não haver força nem momento no trecho, como pode ser visto em (8.31).

$$
\begin{aligned}
M0_{BC}(\alpha) &= 0 && \textbf{S}_3 \\
& && 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \\
T0_{BC}(\alpha) &= 0 \\
M0_{CD}(\alpha) &= V0_C \cdot e_f(\alpha) && \textbf{S}_4 \\
& && 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \\
T0_{CD}(\alpha) &= -V0_C \cdot e_t(\alpha)
\end{aligned}
\qquad (8.31)
$$

8.2.2 *Cálculo dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade para o Sistema Virtual*

O **Sistema Virtual** possui os mesmos Sistemas [1], [2], e [3] do **Sistema Real**, detalhados nos tópicos 8.1.2, 8.1.3, e 8.1.4, respectivamente. As integrais foram dispostas em (8.23), e só há modificação nos termos de carga, demonstrados em (8.32).

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta_{10}} = &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{BA}(\alpha)\cdot M1_{BA}(\alpha)}{E_c\cdot I_f}\cdot 3\cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{BA}(\alpha)\cdot T1_{BA}(\alpha)}{G_c\cdot I_t}\cdot 3\cdot d\alpha \\
&+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{AD}(\alpha)\cdot M1_{AD}(\alpha)}{E_c\cdot I_f}\cdot 3\cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{AD}(\alpha)\cdot T1_{AD}(\alpha)}{G_c\cdot I_t}\cdot 3\cdot d\alpha \\
&+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{BC}(\alpha)\cdot M1_{BC}(\alpha)}{E_c\cdot I_f}\cdot 3\cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{BC}(\alpha)\cdot T1_{BC}(\alpha)}{G_c\cdot I_t}\cdot 3\cdot d\alpha \\
&+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{CD}(\alpha)\cdot M1_{CD}(\alpha)}{E_c\cdot I_f}\cdot 3\cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{CD}(\alpha)\cdot T1_{CD}(\alpha)}{G_c\cdot I_t}\cdot 3\cdot d\alpha \\
&= \mathbf{2,3302763508\cdot 10^{-3}}\,\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{kN}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta_{20}} = &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{BA}(\alpha)\cdot M2_{BA}(\alpha)}{E_c\cdot I_f}\cdot 3\cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{BA}(\alpha)\cdot T2_{BA}(\alpha)}{G_c\cdot I_t}\cdot 3\cdot d\alpha \\
&+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{AD}(\alpha)\cdot M2_{AD}(\alpha)}{E_c\cdot I_f}\cdot 3\cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{AD}(\alpha)\cdot T2_{AD}(\alpha)}{G_c\cdot I_t}\cdot 3\cdot d\alpha \\
&+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{BC}(\alpha)\cdot M2_{BC}(\alpha)}{E_c\cdot I_f}\cdot 3\cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{BC}(\alpha)\cdot T2_{BC}(\alpha)}{G_c\cdot I_t}\cdot 3\cdot d\alpha \\
&+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{CD}(\alpha)\cdot M2_{CD}(\alpha)}{E_c\cdot I_f}\cdot 3\cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{CD}(\alpha)\cdot T2_{CD}(\alpha)}{G_c\cdot I_t}\cdot 3\cdot d\alpha \\
&= \mathbf{-3,2436944148\cdot 10^{-4}}\,\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{kN}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta_{30}} = &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{BA}(\alpha)\cdot M3_{BA}(\alpha)}{E_c\cdot I_f}\cdot 3\cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{BA}(\alpha)\cdot T3_{BA}(\alpha)}{G_c\cdot I_t}\cdot 3\cdot d\alpha \\
&+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{AD}(\alpha)\cdot M3_{AD}(\alpha)}{E_c\cdot I_f}\cdot 3\cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{AD}(\alpha)\cdot T3_{AD}(\alpha)}{G_c\cdot I_t}\cdot 3\cdot d\alpha \\
&+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{BC}(\alpha)\cdot M3_{BC}(\alpha)}{E_c\cdot I_f}\cdot 3\cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{BC}(\alpha)\cdot T3_{BC}(\alpha)}{G_c\cdot I_t}\cdot 3\cdot d\alpha \\
&+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{CD}(\alpha)\cdot M3_{CD}(\alpha)}{E_c\cdot I_f}\cdot 3\cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{CD}(\alpha)\cdot T3_{CD}(\alpha)}{G_c\cdot I_t}\cdot 3\cdot d\alpha \\
&= \mathbf{-3,2436944148\cdot 10^{-4}}\,\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{kN}}
\end{aligned}
$$

(8.32)

Com os termos de carga atualizados conforme (8.32), faz-se a compatibilização dos deslocamentos e rotações conforme (8.33).

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{12} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 = 0 \\ \delta_{30} + \delta_{13} \cdot X_1 + \delta_{23} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 = 0 \end{cases} \tag{8.33}$$

$$X_1 = -0{,}5$$
$$X_2 = 1{,}5 \ m$$
$$X_3 = 0$$

<u>Cálculo das reações de apoio do Sistema Virtual</u> (◉⁺, ↟⁺, ↠⁺)

$$V'_A = V0_A + V1_A \cdot X_1 + V2_A \cdot X_2 + V3_A \cdot X_3 = 1\frac{kN}{kN} \quad \Rightarrow \quad |V'_A| = 1\frac{kN}{kN} \circledcirc$$
$$V'_C = V0_C + V1_C \cdot X_1 + V2_C \cdot X_2 + V3_C \cdot X_3 = 1\frac{kN}{kN} \quad \Rightarrow \quad |V'_C| = 1\frac{kN}{kN} \circledcirc$$
$$V'_D = V0_D + V1_D \cdot X_1 + V2_D \cdot X_2 + V3_D \cdot X_3 = -1\frac{kN}{kN} \quad \Rightarrow \quad |V'_D| = 1\frac{kN}{kN} \otimes \tag{8.34}$$

$$|X_1| = 0{,}5\frac{kN}{kN} \circledcirc \textbf{ nó B } \otimes$$

$$|X_2| = 1{,}5\frac{kN \cdot m}{kN} \ \downarrow \textbf{nó B} \uparrow$$

$$|X_3| = 0$$

A Figura 8.14 exibe as reações de apoio e hiperestáticos com os sentidos corretos. As equações estão apresentadas em (8.35).

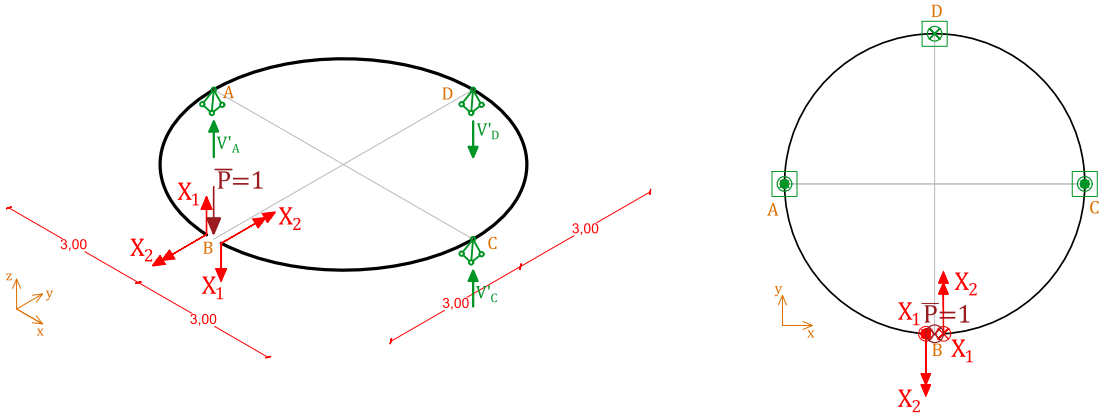


Figura 8.14 – Reações de apoio e hiperestáticos para o Sistema Virtual do Exercício 8.

$$M'_{BA}(\alpha) = (X_1 - 1) \cdot e_f(\alpha) + X_2 \cdot cos\,(\alpha)$$

$$T'_{BA}(\alpha) = (X_1 - 1) \cdot e_t(\alpha) + X_2 \cdot sen\,(\alpha)$$

S1

$$0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

(8.35)

$$M'_{AD}(\alpha) = (V'_A - 1 + X_1) \cdot e_f(\alpha) + M'_{BA}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot cos(\alpha)$$

$$T'_{AD}(\alpha) = (V'_A - 1 + X_1) \cdot e_t(\alpha) + M'_{BA}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot sen(\alpha)$$

S2

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$M'_{BC}(\alpha) = -X_1 \cdot e_f(\alpha) + X_2 \cdot cos\,(\alpha)$$

$$T'_{BC}(\alpha) = X_1 \cdot e_t(\alpha) - X_2 \cdot sen\,(\alpha)$$

S3

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$M'_{CD}(\alpha) = (V'_C - X_1) \cdot e_f(\alpha) + M'_{BC}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot cos(\alpha)$$

$$T'_{CD}(\alpha) = -(V'_C - X_1) \cdot e_t(\alpha) - M'_{BC}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot sen(\alpha)$$

S4

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

8.3 CÁLCULO DE DESLOCAMENTO E/OU ROTAÇÃO

O deslocamento vertical em *B* está apresentado em (8.36), com as equações extraídas de (8.26) e (8.35).

$$\begin{aligned}\delta_{V_B} = &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{BA}(\alpha) \cdot M'_{BA}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T_{BA}(\alpha) \cdot T'_{BA}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{AD}(\alpha) \cdot M'_{AD}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T_{AD}(\alpha) \cdot T'_{AD}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{BC}(\alpha) \cdot M'_{BC}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T_{BC}(\alpha) \cdot T'_{BC}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{CD}(\alpha) \cdot M'_{CD}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 3 \cdot d\alpha \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T_{CD}(\alpha) \cdot T'_{CD}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 3 \cdot d\alpha = \mathbf{7,92588 \cdot 10^{-3}\ m}\end{aligned} \tag{8.36}$$

9 EXERCÍCIO 9 (HIPERESTÁTICO, ARCO, CARGA LINEAR, BIENGASTADO)

Determinar o deslocamento vertical (δ_{V_D}) e as rotações associadas ao eixo x (θ_{x_D}) e ao eixo y (θ_{y_D}) em D, na grelha hiperestática da Figura 9.1. Considerar somente os esforços de flexão e torção.

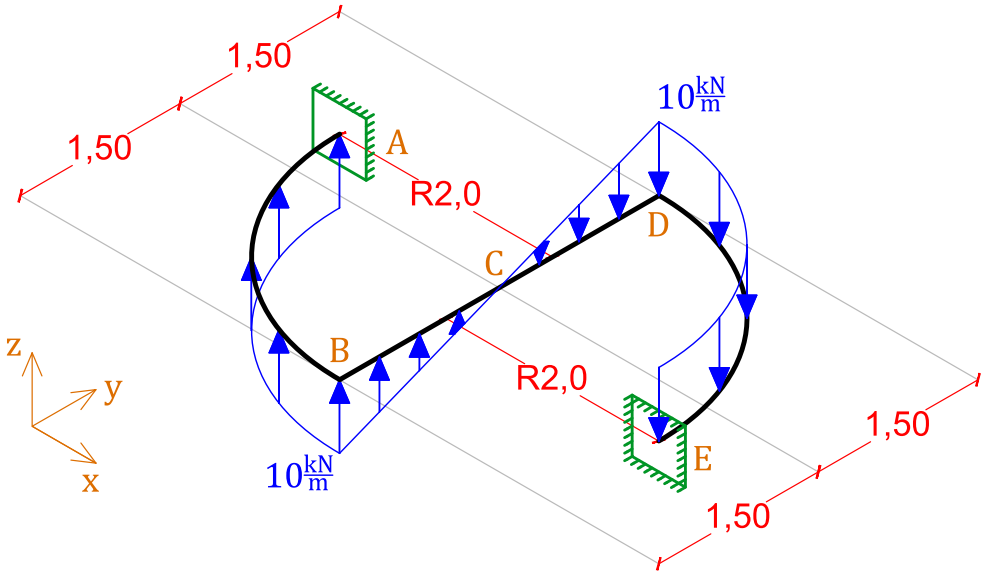


Figura 9.1 – Grelha do Exercício 9.

Dados do problema:

$E_c = 25\ GPa$ (Módulo de elasticidade longitudinal)

$G_c = 10\ GPa$ (Módulo de elasticidade transversal)

$I_f = 7{,}2 \cdot 10^{-3}\ m^4$ (Momento de inércia à flexão)

$I_t = 7{,}526 \cdot 10^{-3}\ m^4$ (Momento de inércia à torção)

A grelha da questão 9 possui dois engastes, consequentemente, é três vezes hiperestática. A resolução será feita pelo Método das Forças a partir da retirada do engaste em A, conforme Figura 9.2.

9.1 SISTEMA PRINCIPAL DO SISTEMA REAL (FIGURA 9.2)

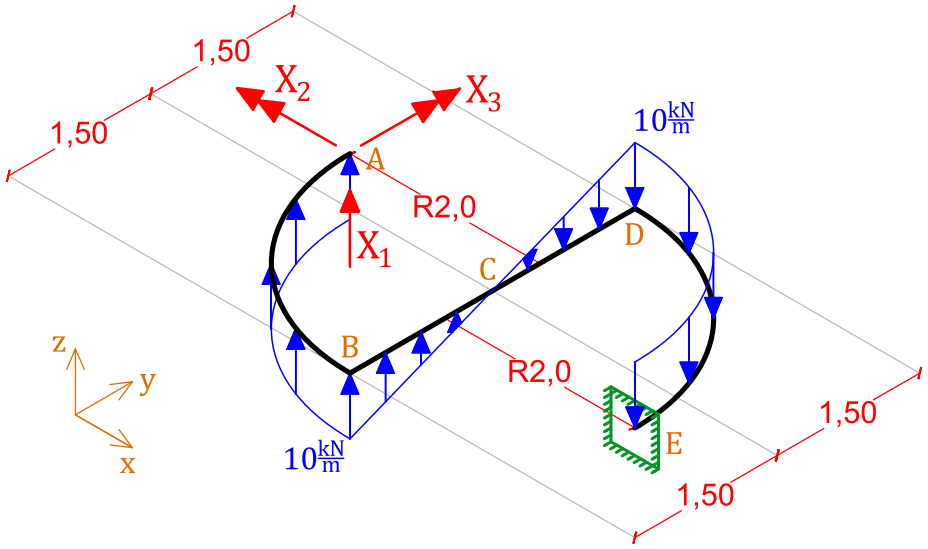


Figura 9.2 – Sistema Principal do Sistema Real do Exercício 9.

O Sistema [0] do Sistema Real é apresentado no tópico 9.2 pela remoção dos hiperestáticos X_1, X_2 e X_3.

9.2 SISTEMA [0] DO SISTEMA REAL (FIGURA 9.3)

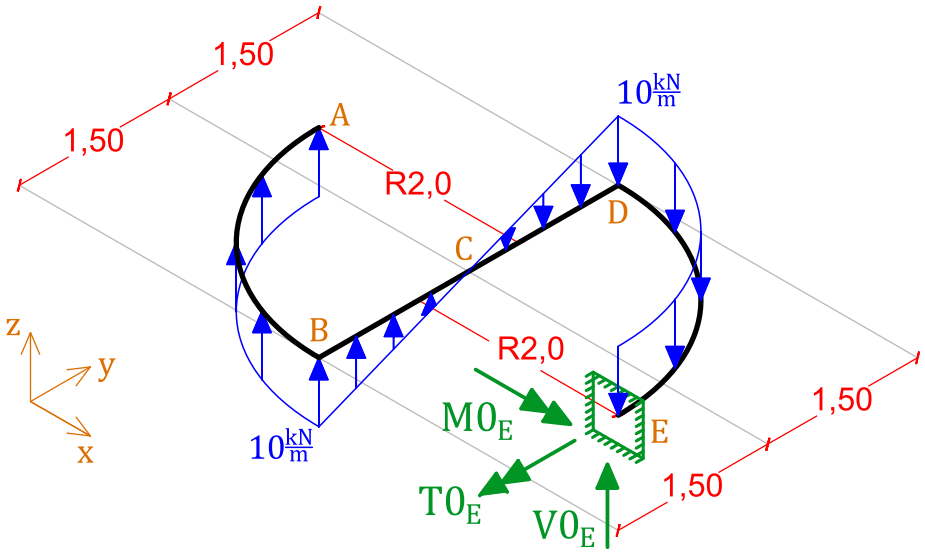


Figura 9.3 – Sistema [0] do Sistema Real.

As reações de apoio serão calculadas a partir das equações de equilíbrio da estática, e a Figura 9.4 mostra a posição das resultantes para as cargas uniformemente distribuídas nos arcos *AB* e *DE*, determinadas em (9.1).

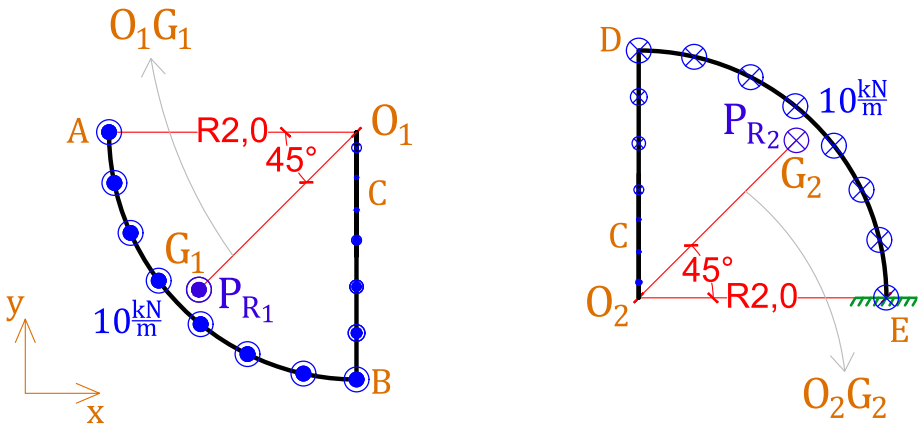


Figura 9.4 – Detalhe da posição das resultantes P_{R_1} e P_{R_2} em vista superior.

Determinação das resultantes dos carregamentos distribuídos nos arcos

$$OG(\alpha) = \frac{2 \cdot R \cdot sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\alpha}$$

$$O_1G_1 = O_2G_2 = \frac{2 \cdot 2 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{2}} \tag{9.1}$$

$$P_{R_1} = P_{R_2} = 10 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2$$

Cálculo das reações de apoio

$$\boldsymbol{\Sigma F_Z}^{\odot^+} = \mathbf{0}$$

$$V0_E + P_{R_1} - P_{R_2} + \frac{1{,}5 \cdot 10}{2} - \frac{1{,}5 \cdot 10}{2} = 0 \tag{9.2}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{Y_A}}^{\downarrow^+} = \mathbf{0}$$

$$V0_E \cdot 4 + T0_E - P_{R_2} \cdot \left[O_2G_2 \cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\right] + P_{R_1} \cdot \left[2 - O_1G_1 \cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] + \frac{1{,}5 \cdot 10}{2} \cdot 2 - \frac{1{,}5 \cdot 10}{2} \cdot 2 = 0 \tag{9.3}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{X_A}}^{\leftarrow^+} = \mathbf{0}$$

$$V0_E \cdot 1 - M0_E + P_{R_2} \cdot \left[O_2G_2 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1\right] + P_{R_1} \cdot \left[O_1G_1 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] + \frac{1{,}5 \cdot 10}{2} \cdot \left[\frac{1{,}5 \cdot 2}{3} - 0{,}5\right] + \frac{1{,}5 \cdot 10}{2} \cdot \left[\frac{1{,}5 \cdot 2}{3} + 0{,}5\right] = 0 \tag{9.4}$$

Reações de Apoio		
$V0_E = 0\ kN$	$T0_E = 80{,}0\ kN \cdot m$	$M0_E = 63{,}584\ kN \cdot m$

Tabela 9.1 – Resumo das reações de apoio do Sistema [0] do Sistema Real.

As seções que serão utilizadas para as equações estão demonstradas na Figura 9.5.

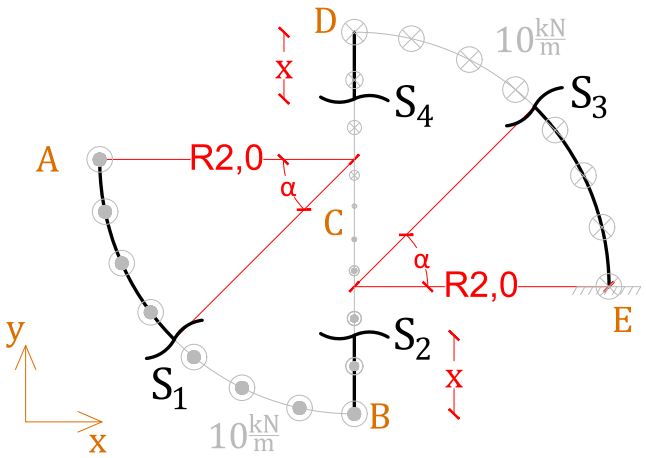


Figura 9.5 – Determinação das seções para as equações de momento fletor e torsor em vista superior.

A Figura 9.6 ilustra as excentricidades para a determinação das equações $M0_{AB}(\alpha)$ e $T0_{AB}(\alpha)$. As excentricidades estão descritas em (9.5), enquanto as equações dos momentos fletor e torsor da seção AB são apresentadas em (9.6).

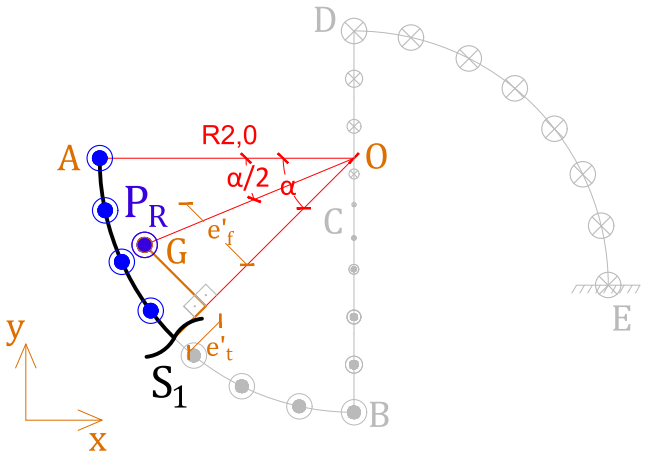


Figura 9.6 – Detalhes das excentricidades para as equações $M0_{AB}(\alpha)$ e $T0_{AB}(\alpha)$.

$$e'_f(\alpha) = OG(\alpha) \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \qquad e'_t(\alpha) = 2 - OG(\alpha) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{9.5}$$

$$M0_{AB}(\alpha) = 10 \cdot 2 \cdot \alpha \cdot e'_f(\alpha)$$

$$T0_{AB}(\alpha) = -10 \cdot 2 \cdot \alpha \cdot e'_t(\alpha)$$

$$\mathbf{S_1} \qquad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \tag{9.6}$$

Em relação ao trecho *ED* (S_3), além da contribuição advinda da carga distribuída, as reações de apoio em E contribuem com os esforços internos conforme ilustrado na Figura 9.7, e explicitado em (9.7).

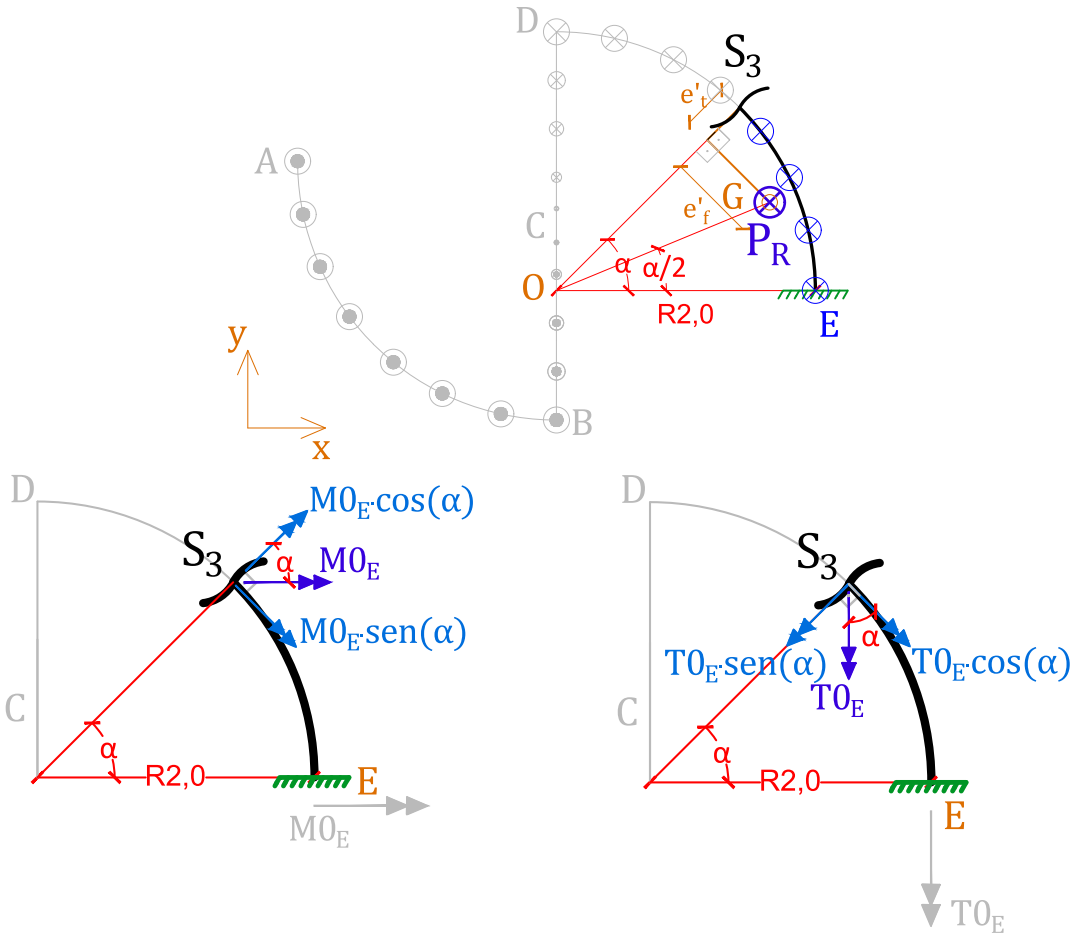


Figura 9.7 – Parcelas para as equações $M0_{ED}(\alpha)$ e $T0_{ED}(\alpha)$.

$$M0_{ED}(\alpha) = -M0_E \cdot \cos(\alpha) + T0_E \cdot \mathrm{sen}(\alpha) - 10 \cdot 2 \cdot \alpha \cdot e'_f(\alpha)$$

$$T0_{ED}(\alpha) = M0_E \cdot \mathrm{sen}(\alpha) + T0_E \cdot \cos(\alpha) + 10 \cdot 2 \cdot \alpha \cdot e'_t(\alpha)$$

$$\mathbf{S_3} \qquad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \tag{9.7}$$

As equações para o trecho reto (S_2 e S_4) estão dispostas em (9.8), com destaque na Figura 9.8 para os momentos advindos dos arcos.

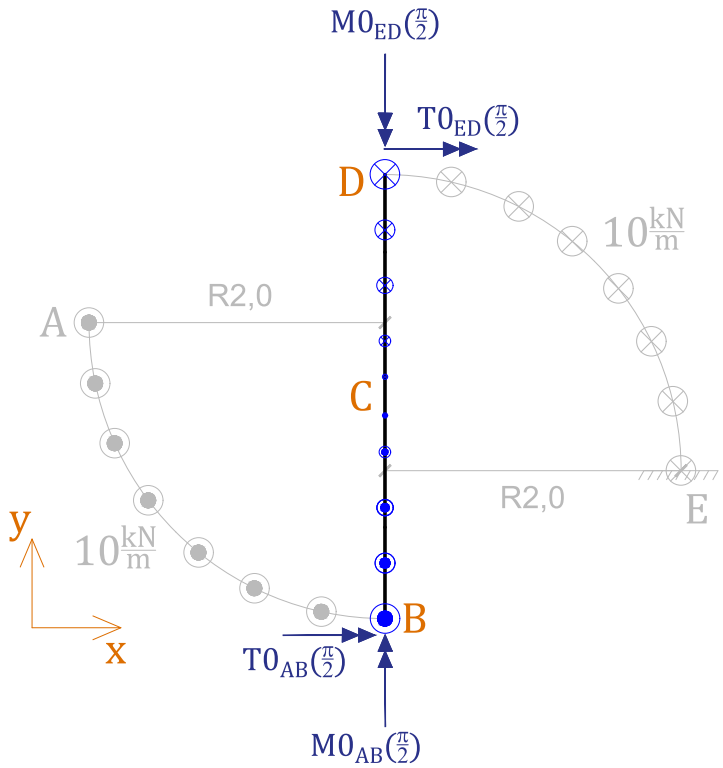


Figura 9.8 – Parcelas para as equações das seções 2 e 4 (S_2 e S_4).

$$M0_{BC}(x) = T0_{AB}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 10 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot x + \left(-\frac{10}{1{,}5} \cdot x + 10\right) \cdot \frac{x^2}{2} + \left(\frac{\frac{10}{1{,}5} \cdot x^2}{2}\right) \cdot \frac{2 \cdot x}{3} \qquad \mathbf{S_2},\ 0 \le x \le 1{,}5$$

$$T0_{BC}(x) = -M0_{AB}\left(\frac{\pi}{2}\right) \tag{9.8}$$

$$M0_{DC}(x) = T0_{ED}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 10 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot x - \left(-\frac{10}{1{,}5} \cdot x + 10\right) \cdot \frac{x^2}{2} - \left(\frac{\frac{10}{1{,}5} \cdot x^2}{2}\right) \cdot \frac{2 \cdot x}{3} \qquad \mathbf{S_4},\ 0 \le x \le 1{,}5$$

$$T0_{DC}(x) = -M0_{ED}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

9.3 SISTEMA [1] DO SISTEMA REAL (FIGURA 9.9)

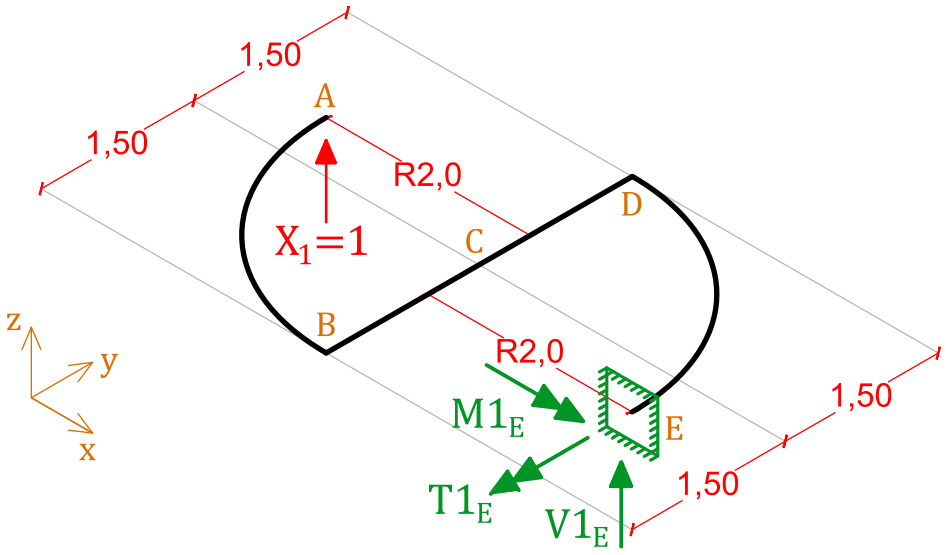


Figura 9.9 – Sistema [1] do Sistema Real.

Cálculo das reações de apoio

$$\boldsymbol{\Sigma F_Z}^{\odot^+} = \mathbf{0}$$
$$V1_E + 1 = 0 \tag{9.9}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{X_A}}^{\curvearrowleft^+} = \mathbf{0}$$
$$V1_E \cdot 1 - M1_E = 0 \tag{9.10}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{Y_A}}^{\downarrow^+} = \mathbf{0}$$
$$V1_E \cdot 4 + T1_E = 0 \tag{9.11}$$

Reações de Apoio		
$V1_E = -1\frac{kN}{kN}$	$T1_E = 4\frac{kN \cdot m}{kN}$	$M1_E = -1\frac{kN \cdot m}{kN}$

Tabela 9.2 – Resumo das reações de apoio do Sistema [1] do Sistema Real.

A Figura 9.10 ilustra as excentricidades para a determinação das equações $M1_{AB}(\alpha)$, $T1_{AB}(\alpha)$, $M1_{ED}(\alpha)$, $T1_{ED}(\alpha)$. Essas excentricidades estão descritas em (9.12), enquanto as equações dos momentos fletor e torsor são apresentadas em (9.13).

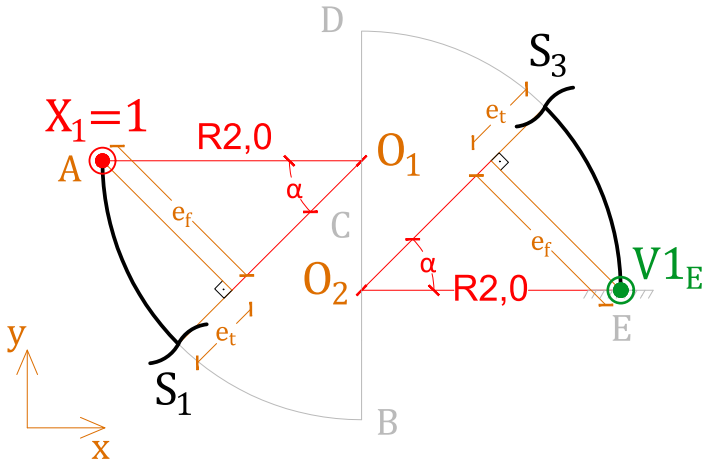


Figura 9.10 – Detalhes das excentricidades para as equações $M1_{AB}(\alpha)$, $T1_{AB}(\alpha)$, $M1_{ED}(\alpha)$, e $T1_{ED}(\alpha)$.

$$e_f(\alpha) = 2 \cdot \text{sen}(\alpha) \qquad e_t(\alpha) = 2 \cdot [1 - \cos(\alpha)] \tag{9.12}$$

$$M1_{AB}(\alpha) = 1 \cdot e_f(\alpha)$$

$$T1_{AB}(\alpha) = -1 \cdot e_t(\alpha)$$

S1

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$M1_{BC}(x) = 1 \cdot x + T1_{AB}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$T1_{BC}(x) = -M1_{AB}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

S2

$$0 \leq x \leq 1{,}5$$

$$M1_{ED}(\alpha) = V1_E \cdot e_f(\alpha) - M1_E \cdot \cos(\alpha) + T1_E \cdot \text{sen}(\alpha)$$

$$T1_{ED}(\alpha) = -V1_E \cdot e_t(\alpha) + M1_E \cdot \text{sen}(\alpha) + T1_E \cdot \cos(\alpha)$$

S3

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$M1_{DC}(x) = V1_E \cdot x + T1_{ED}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$T1_{DC}(x) = -M1_{ED}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

S4

$$0 \leq x \leq 1{,}5$$

(9.13)

9.4 SISTEMA [2] DO SISTEMA REAL (FIGURA 9.11)

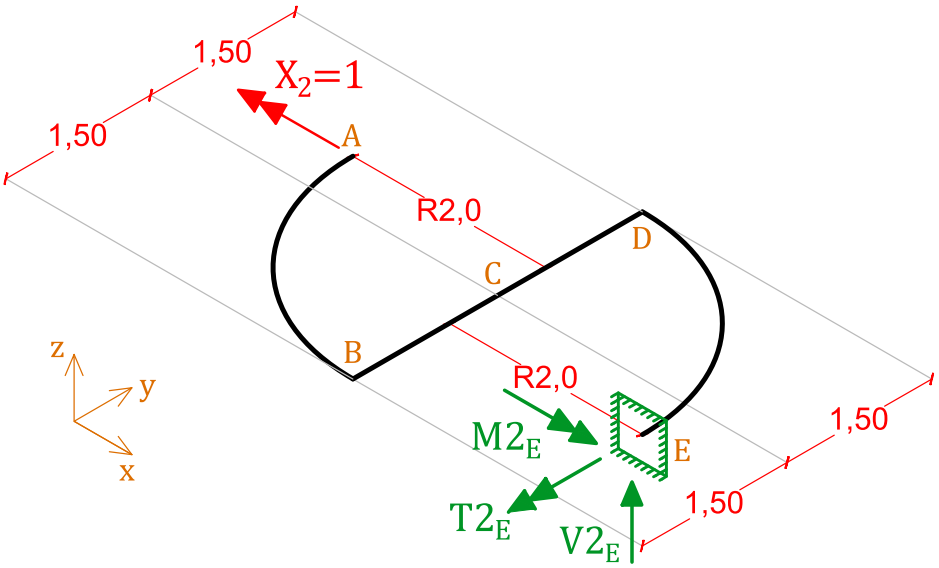


Figura 9.11 – Sistema [2] do Sistema Real.

Cálculo das reações de apoio

$$\boldsymbol{\Sigma F_Z}^{\odot+} = \mathbf{0}$$
$$V2_E = 0 \tag{9.14}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{X_A}}^{\leftarrow+} = \mathbf{0}$$
$$V2_E \cdot 1 - M2_E + 1 = 0 \tag{9.15}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{Y_A}}^{\downarrow+} = \mathbf{0}$$
$$V2_E \cdot 4 + T2_E = 0 \tag{9.16}$$

Reações de Apoio		
$V2_E = 0\,\frac{kN}{kN \cdot m}$	$T2_E = 0\,\frac{kN \cdot m}{kN \cdot m}$	$M2_E = 1\,\frac{kN \cdot m}{kN \cdot m}$

Tabela 9.3 – Resumo das reações de apoio do Sistema [2] do Sistema Real.

$$M2_{AB}(\alpha) = -1 \cdot \cos(\alpha)$$
$$T2_{AB}(\alpha) = 1 \cdot \operatorname{sen}(\alpha)$$
$$\mathbf{S_1}\qquad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \tag{9.17}$$

$$M2_{BC}(x) = T2_{AB}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$T2_{BC}(x) = 0$$

S₂

$$0 \leq x \leq 1{,}5$$

$$M2_{ED}(\alpha) = -1 \cdot \cos(\alpha)$$

$$T2_{ED}(\alpha) = 1 \cdot \text{sen}(\alpha)$$

S₃

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$M2_{DC}(x) = T2_{ED}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$T2_{DC}(x) = 0$$

S₄

$$0 \leq x \leq 1{,}5$$

9.5 SISTEMA [3] DO SISTEMA REAL (FIGURA 9.12)

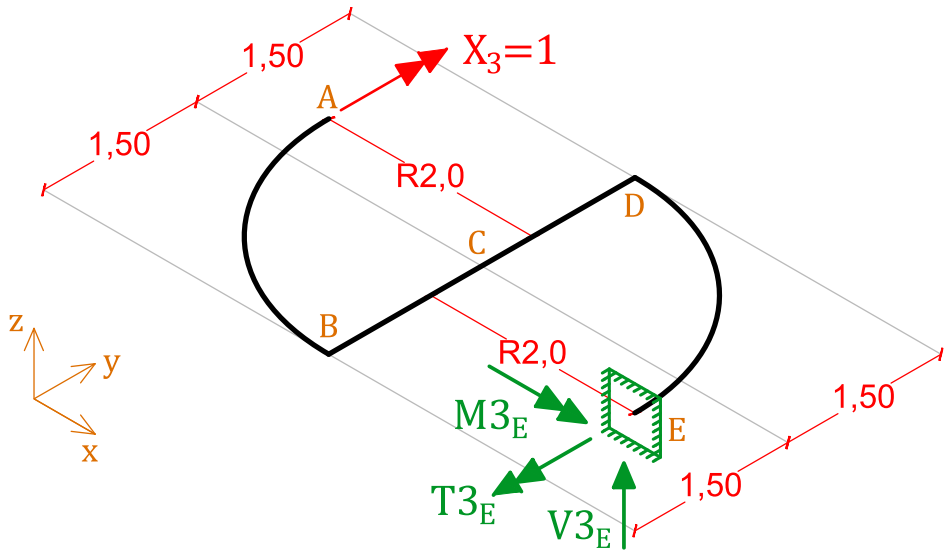


Figura 9.12 – Sistema [3] do Sistema Real.

Cálculo das reações de apoio

$$\boldsymbol{\Sigma F_Z}^{\odot^+} = \mathbf{0}$$

$$V3_E = 0 \tag{9.18}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{X_A}}^{\curvearrowleft^+} = \mathbf{0}$$

$$V3_E \cdot 1 - M3_E = 0 \tag{9.19}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{Y_A}}^{\Downarrow +} = \mathbf{0}$$
$$V3_E \cdot 4 + T3_E - 1 = 0 \tag{9.20}$$

Reações de Apoio		
$V3_E = 0\,\frac{kN}{kN \cdot m}$	$T3_E = 1\,\frac{kN \cdot m}{kN \cdot m}$	$M3_E = 0\,\frac{kN \cdot m}{kN \cdot m}$

Tabela 9.4 – Resumo das reações de apoio do Sistema [3] do Sistema Real.

$$M3_{AB}(\alpha) = 1 \cdot \text{sen}(\alpha)$$
$$T3_{AB}(\alpha) = 1 \cdot \cos(\alpha) \qquad \mathbf{S_1}\ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

$$M3_{BC}(x) = 0$$
$$T3_{BC}(x) = -M3_{AB}\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad \mathbf{S_2}\ 0 \le x \le 1{,}5$$

$$M3_{ED}(\alpha) = 1 \cdot \text{sen}(\alpha)$$
$$T3_{ED}(\alpha) = 1 \cdot \cos(\alpha) \qquad \mathbf{S_3}\ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \tag{9.21}$$

$$M3_{DC}(x) = 0$$
$$T3_{DC}(x) = -M3_{ED}\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad \mathbf{S_4}\ 0 \le x \le 1{,}5$$

9.5.1 *Cálculo dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade para o Sistema Real*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta_{10}} = &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{AB}(\alpha) \cdot M1_{AB}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{AB}(\alpha) \cdot T1_{AB}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha \\ &+ \int_0^{1,5} \frac{M0_{BC}(x) \cdot M1_{BC}(x)}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{T0_{BC}(x) \cdot T1_{BC}(x)}{G_c \cdot I_t} \cdot dx \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{ED}(\alpha) \cdot M1_{ED}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{ED}(\alpha) \cdot T1_{ED}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha \\ &+ \int_0^{1,5} \frac{M0_{DC}(x) \cdot M1_{DC}(x)}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{T0_{DC}(x) \cdot T1_{DC}(x)}{G_c \cdot I_t} \cdot dx \\ &= \mathbf{1{,}491168613 \cdot 10^{-2}\ m}\end{aligned} \tag{9.22}$$

$$\boldsymbol{\delta_{20}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{AB}(\alpha) \cdot M2_{AB}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{AB}(\alpha) \cdot T2_{AB}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{1,5} \frac{M0_{BC}(x) \cdot M2_{BC}(x)}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{T0_{BC}(x) \cdot T2_{BC}(x)}{G_c \cdot I_t} \cdot dx$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{ED}(\alpha) \cdot M2_{ED}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{ED}(\alpha) \cdot T2_{ED}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{1,5} \frac{M0_{DC}(x) \cdot M2_{DC}(x)}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{T0_{DC}(x) \cdot T2_{DC}(x)}{G_c \cdot I_t} \cdot dx$$
$$= \mathbf{3,0303813183 \cdot 10^{-3}}\ \boldsymbol{rad}$$

$$\boldsymbol{\delta_{30}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{AB}(\alpha) \cdot M3_{AB}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{AB}(\alpha) \cdot T3_{AB}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{1,5} \frac{M0_{BC}(x) \cdot M3_{BC}(x)}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{T0_{BC}(x) \cdot T3_{BC}(x)}{G_c \cdot I_t} \cdot dx$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{ED}(\alpha) \cdot M3_{ED}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{ED}(\alpha) \cdot T3_{ED}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{1,5} \frac{M0_{DC}(x) \cdot M3_{DC}(x)}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{T0_{DC}(x) \cdot T3_{DC}(x)}{G_c \cdot I_t} \cdot dx$$
$$= \mathbf{4,4539458385 \cdot 10^{-3}}\ \boldsymbol{rad}$$

$$\boldsymbol{\delta_{11}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[M1_{AB}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[T1_{AB}(\alpha)]^2}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{1,5} \frac{[M1_{BC}(x)]^2}{E_c \cdot I_f} \cdot dx$$
$$+ \int_0^{1,5} \frac{[T1_{BC}(x)]^2}{G_c \cdot I_t} \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[M1_{ED}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[T1_{ED}(\alpha)]^2}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{1,5} \frac{[M1_{DC}(x)]^2}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{[T1_{DC}(x)]^2}{G_c \cdot I_t} \cdot dx = \mathbf{6,3921860916 \cdot 10^{-4}}\ \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{kN}}$$

$$\boldsymbol{\delta_{22}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[M2_{AB}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[T2_{AB}(\alpha)]^2}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{1,5} \frac{[M2_{BC}(x)]^2}{E_c \cdot I_f} \cdot dx$$
$$+ \int_0^{1,5} \frac{[T2_{BC}(x)]^2}{G_c \cdot I_t} \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[M2_{ED}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[T2_{ED}(\alpha)]^2}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{1,5} \frac{[M2_{DC}(x)]^2}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{[T2_{DC}(x)]^2}{G_c \cdot I_t} \cdot dx$$
$$= \mathbf{7,5863151501 \cdot 10^{-5}}\ \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{kN} \cdot \boldsymbol{m}}$$

$$\boldsymbol{\delta_{33}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[M3_{AB}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[T3_{AB}(\alpha)]^2}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{1,5} \frac{[M3_{BC}(x)]^2}{E_c \cdot I_f} \cdot dx$$
$$+ \int_0^{1,5} \frac{[T3_{BC}(x)]^2}{G_c \cdot I_t} \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[M3_{ED}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[T3_{ED}(\alpha)]^2}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{1,5} \frac{[M3_{DC}(x)]^2}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{[T3_{DC}(x)]^2}{G_c \cdot I_t} \cdot dx$$
$$= \mathbf{9,9058297218 \cdot 10^{-5}}\ \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{kN} \cdot \boldsymbol{m}}$$

$$\boldsymbol{\delta_{12}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M2_{AB}(\alpha) \cdot M1_{AB}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T2_{AB}(\alpha) \cdot T1_{AB}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{1,5} \frac{M2_{BC}(x) \cdot M1_{BC}(x)}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{T2_{BC}(x) \cdot T1_{BC}(x)}{G_c \cdot I_t} \cdot dx$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M2_{ED}(\alpha) \cdot M1_{ED}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T2_{ED}(\alpha) \cdot T1_{ED}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{1,5} \frac{M2_{DC}(x) \cdot M1_{DC}(x)}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{T2_{DC}(x) \cdot T1_{DC}(x)}{G_c \cdot I_t} \cdot dx$$
$$= \boldsymbol{-7,0047147945 \cdot 10^{-6} \frac{1}{kN}}$$

$$\boldsymbol{\delta_{13}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M3_{AB}(\alpha) \cdot M1_{AB}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T3_{AB}(\alpha) \cdot T1_{AB}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{1,5} \frac{M3_{BC}(x) \cdot M1_{BC}(x)}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{T3_{BC}(x) \cdot T1_{BC}(x)}{G_c \cdot I_t} \cdot dx$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M3_{ED}(\alpha) \cdot M1_{ED}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T3_{ED}(\alpha) \cdot T1_{ED}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{1,5} \frac{M3_{DC}(x) \cdot M1_{DC}(x)}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{T3_{DC}(x) \cdot T1_{DC}(x)}{G_c \cdot I_t} \cdot dx$$
$$= \boldsymbol{1,903848792 \cdot 10^{-4} \frac{1}{kN}}$$

$$\boldsymbol{\delta_{23}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M2_{AB}(\alpha) \cdot M3_{AB}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T2_{AB}(\alpha) \cdot T3_{AB}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{1,5} \frac{M2_{BC}(x) \cdot M3_{BC}(x)}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{T2_{BC}(x) \cdot T3_{BC}(x)}{G_c \cdot I_t} \cdot dx$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M2_{ED}(\alpha) \cdot M3_{ED}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T2_{ED}(\alpha) \cdot T3_{ED}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{1,5} \frac{M2_{DC}(x) \cdot M3_{DC}(x)}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{T2_{DC}(x) \cdot T3_{DC}(x)}{G_c \cdot I_t} \cdot dx$$
$$= \boldsymbol{1,5463430478 \cdot 10^{-5} \frac{1}{kN \cdot m}}$$

Para a determinação dos hiperestáticos resumidos na Figura 9.2, a equação (9.23) demonstra a compatibilização dos deslocamentos e rotações calculados em (9.22).

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{12} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 = 0 \\ \delta_{30} + \delta_{13} \cdot X_1 + \delta_{23} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 = 0 \end{cases} \tag{9.23}$$

$$X_1 = -29{,}4924045168\ kN$$
$$X_2 = -46{,}5382389904\ kN \cdot m$$
$$X_3 = 18{,}9848090336\ kN \cdot m$$

Cálculo das reações de apoio do Sistema Real ($\odot^+, \uparrow^+, \twoheadrightarrow^+$)

$$
\begin{aligned}
V_E &= V0_E + V1_E \cdot X_1 + V2_E \cdot X_2 + V3_E \cdot X_3 \\
&= 29{,}4924045168\ kN \quad \Rightarrow \quad |V_E| = 29{,}4924045168\ kN\ \odot \\
M_E &= M0_E + M1_E \cdot X_1 + M2_E \cdot X_2 + M3_E \cdot X_3 \\
&= 46{,}5382389904\ kN \cdot m \quad \Rightarrow \quad |M_E| = 46{,}5382389904\ kN \cdot m\ \twoheadrightarrow \\
T_E &= -T0_E - T1_E \cdot X_1 - T2_E \cdot X_2 - T3_E \cdot X_3 \\
&= 18{,}9848090336\ kN \cdot m \quad \Rightarrow \quad |T_E| = 18{,}9848090336\ kN \cdot m\ \twoheadrightarrow
\end{aligned}
\tag{9.24}
$$

$$V_A = |X_1| = 29{,}4924045168\ kN\ \otimes$$

$$M_A = |X_2| = 46{,}5382389904\ kN \cdot m\ \twoheadrightarrow$$

$$T_A = |X_3| = 18{,}9848090336\ kN \cdot m\ \twoheadrightarrow$$

As equações de momento fletor e torsor para o Sistema Real estão resumidas em (9.25) com as reações e hiperestáticos calculados em (9.24) e dispostos com sentido correto na Figura 9.13.

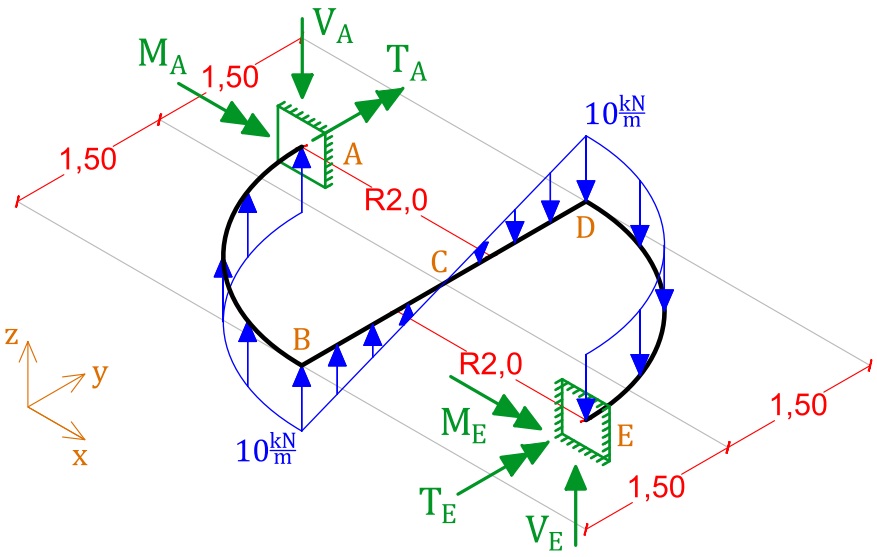


Figura 9.13 – Reações de apoio para o Sistema Real do Exercício 9.

$$
\begin{aligned}
M_{AB}(\alpha) &= 10 \cdot 2 \cdot \alpha \cdot e_f'(\alpha) - V_A \cdot e_f(\alpha) + M_A \cdot \cos(\alpha) + T_A \\
&\quad \cdot \operatorname{sen}(\alpha) \\
T_{AB}(\alpha) &= -10 \cdot 2 \cdot \alpha \cdot e_t'(\alpha) + V_A \cdot e_t(\alpha) - M_A \cdot \operatorname{sen}(\alpha) + T_A \\
&\quad \cdot \cos(\alpha)
\end{aligned}
\qquad \mathbf{S_1} \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \tag{9.25}
$$

$$M_{BC}(x) = T_{AB}\left(\frac{\pi}{2}\right) - V_A \cdot x + 10 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot x + \left(-\frac{10}{1{,}5} \cdot x + 10\right)$$

$$\cdot \frac{x^2}{2} + \left(\frac{\frac{10}{1{,}5} \cdot x^2}{2}\right) \cdot \frac{2 \cdot x}{3} \qquad \mathbf{S_2}$$

$$0 \leq x \leq 1{,}5$$

$$T_{BC}(x) = 0$$

$$M_{ED}(\alpha) = -10 \cdot 2 \cdot \alpha \cdot e_f'(\alpha) + V_E \cdot e_f(\alpha) - M_E \cdot \cos(\alpha) - T_E$$

$$\cdot \operatorname{sen}(\alpha) \qquad \mathbf{S_3}$$

$$T_{ED}(\alpha) = 10 \cdot 2 \cdot \alpha \cdot e_t'(\alpha) - V_E \cdot e_t(\alpha) + M_E \cdot \operatorname{sen}(\alpha) - T_E \qquad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\cdot \cos(\alpha)$$

$$M_{DC}(x) = T_{ED}\left(\frac{\pi}{2}\right) + V_E \cdot x - 10 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot x - \left(-\frac{10}{1{,}5} \cdot x + 10\right)$$

$$\cdot \frac{x^2}{2} - \left(\frac{\frac{10}{1{,}5} \cdot x^2}{2}\right) \cdot \frac{2 \cdot x}{3} \qquad \mathbf{S_4}$$

$$0 \leq x \leq 1{,}5$$

$$T_{DC}(x) = 0$$

9.6 SISTEMA PRINCIPAL DO SISTEMA VIRTUAL PARA O CÁLCULO DE δ_{V_D} (FIGURA 9.14)

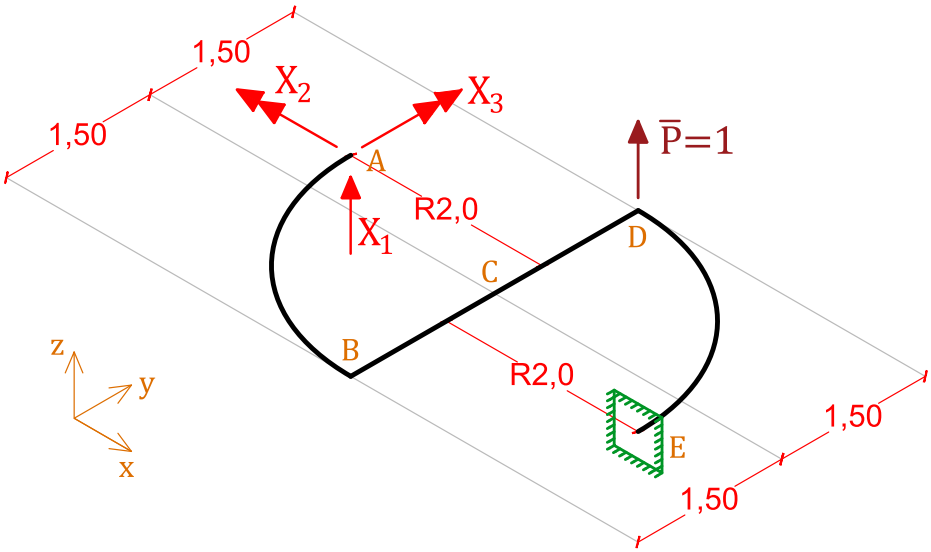


Figura 9.14 – Sistema principal do Sistema Virtual para cálculo de δ_{V_D} do Exercício 9.

9.6.1 *Sistema [0] do Sistema Virtual (Figura 9.15)*

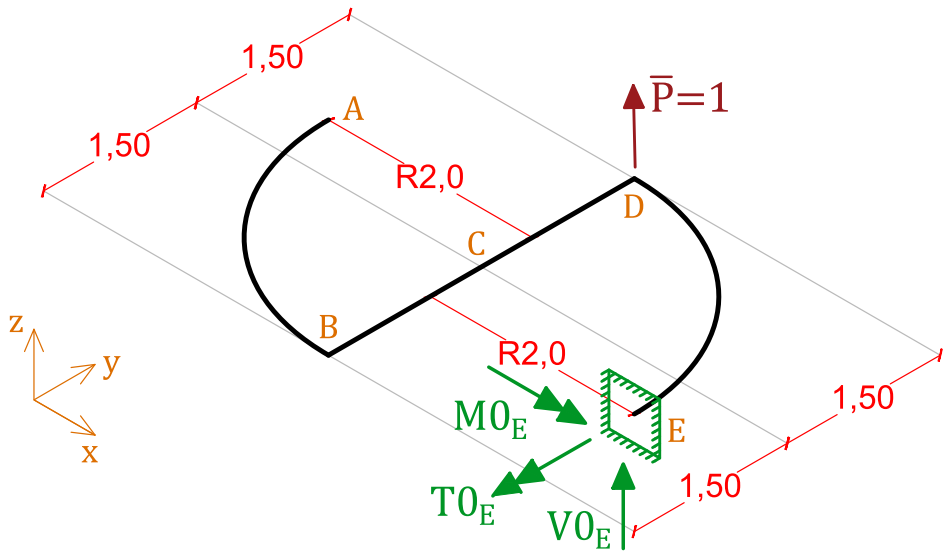


Figura 9.15 – Sistema [0] do Sistema Virtual para cálculo de δ_{V_D}.

Cálculo das reações de apoio

$$\boldsymbol{\Sigma F_Z}^{\odot^+} = \mathbf{0}$$
$$V0_E + 1 = 0 \tag{9.26}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{X_A}}^{\leftarrow^+} = \mathbf{0}$$
$$V0_E \cdot 1 - M0_E - 1 \cdot 1 = 0 \tag{9.27}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{Y_A}}^{\downarrow^+} = \mathbf{0}$$
$$V0_E \cdot 4 + T0_E + 1 \cdot 2 = 0 \tag{9.28}$$

Reações de Apoio		
$V0_E = -1\frac{kN}{kN}$	$T0_E = 2\frac{kN \cdot m}{kN}$	$M0_E = -2\frac{kN \cdot m}{kN}$

Tabela 9.5 – Resumo das reações de apoio do Sistema [0] do Sistema Virtual para cálculo de δ_{V_D}.

A Figura 9.5 mostra as seções transversais genéricas empregadas para a escrita das equações de esforços internos, conforme (9.29).

$$
\begin{aligned}
&M0_{AB}(\alpha) = 0 \\
&T0_{AB}(\alpha) = 0 \\
&\qquad\qquad \mathbf{S_1} \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \\
&M0_{BC}(x) = 0 \\
&T0_{BC}(x) = 0 \\
&\qquad\qquad \mathbf{S_2} \quad 0 \le x \le 1{,}5 \\
&M0_{ED}(\alpha) = V0_E \cdot e_f(\alpha) - M0_E \cdot \cos(\alpha) + T0_E \cdot \operatorname{sen}(\alpha) \\
&T0_{ED}(\alpha) = -V0_E \cdot e_t(\alpha) + M0_E \cdot \operatorname{sen}(\alpha) + T0_E \cdot \cos(\alpha) \\
&\qquad\qquad \mathbf{S_3} \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \\
&M0_{DC}(x) = 0 \\
&T0_{DC}(x) = 0 \\
&\qquad\qquad \mathbf{S_4} \quad 0 \le x \le 1{,}5
\end{aligned}
\tag{9.29}
$$

9.6.2 *Cálculo dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade para o Sistema Virtual*

O **Sistema Virtual** possui os mesmos Sistemas [1], [2], e [3] do **Sistema Real**, detalhados nos tópicos 9.3, 9.4, e 9.5, respectivamente. As integrais foram dispostas em (9.22). Portanto, só há modificação nos termos de carga, demonstrados em (9.30).

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta_{10}} = &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{AB}(\alpha) \cdot M1_{AB}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{AB}(\alpha) \cdot T1_{AB}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha \\
&+ \int_0^{1,5} \frac{M0_{BC}(x) \cdot M1_{BC}(x)}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{T0_{BC}(x) \cdot T1_{BC}(x)}{G_c \cdot I_t} \cdot dx \\
&+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{ED}(\alpha) \cdot M1_{ED}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{ED}(\alpha) \cdot T1_{ED}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha \\
&+ \int_0^{1,5} \frac{M0_{DC}(x) \cdot M1_{DC}(x)}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{T0_{DC}(x) \cdot T1_{DC}(x)}{G_c \cdot I_t} \cdot dx \\
&= \mathbf{1{,}4209330996 \cdot 10^{-4}} \ \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{kN}}
\end{aligned}
\tag{9.30}
$$

$$\boldsymbol{\delta_{20}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{AB}(\alpha) \cdot M2_{AB}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{AB}(\alpha) \cdot T2_{AB}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{1,5} \frac{M0_{BC}(x) \cdot M2_{BC}(x)}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{T0_{BC}(x) \cdot T2_{BC}(x)}{G_c \cdot I_t} \cdot dx$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{ED}(\alpha) \cdot M2_{ED}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{ED}(\alpha) \cdot T2_{ED}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{1,5} \frac{M0_{DC}(x) \cdot M2_{DC}(x)}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{T0_{DC}(x) \cdot T2_{DC}(x)}{G_c \cdot I_t} \cdot dx$$
$$= \boldsymbol{-6,0474016561 \cdot 10^{-6}\ \frac{rad}{kN}}$$

$$\boldsymbol{\delta_{30}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{AB}(\alpha) \cdot M3_{AB}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{AB}(\alpha) \cdot T3_{AB}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{1,5} \frac{M0_{BC}(x) \cdot M3_{BC}(x)}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{T0_{BC}(x) \cdot T3_{BC}(x)}{G_c \cdot I_t} \cdot dx$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{ED}(\alpha) \cdot M3_{ED}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{ED}(\alpha) \cdot T3_{ED}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{1,5} \frac{M0_{DC}(x) \cdot M3_{DC}(x)}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{T0_{DC}(x) \cdot T3_{DC}(x)}{G_c \cdot I_t} \cdot dx$$
$$= \boldsymbol{3,76856527 \cdot 10^{-5}\ \frac{rad}{kN}}$$

Com os termos de carga atualizados conforme (9.30), faz-se a compatibilização dos deslocamentos e rotações conforme (9.31).

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{12} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 = 0 \\ \delta_{30} + \delta_{13} \cdot X_1 + \delta_{23} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 = 0 \end{cases}$$

$$X_1 = -0{,}2498496955\ \frac{kN}{kN} \qquad (9.31)$$
$$X_2 = 0{,}0375042704\ \frac{kN \cdot m}{kN}$$
$$X_3 = 0{,}0939043672\ \frac{kN \cdot m}{kN}$$

<u>Cálculo das reações de apoio do Sistema Virtual</u> (◉⁺, ↟⁺, ↠⁺)

$$V'_E = V0_E + V1_E \cdot X_1 + V2_E \cdot X_2 + V3_E \cdot X_3 = -0{,}7501503045\ \frac{kN}{kN} \quad \Rightarrow \quad |V'_E| = 0{,}7501503045\ \frac{kN}{kN}\ \otimes$$
$$M'_E = M0_E + M1_E \cdot X_1 + M2_E \cdot X_2 + M3_E \cdot X_3 = -1{,}7126460342\ \frac{kN \cdot m}{kN} \quad \Rightarrow \quad |M'_E| = 1{,}7126460342\ \frac{kN \cdot m}{kN}\ \twoheadleftarrow \qquad (9.32)$$

$$T'_E = -T0_E - T1_E \cdot X_1 - T2_E \cdot X_2 - T3_E \cdot X_3$$
$$= -1{,}0945055853 \ \frac{kN \cdot m}{kN} \quad \Rightarrow \quad |T'_E| = 1{,}0945055853 \ \frac{kN \cdot m}{kN} \downarrow$$

$$|X_1| = |V'_A| = 0{,}2498496955 \ \frac{kN}{kN} \otimes$$

$$|X_2| = |M'_A| = 0{,}0375042704 \ \frac{kN \cdot m}{kN} \leftarrow$$

$$|X_3| = |T'_A| = 0{,}0939043672 \ \frac{kN \cdot m}{kN} \uparrow$$

A Figura 9.16 exibe as reações de apoio com os sentidos corretos. As equações estão apresentadas em (9.33).

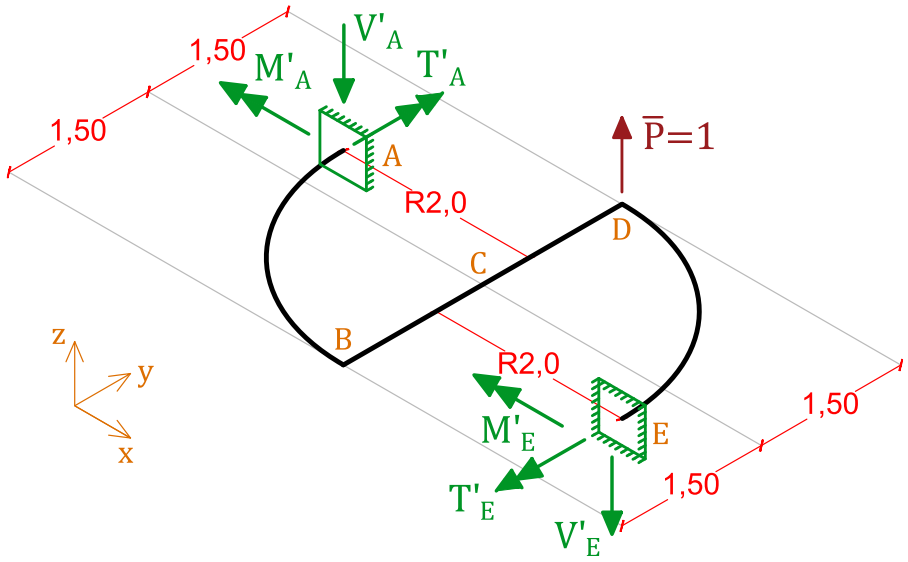


Figura 9.16 – Reações de apoio para o Sistema Virtual do Exercício 9.

$$M'_{AB}(\alpha) = -V'_A \cdot e_f(\alpha) - M'_A \cdot \cos(\alpha) + T'_A \cdot \operatorname{sen}(\alpha)$$

$$T'_{AB}(\alpha) = V'_A \cdot e_t(\alpha) + M'_A \cdot \operatorname{sen}(\alpha) + T'_A \cdot \cos(\alpha)$$

S₁ $\quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

$$M'_{BC}(x) = T'_{AB}\left(\frac{\pi}{2}\right) - V'_A \cdot x$$

$$T'_{BC}(x) = -M'_{AB}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

S₂ $\quad 0 \le x \le 1{,}5$ (9.33)

$$M'_{ED}(\alpha) = -V'_E \cdot e_f(\alpha) + M'_E \cdot \cos(\alpha) + T'_E \cdot \operatorname{sen}(\alpha)$$

$$T'_{ED}(\alpha) = V'_E \cdot e_t(\alpha) - M'_E \cdot \operatorname{sen}(\alpha) + T'_E \cdot \cos(\alpha)$$

S₃ $\quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

$$M'_{DC}(x) = T'_{ED}\left(\frac{\pi}{2}\right) + (1 - V'_E) \cdot x$$

$$T'_{DC}(x) = -M'_{ED}\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad \begin{matrix} \mathbf{S_4} \\ 0 \le x \le 1{,}5 \end{matrix}$$

9.7 Sistema Principal do Sistema Virtual para o cálculo de θ_{x_D} (Figura 9.17)

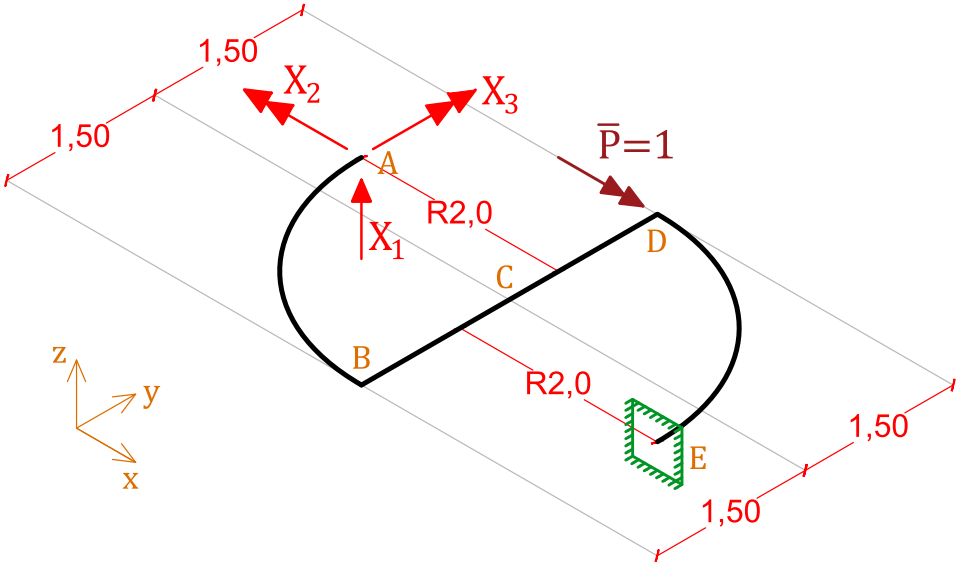


Figura 9.17 – Sistema principal do Sistema Virtual para cálculo de θ_{x_D} do Exercício 9.

9.7.1 *Sistema [0] do Sistema Virtual (Figura 9.18)*

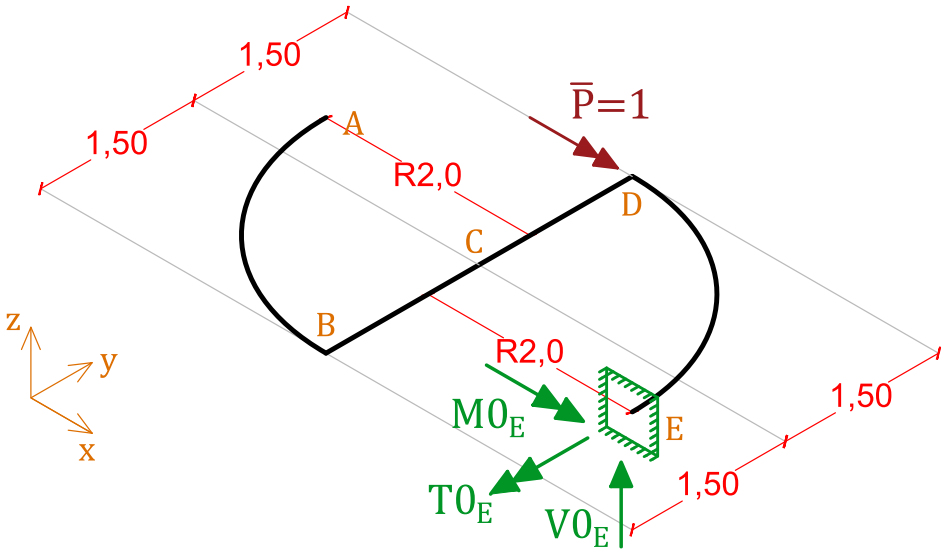


Figura 9.18 – Sistema [0] do Sistema Virtual para cálculo de θ_{x_D}.

Cálculo das reações de apoio

$$\boldsymbol{\Sigma F_Z}^{\odot^+} = \mathbf{0}$$
$$V0_E = 0 \tag{9.34}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{X_E}}^{\twoheadrightarrow^+} = \mathbf{0}$$
$$M0_E + 1 = 0 \tag{9.35}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{Y_A}}^{\upharpoonright^+} = \mathbf{0}$$
$$-V0_E \cdot 4 - T0_E = 0 \tag{9.36}$$

Reações de Apoio		
$V0_E = 0\,\frac{kN}{kN \cdot m}$	$T0_E = 0\,\frac{kN \cdot m}{kN \cdot m}$	$M0_E = -1\,\frac{kN \cdot m}{kN \cdot m}$

Tabela 9.6 – Resumo das reações de apoio do Sistema [0] do Sistema Virtual para cálculo de θ_{x_D}.

A Figura 9.5 mostra as seções transversais genéricas empregadas para a escrita das equações de esforços internos, dispostas em (9.37).

$$M0_{AB}(\alpha) = 0$$
$$T0_{AB}(\alpha) = 0$$
$$\mathbf{S_1}\quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

$$M0_{BC}(x) = 0$$
$$T0_{BC}(x) = 0$$
$$\mathbf{S_2}\quad 0 \le x \le 1{,}5$$

$$M0_{ED}(\alpha) = -M0_E \cdot \cos(\alpha)$$
$$T0_{ED}(\alpha) = M0_E \cdot \operatorname{sen}(\alpha)$$
$$\mathbf{S_3}\quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

$$M0_{DC}(x) = 0$$
$$T0_{DC}(x) = 0$$
$$\mathbf{S_4}\quad 0 \le x \le 1{,}5$$

(9.37)

9.7.2 *Cálculo dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade para o Sistema Virtual*

O **Sistema Virtual** possui os mesmos Sistemas [1], [2], e [3] do **Sistema Real**, detalhados nos tópicos 9.3, 9.4, e 9.5, respectivamente. As integrais foram dispostas em (9.22). Portanto, uma vez mais, só há modificação nos termos de carga, demonstrados em (9.38).

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta_{10}} = &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{AB}(\alpha) \cdot M1_{AB}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{AB}(\alpha) \cdot T1_{AB}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha \\
&+ \int_0^{1,5} \frac{M0_{BC}(x) \cdot M1_{BC}(x)}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{T0_{BC}(x) \cdot T1_{BC}(x)}{G_c \cdot I_t} \cdot dx \\
&+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{ED}(\alpha) \cdot M1_{ED}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{ED}(\alpha) \cdot T1_{ED}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha \\
&+ \int_0^{1,5} \frac{M0_{DC}(x) \cdot M1_{DC}(x)}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{T0_{DC}(x) \cdot T1_{DC}(x)}{G_c \cdot I_t} \cdot dx \\
&= \boldsymbol{-3,9014271239 \cdot 10^{-5}} \ \boldsymbol{\frac{m}{kN \cdot m}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta_{20}} = &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{AB}(\alpha) \cdot M2_{AB}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{AB}(\alpha) \cdot T2_{AB}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha \\
&+ \int_0^{1,5} \frac{M0_{BC}(x) \cdot M2_{BC}(x)}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{T0_{BC}(x) \cdot T2_{BC}(x)}{G_c \cdot I_t} \cdot dx \\
&+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{ED}(\alpha) \cdot M2_{ED}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{ED}(\alpha) \cdot T2_{ED}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha \\
&+ \int_0^{1,5} \frac{M0_{DC}(x) \cdot M2_{DC}(x)}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{T0_{DC}(x) \cdot T2_{DC}(x)}{G_c \cdot I_t} \cdot dx \\
&= \boldsymbol{-2,9598242417 \cdot 10^{-5}} \ \boldsymbol{\frac{rad}{kN \cdot m}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta_{30}} = &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{AB}(\alpha) \cdot M3_{AB}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{AB}(\alpha) \cdot T3_{AB}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha \\
&+ \int_0^{1,5} \frac{M0_{BC}(x) \cdot M3_{BC}(x)}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{T0_{BC}(x) \cdot T3_{BC}(x)}{G_c \cdot I_t} \cdot dx \\
&+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{ED}(\alpha) \cdot M3_{ED}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{ED}(\alpha) \cdot T3_{ED}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha \\
&+ \int_0^{1,5} \frac{M0_{DC}(x) \cdot M3_{DC}(x)}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{T0_{DC}(x) \cdot T3_{DC}(x)}{G_c \cdot I_t} \cdot dx \\
&= \boldsymbol{-7,731715239 \cdot 10^{-6}} \ \boldsymbol{\frac{rad}{kN \cdot m}}
\end{aligned}
$$

(9.38)

Com os termos de carga atualizados conforme (9.38), faz-se a compatibilização dos deslocamentos e rotações conforme (9.39).

$$\begin{cases}\delta_{10}+\delta_{11}\cdot X_1+\delta_{12}\cdot X_2+\delta_{13}\cdot X_3=0\\ \delta_{20}+\delta_{12}\cdot X_1+\delta_{22}\cdot X_2+\delta_{23}\cdot X_3=0\\ \delta_{30}+\delta_{13}\cdot X_1+\delta_{23}\cdot X_2+\delta_{33}\cdot X_3=0\end{cases}$$

$$\begin{aligned} X_1 &= 0{,}1504235711\ \frac{kN}{kN\cdot m}\\ X_2 &= 0{,}4617547503\ \frac{kN\cdot m}{kN\cdot m}\\ X_3 &= -0{,}2831360062\ \frac{kN\cdot m}{kN\cdot m}\end{aligned} \qquad (9.39)$$

Cálculo das reações de apoio do Sistema Virtual ($\circledcirc^+, \Uparrow^+, \twoheadrightarrow^+$)

$$\begin{aligned} V'_E &= V0_E + V1_E\cdot X_1 + V2_E\cdot X_2 + V3_E\cdot X_3 \\ &= -0{,}1504235711\ \frac{kN}{kN\cdot m} \quad \Rightarrow \quad |V'_E| = 0{,}1504235711\ \frac{kN}{kN\cdot m}\otimes \\ M'_E &= M0_E + M1_E\cdot X_1 + M2_E\cdot X_2 + M3_E\cdot X_3 \\ &= -0{,}6886688208\ \frac{kN\cdot m}{kN\cdot m} \quad \Rightarrow \quad |M'_E| = 0{,}6886688208\ \frac{kN\cdot m}{kN\cdot m}\twoheadleftarrow \\ T'_E &= -T0_E - T1_E\cdot X_1 - T2_E\cdot X_2 - T3_E\cdot X_3 \\ &= -0{,}3185582782\ \frac{kN\cdot m}{kN\cdot m} \quad \Rightarrow \quad |T'_E| = 0{,}3185582782\ \frac{kN\cdot m}{kN\cdot m}\downarrow \end{aligned} \qquad (9.40)$$

$$|X_1| = |V'_A| = 0{,}1504235711\ \frac{kN}{kN\cdot m}\circledcirc$$

$$|X_2| = |M'_A| = 0{,}4617547503\ \frac{kN\cdot m}{kN\cdot m}\twoheadleftarrow$$

$$|X_3| = |T'_A| = 0{,}2831360061\ \frac{kN\cdot m}{kN\cdot m}\downarrow$$

A Figura 9.19 exibe as reações de apoio com os sentidos corretos. As equações estão apresentadas em (9.41).

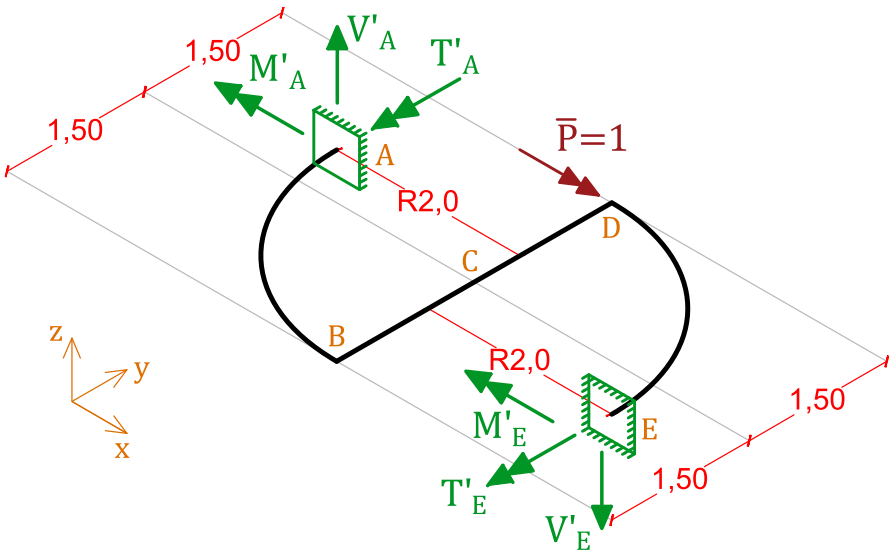


Figura 9.19 – Reações de apoio para o Sistema Virtual do Exercício 9.

$$
\begin{aligned}
&M'_{AB}(\alpha) = V'_A \cdot e_f(\alpha) - M'_A \cdot \cos(\alpha) - T'_A \cdot \operatorname{sen}(\alpha) && \mathbf{S_1} \\
&T'_{AB}(\alpha) = -V'_A \cdot e_t(\alpha) + M'_A \cdot \operatorname{sen}(\alpha) - T'_A \cdot \cos(\alpha) && 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \\
&M'_{BC}(x) = T'_{AB}\left(\frac{\pi}{2}\right) + V'_A \cdot x && \mathbf{S_2} \\
&T'_{BC}(x) = -M'_{AB}\left(\frac{\pi}{2}\right) && 0 \le x \le 1{,}5 \\
&M'_{ED}(\alpha) = -V'_E \cdot e_f(\alpha) + M'_E \cdot \cos(\alpha) + T'_E \cdot \operatorname{sen}(\alpha) && \mathbf{S_3} \\
&T'_{ED}(\alpha) = V'_E \cdot e_t(\alpha) - M'_E \cdot \operatorname{sen}(\alpha) + T'_E \cdot \cos(\alpha) && 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \\
&M'_{DC}(x) = T'_{ED}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 - V'_E \cdot x && \mathbf{S_4} \\
&T'_{DC}(x) = -M'_{ED}\left(\frac{\pi}{2}\right) && 0 \le x \le 1{,}5
\end{aligned}
\tag{9.41}
$$

9.8 SISTEMA PRINCIPAL DO SISTEMA VIRTUAL PARA O CÁLCULO DE θ_{y_D} (FIGURA 9.20)

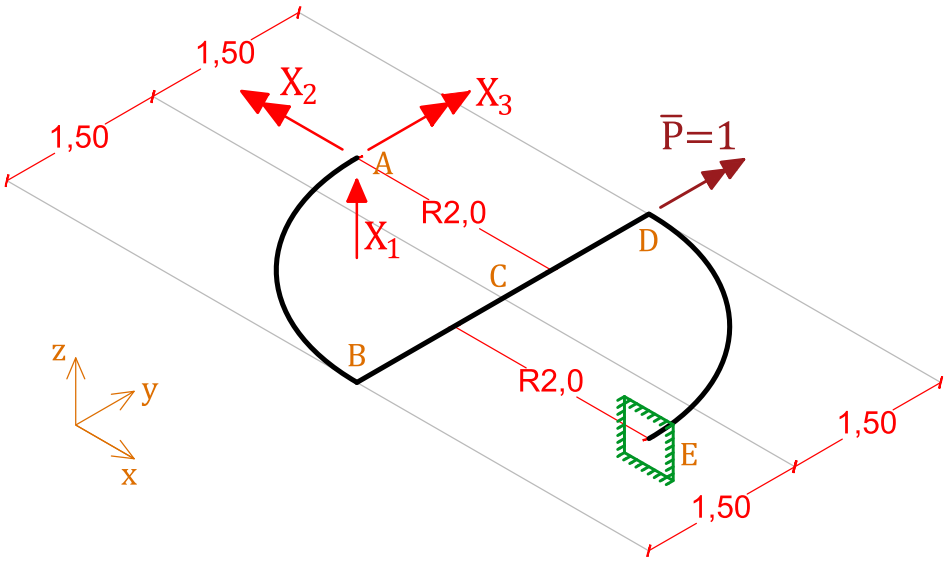


Figura 9.20 – Sistema principal do Sistema Virtual para cálculo de θ_{y_D} do Exercício 9.

9.8.1 *Sistema [0] do Sistema Virtual (Figura 9.21)*

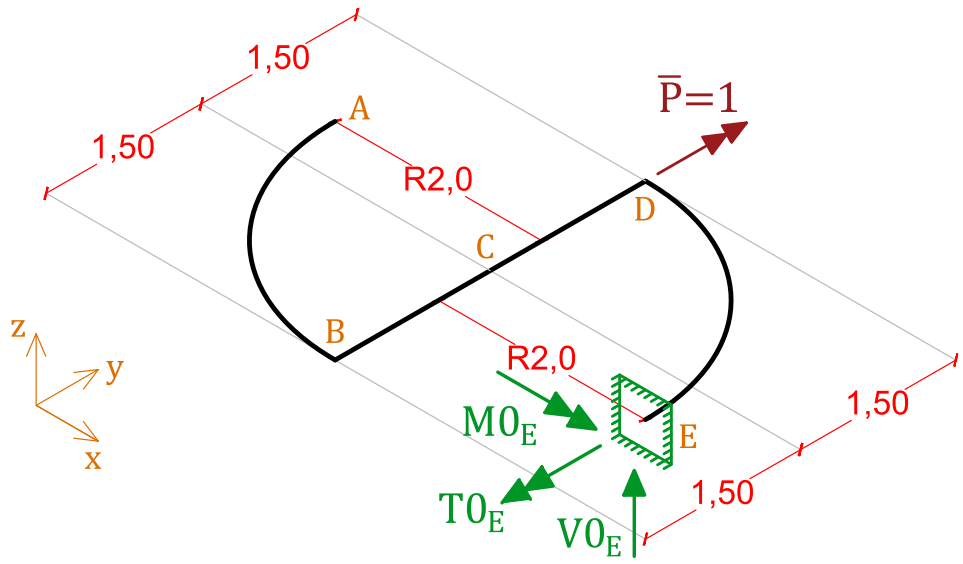


Figura 9.21 – Sistema [0] do Sistema Virtual para cálculo de θ_{y_D}.

Cálculo das reações de apoio

$$\boldsymbol{\Sigma F_Z}^{\odot^+} = \mathbf{0}$$
$$V0_E = 0 \tag{9.42}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{X_A}}^{\twoheadrightarrow^+} = \mathbf{0}$$
$$-V0_E \cdot 1 + M0_E = 0 \tag{9.43}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{Y_A}}^{\upuparrows^+} = \mathbf{0}$$
$$-V0_E \cdot 4 - T0_E + 1 = 0 \tag{9.44}$$

Reações de Apoio		
$V0_E = 0\,\frac{kN}{kN \cdot m}$	$T0_E = 1\,\frac{kN \cdot m}{kN \cdot m}$	$M0_E = 0\,\frac{kN \cdot m}{kN \cdot m}$

Tabela 9.7 – Resumo das reações de apoio do Sistema [0] do Sistema Virtual para cálculo de θ_{y_D}.

A Figura 9.5 mostra as seções transversais genéricas empregadas para a escrita das equações de esforços internos, conforme (9.45).

$$
\begin{aligned}
&M0_{AB}(\alpha) = 0 \\
&T0_{AB}(\alpha) = 0 \\
&M0_{BC}(x) = 0 \\
&T0_{BC}(x) = 0 \\
&M0_{ED}(\alpha) = T0_E \cdot \text{sen}(\alpha) \\
&T0_{ED}(\alpha) = T0_E \cdot \cos(\alpha) \\
&M0_{DC}(x) = 0 \\
&T0_{DC}(x) = 0
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&\mathbf{S_1} \\
&0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \\
&\mathbf{S_2} \\
&0 \le x \le 1{,}5 \\
&\mathbf{S_3} \\
&0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \\
&\mathbf{S_4} \\
&0 \le x \le 1{,}5
\end{aligned}
\tag{9.45}
$$

9.8.2 *Cálculo dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade para o Sistema Virtual*

O **Sistema Virtual** possui os mesmos Sistemas [1], [2], e [3] do **Sistema Real**, detalhados nos tópicos 9.3, 9.4, e 9.5, respectivamente. As integrais foram dispostas em (9.22) e só há modificação nos termos de carga, resumidos em (9.46).

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta_{10}} = &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{AB}(\alpha) \cdot M1_{AB}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{AB}(\alpha) \cdot T1_{AB}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha \\
&+ \int_0^{1,5} \frac{M0_{BC}(x) \cdot M1_{BC}(x)}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{T0_{BC}(x) \cdot T1_{BC}(x)}{G_c \cdot I_t} \cdot dx \\
&+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{ED}(\alpha) \cdot M1_{ED}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{ED}(\alpha) \cdot T1_{ED}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha \\
&+ \int_0^{1,5} \frac{M0_{DC}(x) \cdot M1_{DC}(x)}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{T0_{DC}(x) \cdot T1_{DC}(x)}{G_c \cdot I_t} \cdot dx \\
&= \mathbf{1{,}0461385277 \cdot 10^{-4}} \ \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{kN \cdot m}}
\end{aligned}
\tag{9.46}
$$

$$\boldsymbol{\delta_{20}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{AB}(\alpha)\cdot M2_{AB}(\alpha)}{E_c\cdot I_f}\cdot 2\cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{AB}(\alpha)\cdot T2_{AB}(\alpha)}{G_c\cdot I_t}\cdot 2\cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{1{,}5} \frac{M0_{BC}(x)\cdot M2_{BC}(x)}{E_c\cdot I_f}\cdot dx + \int_0^{1{,}5} \frac{T0_{BC}(x)\cdot T2_{BC}(x)}{G_c\cdot I_t}\cdot dx$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{ED}(\alpha)\cdot M2_{ED}(\alpha)}{E_c\cdot I_f}\cdot 2\cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{ED}(\alpha)\cdot T2_{ED}(\alpha)}{G_c\cdot I_t}\cdot 2\cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{1{,}5} \frac{M0_{DC}(x)\cdot M2_{DC}(x)}{E_c\cdot I_f}\cdot dx + \int_0^{1{,}5} \frac{T0_{DC}(x)\cdot T2_{DC}(x)}{G_c\cdot I_t}\cdot dx$$
$$= \boldsymbol{7{,}731715239\cdot 10^{-6}\ \frac{rad}{kN\cdot m}}$$

$$\boldsymbol{\delta_{30}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{AB}(\alpha)\cdot M3_{AB}(\alpha)}{E_c\cdot I_f}\cdot 2\cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{AB}(\alpha)\cdot T3_{AB}(\alpha)}{G_c\cdot I_t}\cdot 2\cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{1{,}5} \frac{M0_{BC}(x)\cdot M3_{BC}(x)}{E_c\cdot I_f}\cdot dx + \int_0^{1{,}5} \frac{T0_{BC}(x)\cdot T3_{BC}(x)}{G_c\cdot I_t}\cdot dx$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{ED}(\alpha)\cdot M3_{ED}(\alpha)}{E_c\cdot I_f}\cdot 2\cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T0_{ED}(\alpha)\cdot T3_{ED}(\alpha)}{G_c\cdot I_t}\cdot 2\cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{1{,}5} \frac{M0_{DC}(x)\cdot M3_{DC}(x)}{E_c\cdot I_f}\cdot dx + \int_0^{1{,}5} \frac{T0_{DC}(x)\cdot T3_{DC}(x)}{G_c\cdot I_t}\cdot dx$$
$$= \boldsymbol{2{,}9598242417\cdot 10^{-5}\ \frac{rad}{kN\cdot m}}$$

Com os termos de carga atualizados conforme (9.46), faz-se a compatibilização dos deslocamentos e rotações conforme (9.47).

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}\cdot X_1 + \delta_{12}\cdot X_2 + \delta_{13}\cdot X_3 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{12}\cdot X_1 + \delta_{22}\cdot X_2 + \delta_{23}\cdot X_3 = 0 \\ \delta_{30} + \delta_{13}\cdot X_1 + \delta_{23}\cdot X_2 + \delta_{33}\cdot X_3 = 0 \end{cases}$$

$$X_1 = -0{,}193308113\ \frac{kN}{kN\cdot m} \qquad (9.47)$$
$$X_2 = -0{,}1390139354\ \frac{kN\cdot m}{kN\cdot m}$$
$$X_3 = 0{,}0944325909\ \frac{kN\cdot m}{kN\cdot m}$$

<u>Cálculo das reações de apoio do Sistema Virtual</u> (◉⁺, ↟⁺, ↠⁺)

$$V'_E = V0_E + V1_E\cdot X_1 + V2_E\cdot X_2 + V3_E\cdot X_3 = 0{,}193308113\,\frac{kN}{kN\cdot m} \quad \Rightarrow \quad |V'_E| = 0{,}193308113\,\frac{kN}{kN\cdot m}\ ◉$$
$$M'_E = M0_E + M1_E\cdot X_1 + M2_E\cdot X_2 + M3_E\cdot X_3 = 0{,}0542941776\ \frac{kN\cdot m}{kN\cdot m} \quad \Rightarrow \quad |M'_E| = 0{,}0542941776\,\frac{kN\cdot m}{kN\cdot m}\ ↠ \qquad (9.48)$$

$$T'_E = -T0_E - T1_E \cdot X_1 - T2_E \cdot X_2 - T3_E \cdot X_3$$
$$= -0{,}3212001387 \frac{kN \cdot m}{kN \cdot m} \quad \Rightarrow \quad |T'_E| = 0{,}3212001388 \frac{kN \cdot m}{kN \cdot m} \downarrow$$

$$|X_1| = |V'_A| = 0{,}193308113 \frac{kN}{kN \cdot m} \otimes$$

$$|X_2| = |M'_A| = 0{,}1390139354 \frac{kN \cdot m}{kN \cdot m} \twoheadrightarrow$$

$$|X_3| = |T'_A| = 0{,}0944325909 \frac{kN \cdot m}{kN \cdot m} \uparrow$$

A Figura 9.22 exibe as reações de apoio com os sentidos corretos. As equações estão apresentadas em (9.49).

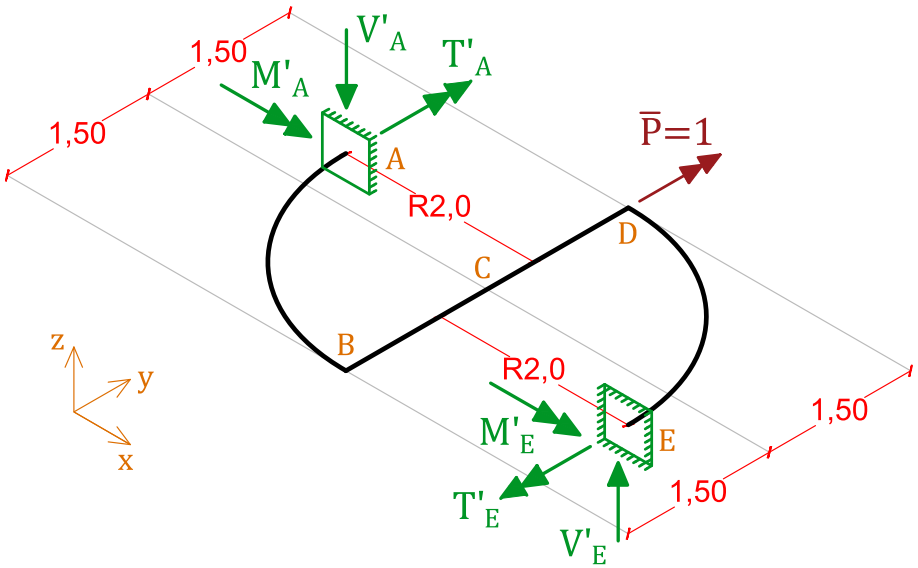


Figura 9.22 – Reações de apoio para o Sistema Virtual do Exercício 9.

$$M'_{AB}(\alpha) = -V'_A \cdot e_f(\alpha) + M'_A \cdot \cos(\alpha) + T'_A \cdot \operatorname{sen}(\alpha)$$

$$T'_{AB}(\alpha) = V'_A \cdot e_t(\alpha) - M'_A \cdot \operatorname{sen}(\alpha) + T'_A \cdot \cos(\alpha) \qquad \mathbf{S_1}\ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

$$M'_{BC}(x) = T'_{AB}\left(\frac{\pi}{2}\right) - V'_A \cdot x$$

$$T'_{BC}(x) = -M'_{AB}\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad \mathbf{S_2}\ 0 \le x \le 1{,}5 \qquad (9.49)$$

$$M'_{ED}(\alpha) = V'_E \cdot e_f(\alpha) - M'_E \cdot \cos(\alpha) + T'_E \cdot \operatorname{sen}(\alpha)$$

$$T'_{ED}(\alpha) = -V'_E \cdot e_t(\alpha) + M'_E \cdot \operatorname{sen}(\alpha) + T'_E \cdot \cos(\alpha) \qquad \mathbf{S_3}\ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

$$M'_{DC}(x) = T'_{ED}\left(\frac{\pi}{2}\right) + V'_E \cdot x \qquad \begin{matrix}\mathbf{S_4} \\ 0 \leq x \leq 1{,}5\end{matrix}$$

$$T'_{DC}(x) = -M'_{ED}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1$$

9.9 Cálculo de Deslocamento e/ou Rotação

As integrais para o cálculo de δ_{V_D} são apresentadas em (9.50) utilizando as equações de (9.25) e (9.33).

$$\begin{aligned}\delta_{V_D} = &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{AB}(\alpha)\cdot M'_{AB}(\alpha)}{E_c \cdot I_f}\cdot 2\cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T_{AB}(\alpha)\cdot T'_{AB}(\alpha)}{G_c \cdot I_t}\cdot 2\cdot d\alpha \\ &+ \int_0^{1{,}5} \frac{M_{BC}(x)\cdot M'_{BC}(x)}{E_c \cdot I_f}\cdot dx + \int_0^{1{,}5} \frac{T_{BC}(x)\cdot T'_{BC}(x)}{G_c \cdot I_t}\cdot dx \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{ED}(\alpha)\cdot M'_{ED}(\alpha)}{E_c \cdot I_f}\cdot 2\cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T_{ED}(\alpha)\cdot T'_{ED}(\alpha)}{G_c \cdot I_t}\cdot 2\cdot d\alpha \\ &+ \int_0^{1{,}5} \frac{M_{DC}(x)\cdot M'_{DC}(x)}{E_c \cdot I_f}\cdot dx + \int_0^{1{,}5} \frac{T_{DC}(x)\cdot T'_{DC}(x)}{G_c \cdot I_t}\cdot dx \\ &= \mathbf{-7{,}13603\cdot 10^{-4}\ m}\end{aligned} \tag{9.50}$$

Para o cálculo de θ_{x_D}, as equações (9.25) e (9.41) são integradas em (9.51).

$$\begin{aligned}\theta_{x_D} = &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{AB}(\alpha)\cdot M'_{AB}(\alpha)}{E_c \cdot I_f}\cdot 2\cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T_{AB}(\alpha)\cdot T'_{AB}(\alpha)}{G_c \cdot I_t}\cdot 2\cdot d\alpha \\ &+ \int_0^{1{,}5} \frac{M_{BC}(x)\cdot M'_{BC}(x)}{E_c \cdot I_f}\cdot dx + \int_0^{1{,}5} \frac{T_{BC}(x)\cdot T'_{BC}(x)}{G_c \cdot I_t}\cdot dx \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{ED}(\alpha)\cdot M'_{ED}(\alpha)}{E_c \cdot I_f}\cdot 2\cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T_{ED}(\alpha)\cdot T'_{ED}(\alpha)}{G_c \cdot I_t}\cdot 2\cdot d\alpha \\ &+ \int_0^{1{,}5} \frac{M_{DC}(x)\cdot M'_{DC}(x)}{E_c \cdot I_f}\cdot dx + \int_0^{1{,}5} \frac{T_{DC}(x)\cdot T'_{DC}(x)}{G_c \cdot I_t}\cdot dx \\ &= \mathbf{-4{,}42721\cdot 10^{-4}\ rad}\end{aligned} \tag{9.51}$$

Por fim, o cálculo de θ_{y_D} é apresentado em (9.52) utilizando as equações de (9.25) e (9.49).

$$\theta_{y_D} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{AB}(\alpha) \cdot M'_{AB}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T_{AB}(\alpha) \cdot T'_{AB}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{1,5} \frac{M_{BC}(x) \cdot M'_{BC}(x)}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{T_{BC}(x) \cdot T'_{BC}(x)}{G_c \cdot I_t} \cdot dx$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{ED}(\alpha) \cdot M'_{ED}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot 2 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T_{ED}(\alpha) \cdot T'_{ED}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot 2 \cdot d\alpha \quad (9.52)$$
$$+ \int_0^{1,5} \frac{M_{DC}(x) \cdot M'_{DC}(x)}{E_c \cdot I_f} \cdot dx + \int_0^{1,5} \frac{T_{DC}(x) \cdot T'_{DC}(x)}{G_c \cdot I_t} \cdot dx$$
$$= \mathbf{-1,70711 \cdot 10^{-4}\ rad}$$

REFERÊNCIAS

BEYER, K. **Die Statik im Stahlbetonbau: ein Lehr- und Handbuch der Baustatik**. Zewite Auflage/Zweiter Neudruck. Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH, 1956.

MARTHA, L. F. **Análise de Estruturas - Conceitos e Métodos Básicos**. Disponível em: Grupo GEN, (3ª edição). Grupo GEN, 2022.

SOARES, L.F.S.; OLIVEIRA, F.G.B.S.; NEVES, R.A. **Exercícios de PTV – Tópicos Especiais, Volume 1**. Editora Atena, 2024.

SORIANO, H. L.; LIMA, S. S. **Análise de estrutura – Método das Forças e Método dos Deslocamentos.** 2ª Edição. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2006.

SORIANO, H.L. **Estática das Estruturas.** Editora Ciência Moderna. Rio de Janeiro, 2007.

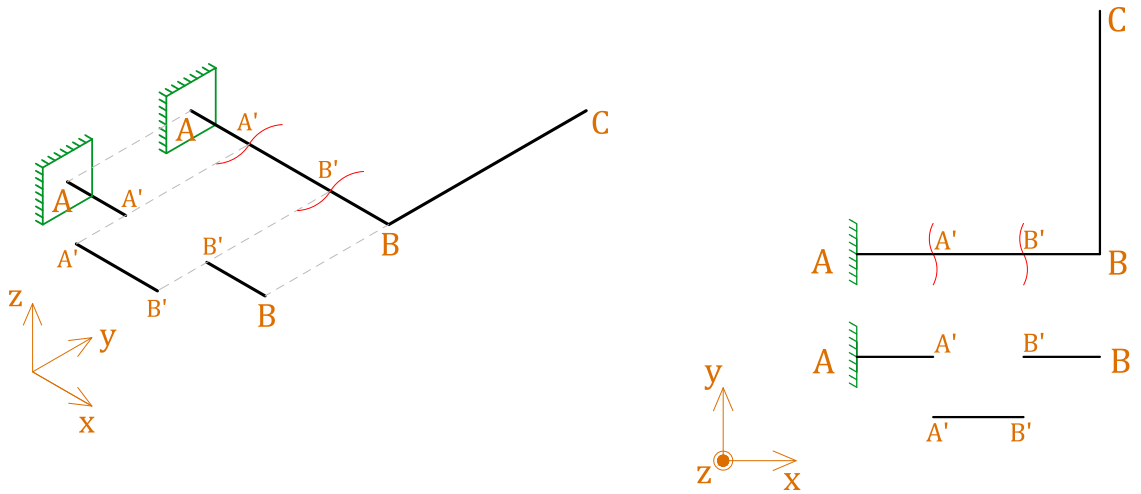
SOUZA, J. C. A. O.; ANTUNES, H. M. C. C. **Processos gerais da hiperestática clássica**. 2ª Edição. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos, Serviço Gráfico, 1995.

SÜSSEKIND, J. C. **Curso de análise estrutural, Volume I: estruturas isostáticas**. 6ª Edição. Porto Alegre – Rio de Janeiro: Globo, 1981.

SÜSSEKIND, J. C. **Curso de análise estrutural, Volume II: deformações em estruturas, Método das forças**. 4ª Edição. Porto Alegre: Globo, 1980.

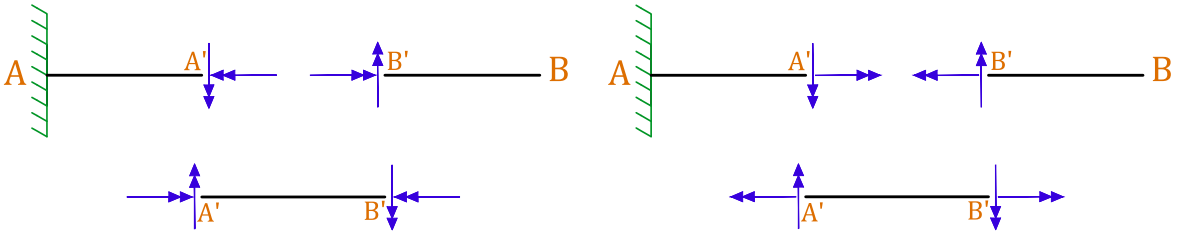
APÊNDICE A

Este apêndice apresenta as equações para a determinação da linha elástica em barras de grelhas com eixo retilíneo ou que seguem um arco de circunferência, conforme abordado em diversos exemplos ao longo desta publicação. No entanto, antes de apresentar as equações integrais propriamente ditas, é necessário destacar as convenções de sinais adotadas para os momentos fletores e torsores em estruturas de grelhas. Uma breve revisão bibliográfica revela que, ao contrário dos pórticos planos, as convenções de sinais utilizadas para grelhas tendem a divergir entre os autores, especialmente no que diz respeito à torção. Além disso, muitos optam por omitir, em alguns casos, os sinais dos momentos fletores ao plotar diagramas em grelhas. O Apêndice A: Figura 1 ilustra uma estrutura genérica com um corte destacado, que será utilizada como exemplo das diversas convenções.



Apêndice A: Figura 1 – Estrutura genérica em perspectiva isométrica e vista superior com corte.

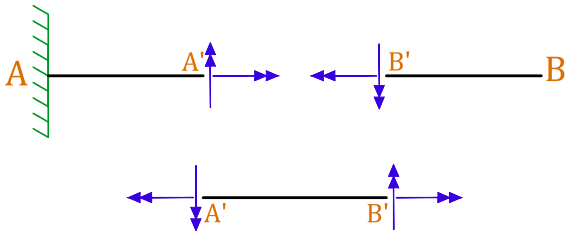
Soriano (2007) adota os sentidos positivos conforme destacados no Apêndice A: Figura 2(a). Martha (2022), embora omita os sinais para os momentos fletores ao traçar diagramas em grelhas, ressalta que os sinais para cortante e fletor podem ser definidos de forma análoga aos pórticos planos. Nesse sentido, o Apêndice A: Figura 2(b) ilustra a convenção positiva adotada por este autor. Sussekind (1981) também parece ocultar para os casos de momento fletor em grelhas, destacando apenas os sinais da torção, que coincidem com os adotados por Martha (2022). Souza e Antunes (1995) também omitem na flexão, adotando a convenção de torção análoga à utilizada por Soriano (2007).



(a) (b)

Apêndice A: Figura 2 – Convenções de sinais positivos em vista superior utilizadas por autores diversos.

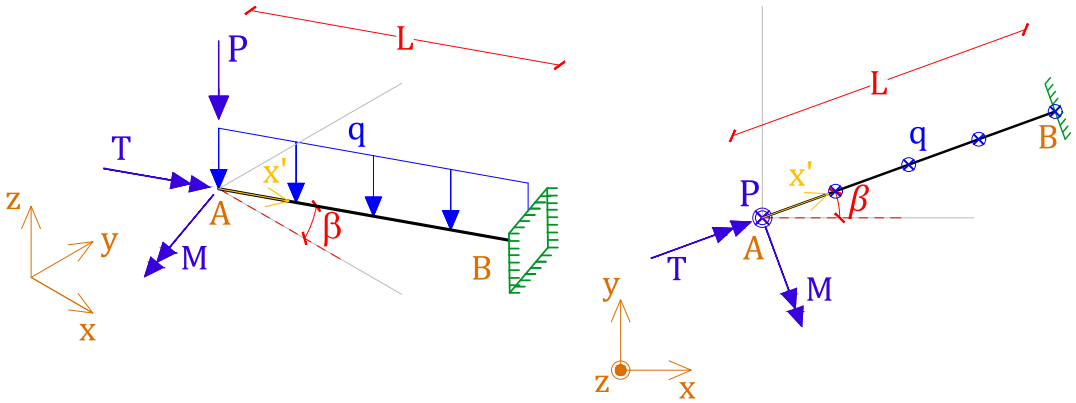
Uma avaliação da relação entre eixos dos sistemas global e local para grelhas sugere uma convenção que adota a torção conforme o Apêndice A: Figura 2(b), mas o momento fletor é positivo quando traciona as fibras superiores, em contraste com o eixo invertido comumente adotado nos pórticos planos (ver Figura 1.4 de Soares et al. (2024)). O Apêndice A: Figura 3 ilustra a convenção utilizada no desenvolvimento das equações apresentadas a seguir. Os autores incentivam os leitores a reproduzirem essas expressões utilizando outras convenções de sinais, como forma de aprofundar a compreensão dos conceitos envolvidos.



Apêndice A: Figura 3 – Convenção de sinais positivos em vista superior adotada neste apêndice.

Barra Reta

Uma vez estabelecidos os sinais, considere a grelha genérica do Apêndice A: Figura 4 em perspectiva isométrica e vista superior.



Apêndice A: Figura 4 – Grelha genérica formada por barra de eixo reto em perspectiva isométrica e vista superior.

Onde β é o ângulo formado entre o eixo x (global) e o x' (local), L o comprimento da barra, q uma carga uniformemente distribuída qualquer, P uma carga concentrada, e M e T são cargas de momento. As equações dos esforços internos de momento (fletor e torsor) ficam expressas de maneira genérica como $M_{AB}(x')$ e $T_{AB}(x')$ utilizando a convenção de sinais apresentada no Apêndice A: Figura 3. As rotações, já no eixo global, são calculadas a partir da integral dessas duas parcelas, conforme as expressões em A(1). E_c, G_c, I_f e I_t correspondem, respectivamente, aos módulos de elasticidade longitudinal e transversal, e aos momentos de inércia à flexão e à torção.

$$\theta_x(x') = \int \left[\left(\frac{T_{AB}(x')}{G_c \cdot I_t} \cdot \cos(\beta)\right) + \left(-\frac{M_{AB}(x')}{E_c \cdot I_f} \cdot \operatorname{sen}(\beta)\right)\right] dx'$$

$$\theta_y(x') = \int \left[\left(\frac{T_{AB}(x')}{G_c \cdot I_t} \cdot \operatorname{sen}(\beta)\right) + \left(\frac{M_{AB}(x')}{E_c \cdot I_f} \cdot \cos(\beta)\right)\right] dx' \qquad \text{A(1)}$$

As constantes de integração podem ser determinadas a partir das condições de contorno específicas do problema em análise. Neste caso, considera-se que $\theta_x(L) = 0$ e $\theta_y(L) = 0$ devido à presença do engaste. Por fim, $v_z(x)$ pode ser obtido a partir da equação demonstrada em A(2), sendo sua constante de integração determinada pela condição $v_z(L) = 0$.

$$v_z(x') = \int \left[(\theta_x(x') \cdot \operatorname{sen}(\beta)) - \left(\theta_y(x') \cdot \cos(\beta)\right)\right] dx' \qquad \text{A(2)}$$

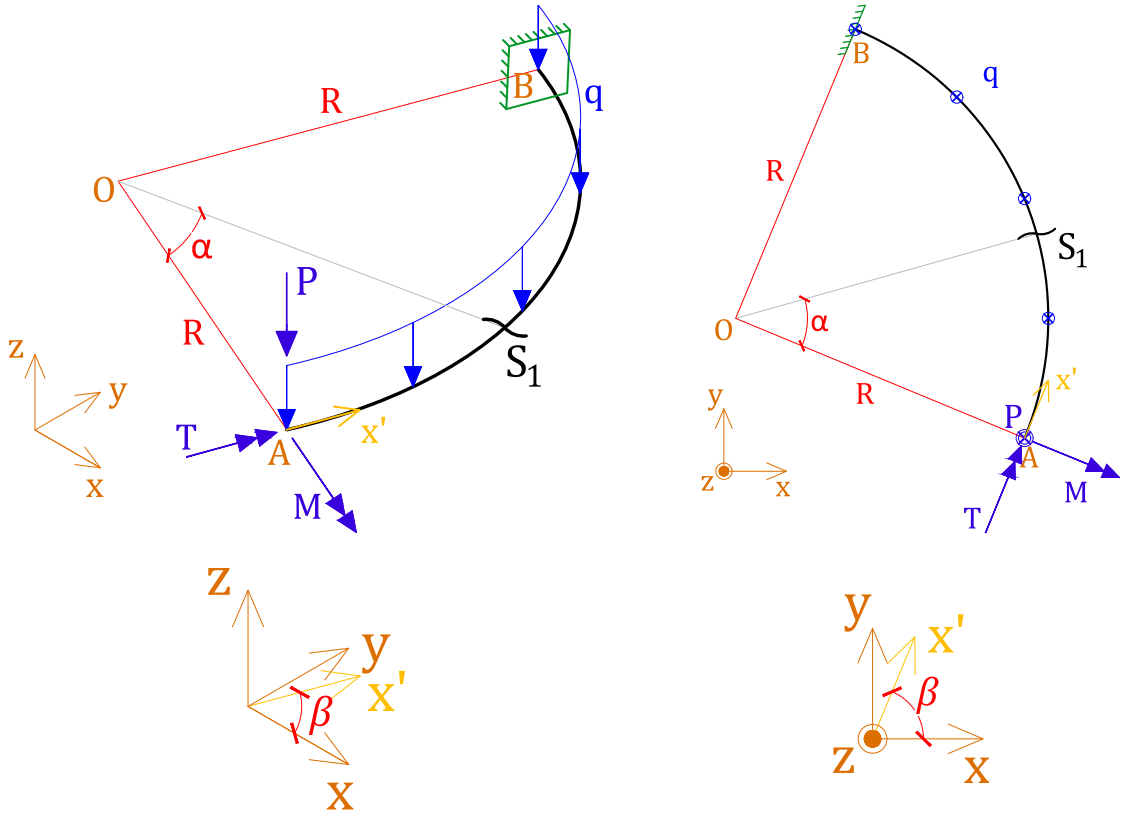
Barra Curva

Seguindo o mesmo raciocínio adotado para o exemplo genérico anterior de uma grelha formada por um elemento de eixo reto, considera-se agora a estrutura representada no Apêndice A: Figura 5. O parâmetro β, em destaque, é o ângulo formado entre o eixo x (global) e o x' (local) tangente à curva no ponto considerado, R o raio da circunferência, α o ângulo avaliado no sentido anti-horário até uma seção S_1, q uma carga uniformemente distribuída qualquer, P uma carga concentrada, e M e T os carregamentos de flexão e torção, respectivamente.

Os esforços internos considerados para o cálculo da linha elástica são os momentos fletor e torsor $M_{AB}(\alpha)$ e $T_{AB}(\alpha)$ utilizando também a convenção de sinais apresentada no Apêndice A: Figura 3. No eixo global, as rotações são determinadas a partir das integrais em A(3). E_c, G_c, I_f e I_t representam, respectivamente, os módulos de elasticidade longitudinal e transversal, bem como os momentos de inércia à flexão e à torção.

$$\theta_x(\alpha) = \int \left\{ \left[\frac{T_{AB}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot \cos(\alpha + \beta) \right] + \left[-\frac{M_{AB}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot \text{sen}(\alpha + \beta) \right] \right\} \cdot R \, d\alpha$$

$$\theta_y(\alpha) = \int \left\{ \left[\frac{T_{AB}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot sen(\alpha + \beta) \right] + \left[\frac{M_{AB}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot \cos(\alpha + \beta) \right] \right\} \cdot R \, d\alpha \qquad \text{A(3)}$$



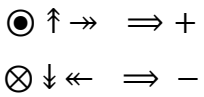
Apêndice A: Figura 5 - Grelha genérica formada por barra de eixo variando segundo um arco de circunferência em perspectiva isométrica e vista superior.

Quaisquer constantes advindas das integrais apresentadas em A(3) podem ser determinadas por meio da aplicação das condições de contorno do problema. A linha elástica $v_z(\alpha)$ é, então, calculada conforme A(4).

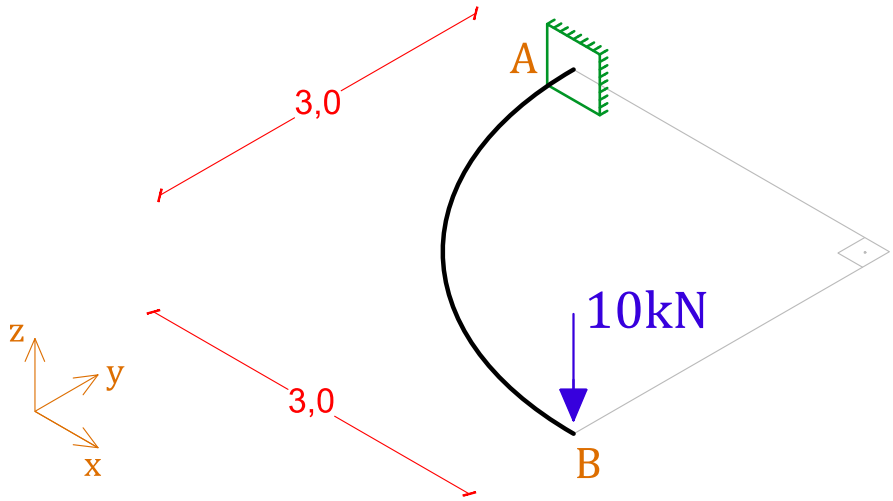
$$v_z(\alpha) = \int \{[\theta_x(\alpha) \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)] - [\theta_y(\alpha) \cdot \cos(\alpha + \beta)]\} \cdot R \, d\alpha \qquad \text{A(4)}$$

APÊNDICE B

Este Apêndice B apresenta tabelas contendo todos os deslocamentos e rotações nodais das grelhas resolvidas neste livro, expressos no sistema global. A intenção é fornecer mais informações para que os leitores exercitem os procedimentos expostos aqui. Os sinais obedecem a convenção de elementos finitos para grelhas, ilustrada no Apêndice B: Figura 1.



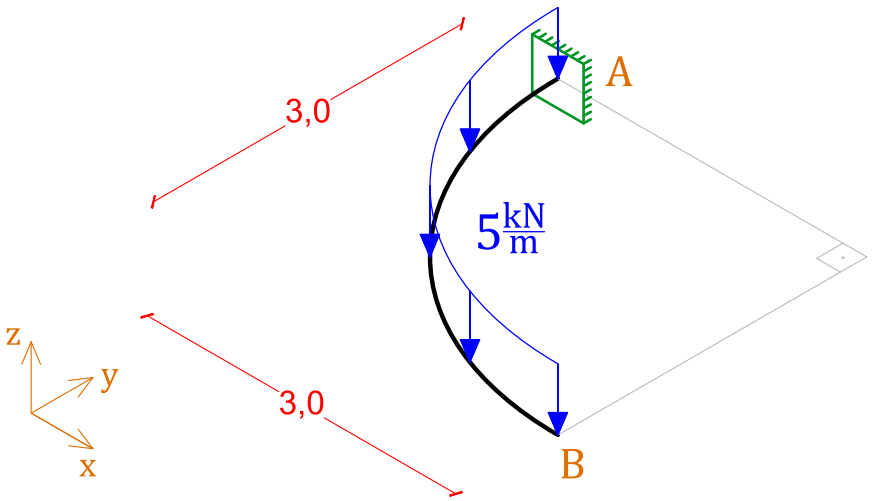
Apêndice B: Figura 1 – Convenção de Elementos Finitos, em vista superior, utilizada nas tabelas de deslocamentos e rotações.



Apêndice B: Figura 2 – Exercício 2

	Deslocamento Vertical (m)	**Rotação em x (rad)**	**Rotação em y (rad)**
A	0	0	0
B	$\mathbf{-3,07550 \cdot 10^{-3}}$	$1{,}68971 \cdot 10^{-4}$	$1{,}06250 \cdot 10^{-3}$

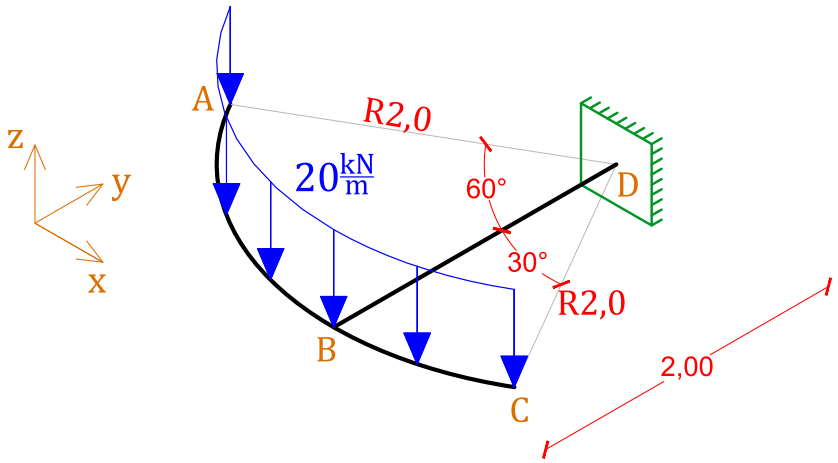
Apêndice B: Tabela 1 – Deslocamentos e rotações do Exercício 2.



Apêndice B: Figura 3 – Exercício 3.

	Deslocamento Vertical (m)	**Rotação em x (rad)**	**Rotação em y (rad)**
A	0	0	0
B	$\mathbf{-2,50585 \cdot 10^{-3}}$	$3{,}09458 \cdot 10^{-4}$	$6{,}84043 \cdot 10^{-4}$

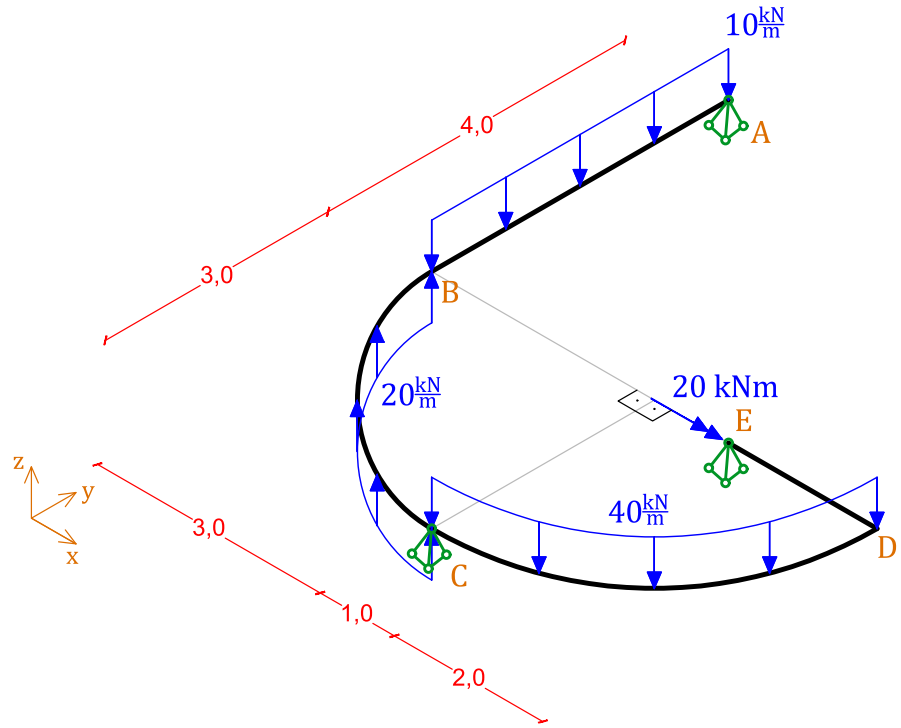
Apêndice B: Tabela 2 – Deslocamentos e rotações do Exercício 3.



Apêndice B: Figura 4 – Deslocamentos e rotações do Exercício 4.

	Deslocamento Vertical (m)	**Rotação em x (rad)**	**Rotação em y (rad)**
A	$\mathbf{-2,42436 \cdot 10^{-3}}$	$\mathbf{4,81960 \cdot 10^{-4}}$	$\mathbf{-1,17792 \cdot 10^{-3}}$
B	$-9{,}62773 \cdot 10^{-4}$	$6{,}63574 \cdot 10^{-4}$	$-1{,}00973 \cdot 10^{-3}$
C	$2{,}02706 \cdot 10^{-4}$	$6{,}51577 \cdot 10^{-4}$	$-9{,}84018 \cdot 10^{-4}$
D	0	0	0

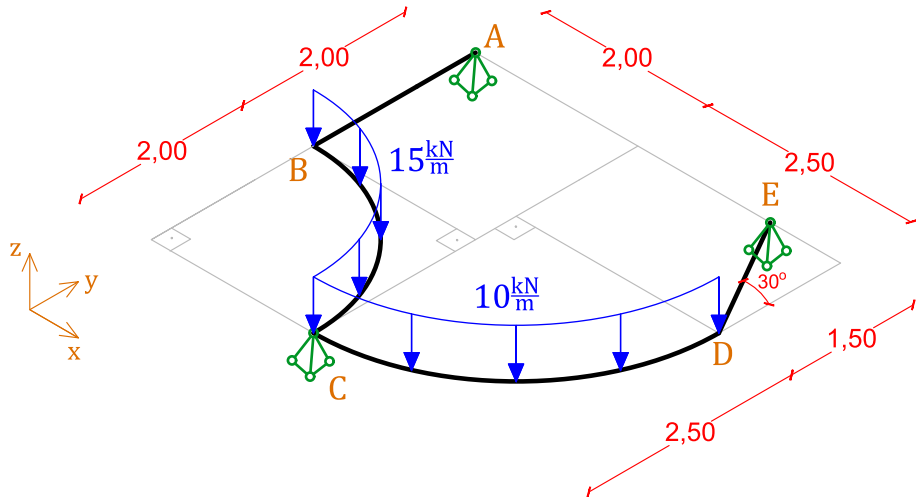
Apêndice B: Tabela 3 – Deslocamentos e rotações do Exercício 4.



Apêndice B: Figura 5 – Exercício 5.

	Deslocamento Vertical (m)	**Rotação em x (rad)**	**Rotação em y (rad)**
A	0	$-3{,}25893 \cdot 10^{-2}$	$6{,}59973 \cdot 10^{-2}$
B	$\mathbf{1.25092 \cdot 10^{-1}}$	$-2{,}84553 \cdot 10^{-2}$	$6{,}59973 \cdot 10^{-2}$
C	0	$-6{,}08655 \cdot 10^{-3}$	$6{,}38827 \cdot 10^{-2}$
D	$-1{,}72193 \cdot 10^{-1}$	$1{,}63120 \cdot 10^{-2}$	$8{,}39044 \cdot 10^{-2}$
E	0	$1{,}68453 \cdot 10^{-2}$	$8{,}71928 \cdot 10^{-2}$

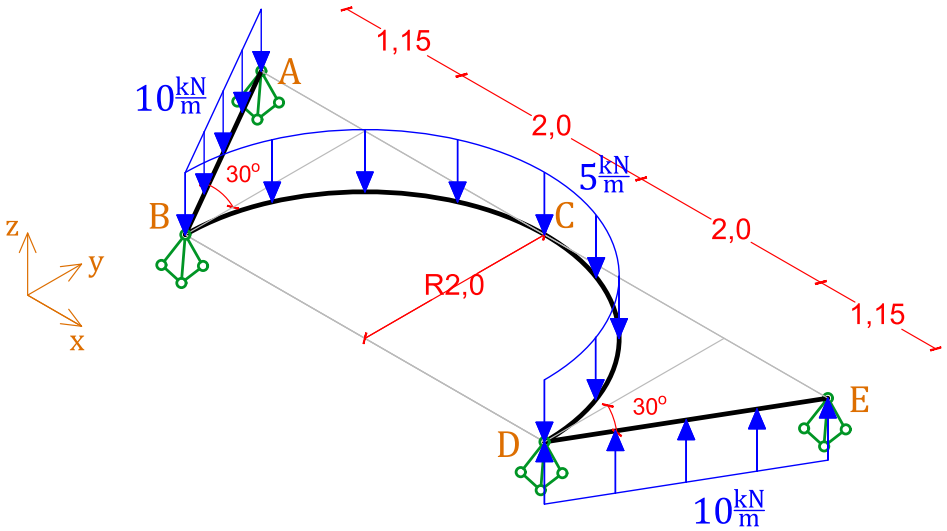
Apêndice B: Tabela 4 – Deslocamentos e rotações do Exercício 5.



Apêndice B: Figura 6 - Exercício 6

	Deslocamento Vertical (m)	Rotação em x (rad)	Rotação em y (rad)
A	0	$-8{,}16020 \cdot 10^{-4}$	$1{,}69774 \cdot 10^{-3}$
B	$\mathbf{1{,}65412 \cdot 10^{-3}}$	$-8{,}49135 \cdot 10^{-4}$	$1{,}69774 \cdot 10^{-3}$
C	0	$-8{,}23022 \cdot 10^{-4}$	$2{,}11657 \cdot 10^{-3}$
D	$-4{,}62684 \cdot 10^{-3}$	$1{,}11452 \cdot 10^{-3}$	$3{,}17955 \cdot 10^{-3}$
E	0	$1{,}26563 \cdot 10^{-3}$	$3{,}26680 \cdot 10^{-3}$

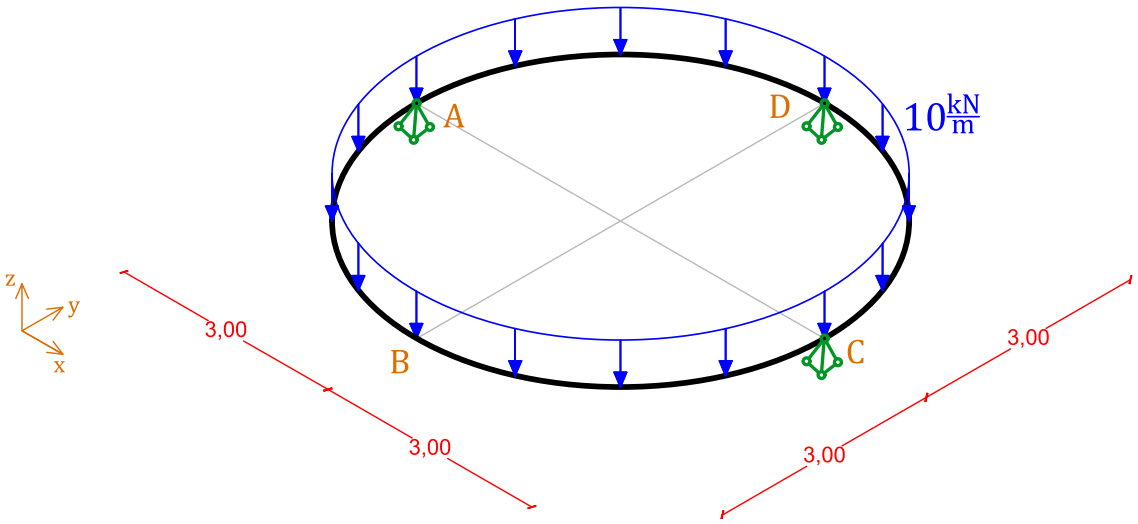
Apêndice B: Tabela 5 – Deslocamentos e rotações do Exercício 6



Apêndice B: Figura 7 – Exercício 7

	Deslocamento Vertical (m)	Rotação em x (rad)	Rotação em y (rad)
A	0	$-3{,}34191 \cdot 10^{-4}$	$7{,}76552 \cdot 10^{-4}$
B	0	$-5{,}59286 \cdot 10^{-4}$	$6{,}46593 \cdot 10^{-4}$
C	$\mathbf{-1{,}80460 \cdot 10^{-3}}$	$-8{,}63817 \cdot 10^{-4}$	$-1{,}46167 \cdot 10^{-5}$
D	0	$-5{,}11680 \cdot 10^{-4}$	$\mathbf{-7{,}00440 \cdot 10^{-4}}$
E	0	$-4{,}06862 \cdot 10^{-4}$	$-7{,}60957 \cdot 10^{-4}$

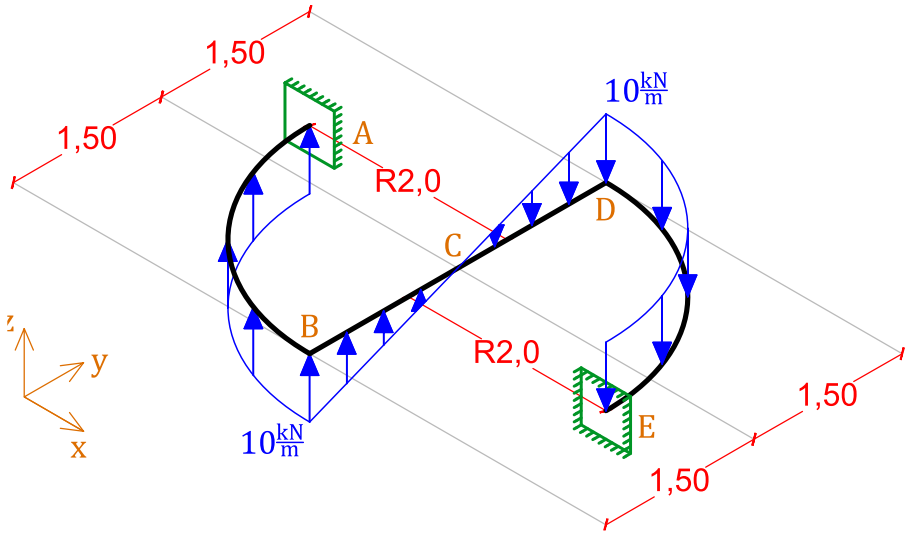
Apêndice B: Tabela 6 – Deslocamentos e rotações do Exercício 7



Apêndice B: Figura 8 - Exercício 8

	Deslocamento Vertical (m)	**Rotação em x (rad)**	**Rotação em y (rad)**
A	0	$1{,}32098 \cdot 10^{-3}$	$1{,}44777 \cdot 10^{-3}$
B	$\mathbf{-7{,}92588 \cdot 10^{-3}}$	$2{,}65044 \cdot 10^{-3}$	0
C	0	$1{,}32098 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}44777 \cdot 10^{-3}$
D	0	$-8{,}47873 \cdot 10^{-6}$	0

Apêndice B: Tabela 7 – Deslocamentos e rotações do Exercício 8



Apêndice B: Figura 9 - Exercício 9

	Deslocamento Vertical (m)	**Rotação em x (rad)**	**Rotação em y (rad)**
A	0	0	0
B	$7{,}13603 \cdot 10^{-4}$	$-4{,}42721 \cdot 10^{-4}$	$-1{,}70711 \cdot 10^{-4}$
C	0	$-4{,}93805 \cdot 10^{-4}$	$-1{,}70711 \cdot 10^{-4}$
D	$\mathbf{-7{,}13603 \cdot 10^{-4}}$	$\mathbf{-4{,}42721 \cdot 10^{-4}}$	$\mathbf{-1{,}70711 \cdot 10^{-4}}$
E	0	0	0

Apêndice B: Tabela 8 – Deslocamentos e rotações do Exercício 9

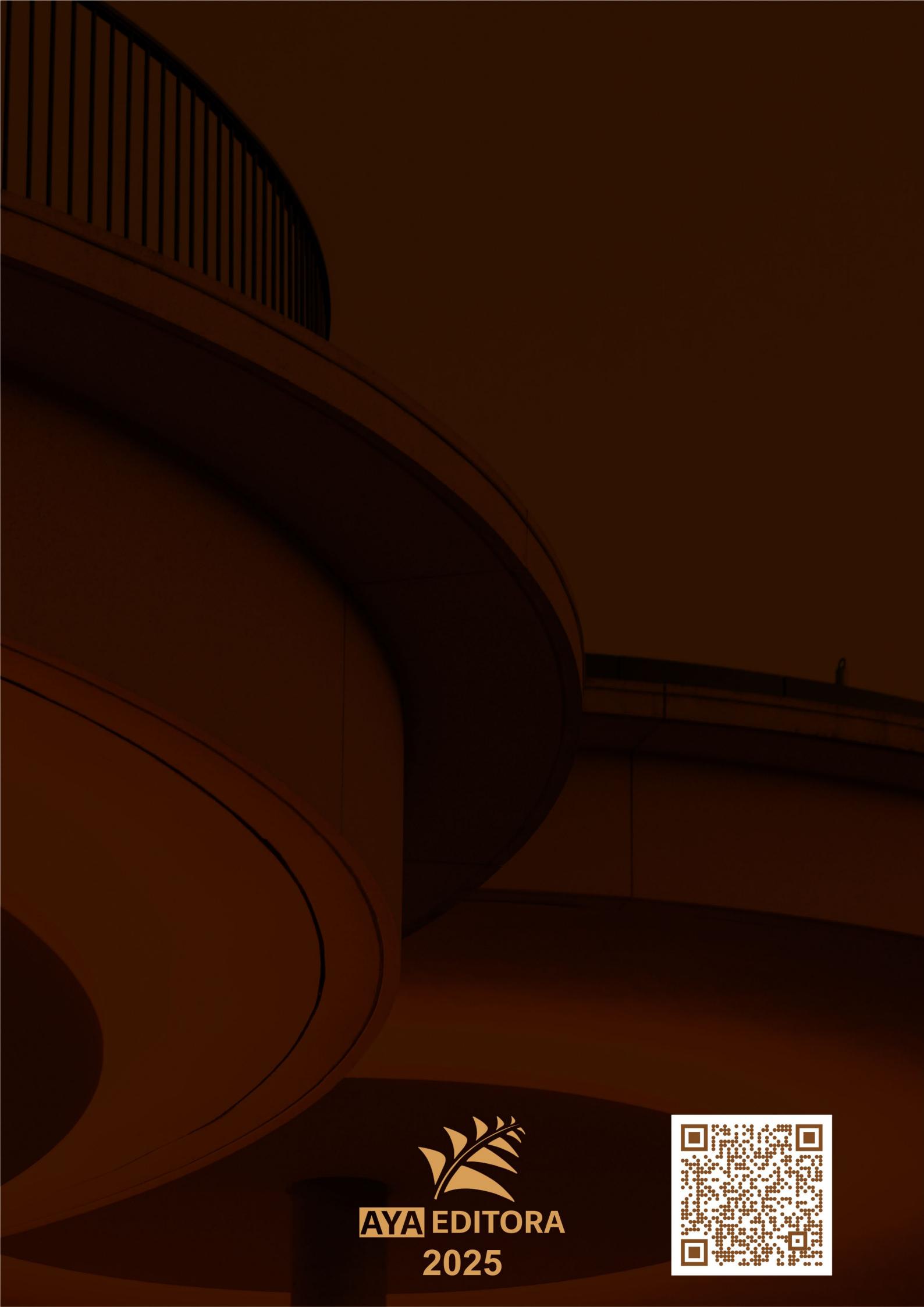
Autores

Luis Fernando Sampaio Soares

É Engenheiro Civil (Universidade Estadual do Maranhão - 2008) com Mestrado (Escola de Engenharia de São Carlos/ Universidade de São Paulo - 2011) e Doutorado (Imperial College London - 2017) em Engenharia de Estruturas. Atua na docência desde 2009, quando ingressou no Instituto Federal do Maranhão - IFMA/Campus Monte Castelo como Professor de Ensino Básico, Técnico e Tecnológico.

Humberto Moura Lima

É Engenheiro Civil, formado pelo Instituto Federal do Maranhão (IFMA – Campus Monte Castelo), Mestre em Engenharia de Estruturas pela Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo (EESC-USP, 2024) e atualmente Doutorando em Engenharia de Estruturas na mesma instituição.



AYA EDITORA
2025