MATEMÁTICA e suas APLICAÇÕES:

recursos e estratégias para um ensino efetivo
Vol. 3

Paulo Marcos Ferreira Andrade
(Organizador)

AYA EDITORA
2024

MATEMÁTICA e suas APLICAÇÕES:

recursos e estratégias para um ensino efetivo

Vol. 3

MATEMÁTICA e suas APLICAÇÕES:

recursos e estratégias para um ensino efetivo
Vol. 3

Paulo Marcos Ferreira Andrade
(Organizador)

AYA EDITORA
2024

Direção Editorial

Prof.º Dr. Adriano Mesquita Soares

Organizador

Prof.º Me. Paulo Marcos Ferreira Andrade

Capa

AYA Editora©

Revisão

Os Autores

Executiva de Negócios

Ana Lucia Ribeiro Soares

Produção Editorial

AYA Editora©

Imagens de Capa

br.freepik.com

Área do Conhecimento

Ciências Exatas e da Terra

Conselho Editorial

M425 Matemática e suas aplicações: recursos e estratégias para um ensino efetivo [recurso eletrônico]. / Paulo Marcos Ferreira Andrade (organizador). -- Ponta Grossa: Aya, 2024. 172 p.

v.3

Inclui biografia
Inclui índice
Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
ISBN: 978-65-5379-589-1
DOI: 10.47573/aya.5379.2.344

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Matemática recreativa. 3. Educação inclusiva. 4. Transtornos do espectro autista. 5. Psicologia educacional. I. Andrade, Paulo Marcos Ferreira. II. Título

CDD: 510

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Bruna Cristina Bonini - CRB 9/1347

International Scientific Journals Publicações de Periódicos e Editora LTDA
AYA Editora©
CNPJ: 36.140.631/0001-53
Fone: +55 42 3086-3131
WhatsApp: +55 42 99906-0630
E-mail: contato@ayaeditora.com.br
Site: https://ayaeditora.com.br
Endereço: Rua João Rabello Coutinho, 557
Ponta Grossa - Paraná - Brasil
84.071-150

SUMÁRIO

Apresentação **11**

01

A Feira de Matemática como ambiente de aprendizagem colaborativa e inclusiva **12**

Paulo Marcos Ferreira Andrade
Lucinéia de Souza Gomes
Marília Regina de Almeida
Francisco das Chagas Pereira de Sousa

DOI: 10.47573/aya.5379.2.344.1

02

Matemática para além do espectro: uma abordagem lúdica para alunos autistas **26**

Paulo Marcos Ferreira Andrade
Lucinéia de Souza Gomes
Marília Regina de Almeida
Francisco das Chagas Pereira de Sousa
Silvane dos Santos Ferreira da Silva
Charles da Silva Lopes
Karoline Vieira Sant'ana

DOI: 10.47573/aya.5379.2.344.2

03

Integrando etnomatemática e matemática crítica na educação financeira: contribuições para o ensino fundamental **38**

Wesley Guilherme de Lira Dantas
Danielle de Oliveira Nunes Vicente

DOI: 10.47573/aya.5379.2.344.3

04

O jogo Gama Matemático como recurso didático para ensino da matemática no 7° ano do ensino fundamental 51

Felipe Lucas da Silva Lima
Alex Wagner Pereira

DOI: 10.47573/aya.5379.2.344.4

05

Resolução de problemas contextualizados no ENEM: identificando e superando dificuldades 66

Eliana Saletti de Moraes

DOI: 10.47573/aya.5379.2.344.5

06

A relação entre a psicologia do desenvolvimento cognitivo e a educação matemática: uma revisão de literatura 80

Joyce Kelly de Jesus Santos
Denise Alves de Oliveira França

DOI: 10.47573/aya.5379.2.344.6

07

O impacto positivo da presença de psicólogos nas escolas: uma análise da importância dos psicólogos na educação matemática.. 85

Joyce Kelly de Jesus Santos
Denise Alves de Oliveira Franca

DOI: 10.47573/aya.5379.2.344.7

08

Ansiedade matemática: fatores cognitivos e afetivos . 94

Joyce Kelly de Jesus Santos
Denise Alves de Oliveira França

DOI: 10.47573/aya.5379.2.344.8

09

Discalculia do desenvolvimento: impactos no aprendizado e desenvolvimento das habilidades matemáticas 98

Joyce Kelly de Jesus Santos
Denise Alves de Oliveira França

DOI: 10.47573/aya.5379.2.344.9

10

A contribuição da psicologia na educação matemática: um olhar cognitivo e afetivo no ensino e aprendizagem.. 103

Joyce Kelly de Jesus Santos
Denise Alves de Oliveira França

DOI: 10.47573/aya.5379.2.344.10

11

Números inteiros: dificuldades e importância............. 108

Marcílio Gonçalves da Silva

DOI: 10.47573/aya.5379.2.344.11

12

Ensino e aprendizagem matemática financeira na EJA 120

Antônio Edézio Santos de Sousa

DOI: 10.47573/aya.5379.2.344.12

13

A proof of the Collatz conjecture 129

Sandoval Amui

DOI: 10.47573/aya.5379.2.344.13

14

Novos fundamentos da matemática 147

Remo Mannarino

DOI: 10.47573/aya.5379.2.344.14

Organizador 164

Índice Remissivo 165

Apresentação

Apresentamos o terceiro volume de ***“Matemática e suas aplicações: recursos e estratégias para um ensino efetivo”***. Este livro une matemática, educação e psicologia, oferecendo novas perspectivas sobre o ensino e a aprendizagem matemática.

A obra abrange desde novos fundamentos matemáticos até abordagens práticas e inclusivas. Destacamos métodos inovadores como a Feira de Matemática e técnicas lúdicas para alunos autistas. Integramos conceitos como etnomatemática e matemática crítica à educação financeira, tornando o aprendizado mais relevante.

Apresentamos recursos didáticos como o jogo Gama Matemático e estratégias para resolver problemas do ENEM. Abordamos também desafios como ansiedade matemática e discalculia.

A relação entre psicologia e educação matemática é um tema central, explorando aspectos cognitivos e afetivos do aprendizado. Analisamos o impacto positivo de psicólogos nas escolas para o ensino da matemática.

Este livro é uma ferramenta valiosa para educadores e pesquisadores, promovendo um ensino matemático eficaz e inclusivo para o século XXI.

Boa leitura!

Capítulo 01

A Feira de Matemática como ambiente de aprendizagem colaborativa e inclusiva

The Math Fair as a collaborative and inclusive learning environment

Paulo Marcos Ferreira Andrade

Secretaria Municipal de Educação e Cultura – SMEC. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6401-9769

Lucinéia de Souza Gomes

Secretaria de Estado de Educação - SEDUC. Orcid: https://orcid.org/0000-0002-6625-0024

Marília Regina de Almeida

Secretaria Municipal de Educação e Barra dos Bugres. Orcid. https://orcid.org/0000-0003-3755-2602

Francisco das Chagas Pereira de Sousa

Secretaria Estadual de Educação- Seduc. Orcid: https://orcid/000-002-5446-6450

RESUMO

A II Feira de Matemática de Barra do Bugres (II FEMABB) demonstrou ser um evento formativo e inclusivo que incentiva a participação de alunos, professores e a comunidade. Realizada em novembro de 2022, contou com 177 trabalhos inscritos em diversas categorias. A feira promoveu a interação e troca de experiências, aproximando a teoria da prática pedagógica. Foi especialmente notável pela inclusão de alunos com necessidades educativas especiais, mostrando que a matemática pode ser ensinada de maneira dinâmica e contextualizada. A II FEMABB destacou-se como um espaço colaborativo que estimula o desenvolvimento de habilidades práticas, pensamento crítico e responsabilidade social, além de fomentar a inovação e a experimentação no ensino de matemática. A feira também demonstrou ser um modelo de políticas inclusivas, criando ambientes educacionais acolhedores e adaptados para todos os alunos, independentemente de suas habilidades ou necessidades especiais.

Palavras-chave: feira de matemática; espaço formativo; inclusão; educação especial; colaboração.

AYA Editora©

ABSTRACT

The II Mathematics Fair of Barra do Bugres (II FEMABB) proved to be a formative and inclusive event that encourages the participation of students, teachers, and the community. Held in November 2022, it featured 177 works in various categories. The fair promoted interaction and exchange of experiences, bridging the gap between theory and pedagogical practice. It was particularly notable for the inclusion of students with special educational needs, showing that mathematics can be taught in a dynamic and contextualized manner. The II FEMABB stood out as a collaborative space that stimulates the development of practical skills, critical thinking, and social responsibility, while fostering innovation and experimentation in mathematics education. The fair also demonstrated itself as a model of inclusive policies, creating welcoming and adapted educational environments for all students, regardless of their abilities or special needs.

Keywords: mathematics fair; formative space; inclusion; special education; collaboration.

INTRODUÇÃO

A matemática desempenha um papel crucial em diversas atividades cotidianas e industriais. Ela é frequentemente utilizada para cálculos como porcentagens, juros, taxas de câmbio, cálculos de distância, áreas, volumes, entre outros. Além disso, é essencial para previsões financeiras, estatísticas, análise de dados e decisões estratégicas. Na indústria, a matemática ajuda a projetar, construir e testar novos produtos, além de determinar a melhor forma de produzi-los. Processos industriais, como embalagens, fabricação e controle de qualidade, também dependem fortemente da matemática para obter resultados eficazes. Assim, é inegável que a matemática tenha uma relevância preponderante na vida das pessoas e da sociedade.

Ensinar matemática na escola é um processo complexo que precisa considerar esses múltiplos aspectos, dado que a disciplina influencia diretamente o cotidiano dos seres humanos. Este desafio é agravado pela necessidade de tornar o ensino de matemática não apenas eficiente, mas também envolvente e relevante para os alunos. Nesse contexto, as feiras de matemática surgem como uma solução inovadora. Esses eventos foram criados com o objetivo claro de “despertar, nos alunos, maior interesse pela aprendizagem de matemática” e proporcionar uma maior integração entre o que se ensina e o que se aprende de fato (Zermiani, 2002, p. 53).

As Feiras de Matemática promovem a construção, reconstrução e divulgação dos conhecimentos matemáticos e científicos desde a Educação Infantil até a Educação Superior, incluindo a Educação Especial. Essas ações têm contribuído significativamente para o aprimoramento da Educação Científica e, particularmente, da Educação Matemática (Hoeller, 2015, p. 28). Através dessas feiras, é possível aproximar o processo de ensino da matemática à realidade dos alunos, tornando o aprendizado mais contextualizado e significativo.

Nesse movimento de construção e divulgação do conhecimento matemático, surge a FEMABB - Feira de Matemática de Barra do Bugres. Em sua segunda edição, realizada em novembro de 2022, a FEMABB demonstrou ser um evento que articula três aspectos importantes: seu caráter público, a integração das diferentes modalidades de ensino e a extrapolação da sala de aula. A feira se destaca por criar um ambiente onde alunos de diversas condições podem participar e apresentar seus trabalhos, promovendo um processo inclusivo e formativo.

A II FEMABB foi particularmente notável pela inclusão de alunos com necessidades educativas especiais. Esses alunos participaram ativamente, apresentando diversos trabalhos e mostrando que a inclusão é possível e benéfica para todos. Diante desse contexto, o objetivo deste artigo é evidenciar a II Feira de Matemática de Barra do Bugres como um espaço formativo e inclusivo, que articula práticas de ensino de matemática voltadas para alunos com necessidades educativas especiais.

É essencial que todas as crianças, independentemente de serem especiais ou não, tenham direito a participar de atividades de ensino bem estruturadas e intencionais. Isso implica que a escola deve oferecer os recursos educacionais e materiais necessários para que cada criança possa desenvolver seus potenciais e se integrar à sociedade. Além disso, a criação de um ambiente escolar estimulante e acolhedor é fundamental para que todas as crianças se sintam parte da comunidade escolar. A Feira de Matemática exemplifica como um ambiente inclusivo pode ser efetivamente implementado, promovendo a aprendizagem colaborativa e o desenvolvimento integral de todos os estudantes.

Contextualizando o Movimento das Feiras de Matemática no Brasil

A matemática é essencial em muitas atividades cotidianas e profissionais, como compras, planejamento financeiro e diversas carreiras, incluindo engenharia, contabilidade e medicina. Ela é uma parte integral da vida e das escolhas profissionais de muitas pessoas.

As Feiras de Matemática no Brasil foram criadas para promover um ambiente social de ensino e aprendizagem da matemática para todos os níveis e redes de ensino. O objetivo principal dessas feiras é transformar o ensino científico em sala de aula e expor o trabalho acadêmico ao público, criando um verdadeiro laboratório de aprendizagem com a participação da comunidade (Zermiani, 2002). A primeira Feira de Matemática foi realizada na FURB, envolvendo alunos da rede pública e privada, professores e coordenadores pedagógicos, com a presença de mais de mil estudantes.

Durante essas feiras, os alunos participam de atividades lúdicas e desafios matemáticos, como jogos, enigmas e problemas, além de encontros com professores e especialistas na área. Essas feiras abrangem diversos campos da matemática, promovendo o desenvolvimento de habilidades matemáticas, raciocínio e capacidade de resolução de problemas.

Atualmente, as Feiras de Matemática são instrumentos importantes para o desenvolvimento de habilidades matemáticas e a motivação dos alunos. Elas contribuem para a melhoria da autoestima dos alunos e despertam o interesse pela matemática. Além disso, oferecem aos alunos a oportunidade de desenvolver suas habilidades de maneira lúdica, contribuindo para um ensino mais significativo e interativo.

Essas feiras incentivam a reflexão sobre os conteúdos ensinados, promovem projetos interdisciplinares e estimulam a criatividade e a racionalidade dos alunos. Elas criam jogos e recursos para o ensino da matemática, aplicando técnicas que promovem o aprendizado significativo e estimulando a produção de trabalhos em grupo e autônomos (Zermiani, 2002).

As Feiras de Matemática envolvem todos os segmentos da sociedade na promoção da aprendizagem científica e matemática. Elas promovem o interesse dos alunos pela disciplina, desenvolvem suas habilidades criativas e de resolução de problemas, e incentivam a participação da comunidade e a interação entre professores, alunos e pais. Isso contribui para o desenvolvimento de uma cultura de aprendizagem colaborativa.

Organizadas com o objetivo de proporcionar aos alunos e professores o intercâmbio de conhecimentos e a realização de atividades lúdicas e criativas, essas feiras permitem avançar na compreensão dos conteúdos da matemática. Além disso, promovem a interação entre professores e alunos, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento crítico e da capacidade de resolver problemas (Zeichner, 2010; Rodrigues, 2016).

Feiras de Matemática como Espaço Formativo e Inclusivo

As Feiras de Matemática são eventos que reúnem professores, alunos, famílias, profissionais da educação e da matemática, além de especialistas para discutir, debater e trocar experiências sobre o ensino e a aprendizagem da matemática. Esses eventos permitem que os alunos explorem e compartilhem suas habilidades matemáticas, e que os professores e outros profissionais compartilhem suas experiências no ensino da matemática.

Além disso, as feiras servem como espaços para debates sobre as melhores práticas de ensino e aprendizagem em matemática, ajudando a construir pontes entre a comunidade, as escolas e a universidade (Oliveira; Piehowiak; Zandavalli, 2015). Elas promovem um ambiente colaborativo que facilita a interação entre diferentes segmentos da sociedade, enriquecendo o processo educativo.

Conforme explicita Hoeller *et al.* (2015, p. 4):

> As Feiras promovem a socialização de práticas escolares de ensino e investigação, a busca dos professores por estratégias pedagógicas que façam a interface entre o conhecimento matemático e a realidade. A formação do estudante, enquanto sujeito que busca o conhecimento matemático imbricado com questões contemporâneas).

A compreensão é que uma Feira de Matemática é “[...] um programa de incentivo ao estudo e pesquisa pelos estudantes (de todas as fases de escolaridade) sob a orientação de professores nos espaços e períodos escolares, e de socialização desses estudos e pesquisas à comunidade, por meio de uma exposição” (Biembengut; Zermiani, 2014, p.52). Uma Feira de Matemática constitui-se em um espaço formativo tanto para professores quanto para alunos, sendo um “terceiro espaço”. Esse terceiro espaço é um lugar de conexão entre o conhecimento acadêmico e o conhecimento prático profissional, onde ambos se encontram e se misturam para criar novos conhecimentos.

> As Feiras de Matemática se constituem em um evento que traz como princípio fundamental a colaboração em detrimento da competição, a formação continuada, a constante socialização do que está sendo desenvolvido em Educação Matemática nas escolas e o foco no conhecimento compartilhado (Oliveira; Piehowiak; Zandavalli, 2015, p. 46).

De acordo com as postulações de Zeichner (2010, p. 487), as Feiras de Matemática configuram-se como um cenário onde as fronteiras entre universidade e escola se tornam mais fluidas. Nesse contexto, as pessoas compartilham informações, experiências e perspectivas, aprendendo com as diferenças. Esse "terceiro espaço" é um lugar de colaboração e construção de pontes, onde novos conhecimentos e habilidades podem ser desenvolvidos e compartilhados, criando novas possibilidades e oportunidades para os alunos.

A Feira de Matemática se torna um ambiente favorável para a realização de discussões e troca de conhecimentos, integrando diversos atores sociais, como professores, pesquisadores, alunos, gestores educacionais e profissionais de tecnologia educacional. Esse ambiente possibilita a aquisição de conhecimentos e a experiência direta dos professores em formação com diversos materiais e recursos disponíveis. Além disso, proporciona o contato direto com o desenvolvimento de projetos pedagógicos relacionados à matemática, permitindo a troca de experiências entre os participantes.

Como espaço formativo, a Feira de Matemática fomenta um movimento colaborativo entre os professores que ensinam matemática, possibilitando que compartilhem conhecimentos, habilidades e experiências. Práticas colaborativas auxiliam na criação de ambientes motivadores e inclusivos, permitindo que os professores aprendam uns com os outros e contribuam com suas experiências e habilidades para o grupo (Miskulin *et al.,* 2005, p. 198). Isso torna os professores mais conscientes de seus pontos fortes e fracos, trabalhando em sinergia para desenvolver seu conhecimento e habilidades.

A Feira de Matemática também oferece aos alunos a oportunidade de aplicar seus conhecimentos, desenvolver habilidades de comunicação, trabalho em equipe e raciocínio lógico. Além de promover a colaboração entre professores e estudantes, a participação na feira serve como incentivo para a motivação dos estudantes e o desenvolvimento de suas habilidades científicas. Os alunos têm contato direto com a área de matemática, o que permite o desenvolvimento de suas habilidades e conhecimentos.

Além disso, a Feira de Matemática se constitui como um espaço de inclusão para estudantes com necessidades educativas especiais. Esses eventos não apenas desenvolvem competências como pensamento crítico, espírito científico, trabalho em equipe, uso de tecnologia e comunicação, mas também permitem que estudantes com deficiência sejam protagonistas em um cenário de constante movimento cognitivo e social. A Declaração dos Direitos da Pessoa com Deficiência (Brasil, 2009) garante o direito à educação e acessibilidade, assegurando que todas as pessoas com deficiência tenham o mesmo acesso à educação, saúde, emprego e serviços públicos e privados sem discriminação.

A Feira de Matemática, como espaço formativo e inclusivo, permite ao professor trabalhar a diversidade dos alunos e conhecer os recursos necessários para dar suporte à inclusão. Este espaço vai além da simples acessibilidade, inserindo os estudantes em um conjunto de estratégias de ensino de matemática mais inclusivas, que possibilitem o acesso a todos para além dos conteúdos programáticos. A educação inclusiva busca desenvolver ambientes educacionais que atendam às necessidades e interesses de crianças com deficiência ou necessidades especiais, proporcionando-lhes acesso à educação de qualidade e participação ativa nas atividades educacionais

Na perspectiva da inclusão, a Feira da Matemática compõe uma trama para o ensino da matemática contextualizada cujo o principal pressuposto seja:

> Capacidade de entender e reconhecer o outro e, assim, ter o privilégio de conviver e compartilhar com pessoas diferentes de nós. A educação inclusiva acolhe todas as pessoas, sem exceção. É para o estudante com deficiência física, para os que têm comprometimento mental, para os superdotados, para todas as minorias e para a criança que é discriminada por qualquer outro motivo (Mantoan 2005, p.1).

A Feira de Matemática tem o potencial de transpor a teoria da abordagem inclusiva para contextos reais, focados na aprendizagem e nas necessidades dos alunos com deficiência. Esses alunos são desafiados a trabalhar em projetos que exigem a criação de modelos matemáticos, a formulação e teste de hipóteses, além de compartilhar seus resultados e conclusões, desenvolvendo assim habilidades de comunicação e colaboração. Este ambiente inclusivo permite que alunos autistas e com diferentes transtornos desenvolvam suas habilidades de trabalho em equipe, o que é essencial para o sucesso profissional futuro. Trabalhando em projetos reais, os alunos adquirem experiência prática e desenvolvem habilidades para resolver problemas de forma criativa, fortalecendo sua autoconfiança, essencial para o sucesso acadêmico e profissional.

Nesse cenário, a Matemática Inclusiva é fundamental, criando ambientes educacionais acessíveis, amigáveis e acolhedores, com suporte e recursos adequados para todos os alunos. As escolas têm o compromisso de oferecer oportunidades de aprendizagem que estimulem o desenvolvimento intelectual, cultural, social, moral e emocional dos alunos. A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) incentiva o uso de métodos pedagógicos modernos e inovadores, promovendo a interdisciplinaridade, a inclusão e a diversidade, objetivos que são enfaticamente alcançados nas Feiras de Matemática.

Aspectos Metodológicos

O artigo "*A Feira de Matemática como Ambiente de Aprendizagem Colaborativa e Inclusiva*" foi desenvolvido utilizando uma metodologia qualitativa, estruturada para investigar e evidenciar o papel das feiras de matemática na promoção da inclusão e no desenvolvimento formativo de alunos e professores. Esta abordagem metodológica é fundamentada em pesquisa de campo, análise documental e entrevistas, proporcionando uma compreensão detalhada das experiências dos participantes. A pesquisa qualitativa adotada permite explorar as percepções, atitudes e sentimentos dos envolvidos na Feira de Matemática de Barra do Bugres (FEMABB), oferecendo uma visão rica e detalhada sobre o impacto da feira. A coleta de dados foi realizada por meio de diversas técnicas, combinando entrevistas, observação participante e análise documental. Foram conduzidas entrevistas semiestruturadas com professores de alunos especiais e de atendimento educacional especializado, além de alunos participantes. Os pesquisadores também participaram ativamente da feira, observando diretamente as interações, apresentações e atividades realizadas, enquanto documentos relacionados à organização e execução da II FEMABB foram analisados para fornecer um contexto adicional e ajudar a triangular os dados obtidos.

Pesquisa foi estruturada em diferentes fases, cada uma com objetivos específicos, visando uma compreensão holística do impacto da feira. Inicialmente, o artigo contextualiza o movimento das feiras de matemática no Brasil, destacando sua história, objetivos e impacto na educação matemática. Referências teóricas de autores como Zermiani (2002) e Hoeller (2015) são utilizadas para fundamentar a importância dessas feiras como eventos que promovem a construção, reconstrução e divulgação dos conhecimentos matemáticos e científicos desde a Educação Infantil até a Educação Superior, incluindo a Educação Especial. A fundamentação teórica envolve uma revisão da literatura sobre a relação entre feiras de matemática, inclusão e formação de professores, abordando como esses eventos podem servir como espaços formativos e inclusivos. A análise dos dados é conduzida de forma dialógica e interpretativa, envolvendo a comparação das percepções dos participantes com as teorias discutidas na fundamentação teórica. Os dados das entrevistas, observações e documentos são triangulados para garantir a validade e confiabilidade dos resultados.

Por fim, as considerações finais destacam o impacto da II FEMABB como um espaço formativo e inclusivo, evidenciando que a feira contribuiu significativamente para a prática docente e a inclusão de alunos com necessidades educativas especiais. A feira promoveu a reflexão sobre o ensino da matemática e o desenvolvimento de estratégias pedagógicas inovadoras, fortalecendo a integração de alunos com diferentes necessidades educativas. A pesquisa demonstra que a II FEMABB contribuiu para a reflexão dos professores sobre pontos que permeiam o ensino da matemática, tais como a organização e a estruturação do conteúdo, o domínio de conceitos, o desenvolvimento de habilidades e a aquisição de estratégias de solução de problemas.

Movimento Dialógico – Análise Interpretativa dos Dados

A segunda edição da Feira de Matemática de Barra do Bugres – II FEMABB – ocorreu nos dias 08 e 09 de novembro de 2022, no Ginásio de Esporte Abelhão da Escola Favo de Mel (APAE – Associação de Pais e Amigos dos Excepcionais). O evento foi projetado para orientar pedagogicamente professores que ensinam matemática nas escolas de Barra do Bugres e municípios vizinhos.

A II FEMABB contou com 177 trabalhos inscritos, distribuídos em seis categorias: (I) Educação Especial, (II) Educação Infantil, (III) Comunidade, (IV) Anos Iniciais, (V) Anos Finais e (VI) Ensino Médio, conforme apresentado na Tabela 01

Tabela 1 - Categorias de trabalhos apresentados na II FEMABB.

Categoria	Número de Trabalhos
Categoria Educação Especial	14 Trabalhos
Categoria Educação Infantil	12 Trabalhos
Categoria Comunidade	08 Trabalhos
Categoria Anos Iniciais – EF	65 Trabalhos
Categoria Anos Finais – EF	53 Trabalhos
Categoria Ensino Médio	25 Trabalhos

Fonte: Andrade *et al.* 2023.

Com a articulação destas categorias a II FEMABB cria um espaço de reflexão, compartilhamento e reconhecimento das práticas pedagógicas aplicadas na escola, aproximando teorias de ensino de matemática com a prática dos professores que ensinam matemáticas nas diversas modalidades.

De acordo com Hoeller *et al.* (2015, p.29):

> As Feiras de Matemática promovem a construção, reconstrução e divulgação dos conhecimentos matemáticos e científicos desde a Educação Infantil até a Educação Superior, incluindo a Educação Especial. Estas ações contribuíram e continuam contribuindo para o aprimoramento da Educação Científica e, particularmente, da Educação Matemática.

Como espaço formativo e articulador da diversidade durante o evento, os professores apresentam e discutem suas práticas pedagógicas, que são avaliadas pelos orientadores e recebem feedback dos mesmos da comunidade por meio da votação on-line. Além disso, também são avaliados pelos próprios participantes, que podem compartilhar sua opinião sobre as práticas dos outros. A II FEMABB também ofereceu oportunidade para que os professores e orientadores façam uma autoavaliação, refletindo sobre o processo de construção da atividade proposta e seu potencial pedagógico para o desenvolvimento de habilidades.

De acordo com os dados da pesquisa realizadas com os professores que participaram da Fera com apresentação de trabalhos, existe um movimento de construção de conhecimento, ou seja, formativo que perpassa a as fronteiras disciplinares, conforme o excerto que segue:

> O espaço da feira de matemática, potencializa a troca de conhecimento enriquece nosso saber e facilita o trabalho com os alunos com necessidades especiais, abrindo novos campos para o aprender e ensinar... (VCFA).
>
> A feira de matemática é um espaço de formação desde a hora que se inicia a discussão na escola até o último momento das apresentações. Ela me fez entender que cada criança tem o seu próprio voo. Umas voam mais rápido outras voam pausadamente, porém todas são especiais (JCSRV).

Os excertos, indicam a potencialidade formativa da II FEMABB num contexto geral, os professores dos diferentes níveis trocam experiências concretas firmadas em uma realidade pedagógica que fruto intencional de uma pesquisa para o ensino de matemática. Fica evidente que. a Feira de Matemática de Barra do Bugres atuou de forma incisiva na estimulação da criatividade e do protagonismo docente, bem como desenvolveu ações de promoção de qualidade na educação matemática.

Um dos questionamentos feitos aos professores de educação especial que orientaram trabalhos apresentados na II FEMABB, foi: ***Quais contribuições Formativas da Feira de Matemática para a sua para sua atuação docente na Educação Especial? As respostas seguem nos excertos abaixo:***

> Adquirir novos conhecimentos na troca de ideias, enriquecendo nosso currículo para uma melhor atuação... (VCFA)
>
> Ela me deu mais motivação e despertou ainda mais o interesse de estar trabalhando diretamente com esses educandos que muito tem me ensinado a importância de termos um olhar mais voltado para eles, e ir em busca de recursos pedagógico que faça com que esses educandos possam cada vez mais participar de trabalhos como esses para que eles tenham a plena participação na sociedade (VCFA).
>
> Melhorar cada dia mais o nosso trabalho como educador especial. Eles exigem de nós conhecimentos... Precisamos cada dia mais pra que possamos fazer o processo ensino aprendizagem acontecer. Isso me encanta (LSP).

Os depoimentos dos professores indicam que a II FEMABB contribuiu de várias maneiras para a atuação docente na Educação Especial. Primeiramente, ela criou um espaço para que os professores compartilhassem recursos, ferramentas e materiais educacionais, permitindo que os alunos com necessidades especiais desenvolvessem habilidades matemáticas centradas em suas necessidades. Em segundo lugar, forneceu treinamento e orientação aos professores sobre a criação de aulas significativas e de alto interesse para esses alunos. Por fim, a II FEMABB articulou e potencializou experiências positivas comprovadas em contextos reais.

Como espaço formativo, a II FEMABB incentivou os professores a refletirem sobre pontos essenciais no ensino da matemática, como a organização e estruturação do conteúdo, o domínio de conceitos, o desenvolvimento de habilidades e a aquisição de estratégias de solução de problemas. Essas tarefas, desenvolvidas para a elaboração das propostas, exigem a revisitação das teorias de ensino e pesquisa, além da reelaboração de conceitos. A feira promoveu o intercâmbio de saberes e o diálogo entre a comunidade acadêmica e a sociedade, alcançando diversos públicos, como professores, alunos, pesquisadores, gestores e interessados em educação matemática e suas tecnologias.

Conforme Avi *et al.* (2022), a Feira de Matemática é um espaço cooperativo que começa no ambiente escolar entre professor e aluno e culmina na feira como proposta de compartilhamento de saberes significativos. O principal objetivo é promover a interação entre alunos, professores e outros membros da comunidade, incentivando a produção de conteúdos matemáticos de forma lúdica, colaborativa e significativa. Além disso, a feira incentiva os professores a pensar de forma criativa sobre como ensinar matemática para alunos com necessidades especiais, oferecendo oportunidades para a criação de jogos adaptados e métodos de ensino inovadores. Isso ajuda a tornar o ensino mais eficaz e atraente, estimulando o pensamento criativo e melhorando a aprendizagem dos alunos com necessidades especiais.

A Educação Especial na II FEMABB

Os projetos apresentados na II FEMABB abordaram uma ampla gama de temáticas, incluindo o uso da tecnologia, recursos lúdicos para a aprendizagem, educação ambiental, e a promoção de habilidades de vida e cidadania. Todos os trabalhos destacaram a importância da inovação e experimentação para a melhoria da qualidade da educação. Os resultados obtidos com esses projetos são promissores, contribuindo significativamente para o processo formativo dos professores e para o desenvolvimento de estratégias inovadoras de ensino. Os diversos projetos refletem o empenho e comprometimento de professores e alunos na busca de alternativas para aprimorar o ensino. Além das categorias, os trabalhos podem ser visualizados conforme as temáticas abordadas, como apresentado na tabela 02.

Tabela 2 - Categorização por Abordagens dos Trabalhos.

Abordagens dos Trabalhos	Ed. Infantil	Ed. Especial	Anos Iniciais	Anos Finais	Ens. Médio	Comunidade	Total
Recursos e Materiais didáticos	06	13	24	05	05	01	54
Jogos e Ludicidades	06	01	30	07	02	03	49
Aplicação Matemática			07	13	07		26
Matemáticas e suas Relações com outras disciplinas			02	07	05		14
Modelagem matemática e Trabalho por Projetos			02	06	06		14
Recursos Tecnológicos				08		02	10
Educação Matemática-Etnomatemática e História				07		07	09
	12	**14**	**65**	**53**	**25**	**08**	**177**

Fonte: Andrade *et al.* 2023.

Ao que pode ser percebido, a partir da tabela 02, a II FEMABB, além de contribuir para a formação de professores e para a comunidade, permitiu que os professores se envolvessem em atividades de abordagens variadas, promovendo assim um cenário de a aprendizagem significativa. Estas atividades, são desenvolvidas em grupos no interior das escolas e fazem parte de um contexto de muito diálogo e produção de conhecimentos nas diferentes áreas.

Nesta direção, a compreensão que se tem é de que:

> Professores visitantes da Feira se favorecem, no sentido de perceber a multiplicidade de projetos, atividades e materiais didáticos, podendo reavaliar sua prática pedagógica e até mesmo encontrar subsídios para qualificar a ação docente. O mesmo pode ocorrer em relação ao público em geral, que pode ampliar seus conhecimentos na área da matemática ou de modo multidisciplinar, refletindo sobre a matemática no cotidiano (Hoeller *et al.*, 2015, p.29).

A II FEMABB é um evento público e democrático que incentiva a participação da comunidade e das escolas públicas, oferecendo suporte pedagógico gratuito através do GEPEME. A feira promove a inclusão social, permitindo a participação de alunos com necessidades especiais e deficiências, e desenvolve habilidades sociais e criativas nos professores. Na segunda edição, a feira consolidou-se como um modelo de políticas inclusivas e ambientes de aprendizagem motivadores, apresentando 14 trabalhos voltados para a educação especial.

Tabela 3 - Trabalhos da Categoria Educação Especial.

Numeração	Título Do Trabalho	Escola/Município
Trabalho 01	Sequência Numérica	Escola Especial "Favo de Mel" APAE, Barra do Bugres/MT
Trabalho 02	Uso de Reciclável na Construção de Sólidos Através da Composição de Figuras Geométricas	Escola Especial "Favo de Mel" APAE, Barra do Bugres/MT
Trabalho 03	A Matemática da História "Os 10 Fantasminha"	Escola Especial "Favo de Mel" APAE, Barra do Bugres/MT
Trabalho 04	Relação Entre Medidas de Massa Usando Instrumentos e Utensílios Convencionais na Cozinha Experimental da Apae	Escola Especial "Favo de Mel" APAE, Barra do Bugres/MT
Trabalho 05	Padrões e Regularidades na Confecção de Tapetes de Retalhos	Escola Especial "Favo de Mel" APAE, Barra do Bugres/MT
Trabalho 06	Trabalhando os Sólidos Geométricos com Alunos com Deficiência Intelectual	Escola Especial "Favo de Mel" APAE, Barra do Bugres/MT
Trabalho 07	Árvore Da Fantasia: Como um Autista Desenvolve a Noção de Inteiro E Metade	Extensão SOS Criança Barra do Bugres - MT
Trabalho 08	Processamento Matemático na Mente Autista: Uma Questão de Equilíbrio	Extensão SOS Criança Barra do Bugres - MT
Trabalho 09	Roleta da Adição: Como Autistas Compreendem o Conceito de Soma	Extensão SOS Criança Barra do Bugres - MT
Trabalho 10	Varal Da Matemática: Aprendendo Com Atividades Da Vida Diária	Extensão SOS Criança Barra do Bugres - MT
Trabalho 11	Minha Fixação, Minha Motivação: Caminhos Matemáticos de uma Criança Autista	Extensão SOS Criança Barra do Bugres - MT
Trabalho 12	Matemática Sensorial: Atividades Ocupacionais para Alunos Autistas	Extensão SOS Criança Barra do Bugres - MT
Trabalho 13	Matemática Na SRM: Jogo "Quem Sou Eu?"	C.M.E. Fábio Diniz Junqueira – Tangará da Serra MT
Trabalho 14	Matemática e a Casa do Calendário, Alunos com Deficiência Intelectual	C.M.E. Fábio Diniz Junqueira – Tangará da Serra MT

Fonte: Andrade *et al.* 2023.

Ao que percebe na apresentação da tabela 03, na II FEMMABB, houve uma expressiva participação de alunos com necessidades educativas especiais. Isto evidencia a feira de Matemática como espaço de inclusão e incentivo ao protagonismo.

Tabela 4 - Classificação dos Trabalhos por Área de Concentração.

Área de Concentração	Título Do Trabalho	Quantidade
Autismo	• Árvore da fantasia: como um autista desenvolve a noção de inteiro e metade • Processamento matemático na mente autista: uma questão de equilíbrio • Roleta da adição: como autistas compreendem o conceito de soma • Varal da matemática: aprendendo com atividades da vida diária • Minha fixação, minha motivação: caminhos matemáticos de uma criança autista • Matemática sensorial: atividades ocupacionais para alunos autistas	08 trabalhos expostos
Deficiência Intelectual	• Matemática e a casa do calendário, alunos com deficiência intelectual	01 trabalhos expostos
Deficiencia Mental	• Sequência numérica • Uso de reciclável na construção de sólidos através da composição de figuras geométricas • Relação entre medidas de massa usando instrumentos e utensílios convencionais na cozinha experimental da Apae	03 trabalhos expostos

Área de Concentração	Título Do Trabalho	Quantidade
Síndrome De Down	• A Matemática Da História “Os 10 Fantasminha” • Padrões E Regularidades Na Confecção De Tapetes De Retalhos	02 trabalhos expostos

Fonte: Andrade *et al.* 2023.

A II FEMMABB, demonstrou o quanto é possível o ensino da matemática inclusiva e que sua produção tem que adquirir uma nova postura metodológica, didática e pedagógica. Trata-se de um espaço onde o ensino **é** inclusivo, ou seja, que todos os alunos possam ter a possibilidade de acessar a disciplina (Barbosa, 2017).

A inclusão só é possível quando cenários como estas se instalam em torno do aluo e de suas necessidades. De acordo com as postulações de Manrique e Ferreira (2010. p.12).

> [...] a inclusão ocorre quando um aluno que possui algum tipo de deficiência tem a oportunidade de ser tratado como todos os outros colegas de sala, bem como partilhar e participar de situações-problema que envolvam a manipulação de ferramentas que o deixem nas mesmas condições de seus colegas para aprender.

Nesta perspectiva a II FEMABB, constituiu-se em um espaço formador, inclusivo e articulador de metodologias inovadoras, utilização de jogos e soluções criativas para cada um dos problemas encontrados. Além da troca de experiências entre professores e alunos, para que possam criar soluções eficientes e que possam tornar o ensino mais inovador.

Este espaço formativo e inclusivo evidenciou que:

> [...] todas as pessoas, mesmo as que possuem diferenças ou deficiências, se forem devidamente assistidas por políticas educacionais eficazes, estarão preparadas para a vida em sociedade, serão capazes de utilizar o conhecimento adquirido como ferramentas para o cumprimento de uma vida digna e feliz (Fonseca, 2002, p.26).

A II FEMABB demonstrou que é possível aproximar a matemática das atividades diárias, focando na realidade e nas necessidades de cada aluno de forma colaborativa. O ensino de matemática tornou-se mais dinâmico e interessante para alunos com necessidades educativas especiais, criando um ambiente motivacional onde o conteúdo é ensinado de forma lúdica e contextualizada (Hoeller, 2015; Fonseca, 2002). O ensino colaborativo da matemática, caracterizado pelo trabalho conjunto, diminui barreiras e aproxima pessoas através dos desafios dos projetos e experiências. Este método incentiva o desenvolvimento de habilidades práticas, pensamento crítico e responsabilidade social, promovendo respeito mútuo e aceitação das diferenças. Como espaço de inclusão, a II FEMABB mostrou-se um cenário colaborativo que incentiva todos a trabalharem juntos para resolver problemas e encontrar soluções, estimulando a interação entre alunos e a criação de ambientes de aprendizado inclusivo. Além disso, os professores podem usar o aprendizado colaborativo para ajudar os alunos a desenvolverem habilidades de comunicação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As Feiras de Matemática são organizadas para aumentar o interesse dos alunos nas disciplinas de matemática, estimulando sua criatividade, motivação e desenvolvimento. Durante as feiras, professores compartilham experiências, apresentam trabalhos e metodologias, e aplicam atividades lúdicas, além de aprenderem e trocarem conhecimentos entre si. Ao se engajar na II FEMABB, os professores entram em um cenário formativo e reflexivo, que incentiva a resolução de problemas na prática docente e promove a colaboração como método.

Os alunos, por sua vez, são envolvidos em pesquisas colaborativas, saindo da monotonia do cotidiano. A II FEMABB tem se consolidado como um programa que incentiva o estudo e pesquisa, proporcionando um espaço inclusivo onde estudantes com diversas habilidades, incluindo autistas e deficientes intelectuais, encontram caminhos para aprender matemática. A inclusão implica uma mudança de perspectiva educacional, aceitando e incluindo todos os alunos, independentemente de suas habilidades. A feira adotou abordagens que valorizam todas as habilidades dos alunos, garantindo que aqueles com necessidades especiais tenham as mesmas oportunidades educacionais. A segunda edição da feira criou um ambiente acolhedor para todos os participantes, oferecendo atividades adaptadas a crianças com necessidades especiais, promovendo a inclusão e desenvolvimento de todos.

REFERÊNCIAS

AVI. Peterson Cleyton, BATTISTI. Isabel Koltermann , PIVA Claudia *et al.* **Feiras De Matemática No Rio Grande Do Sul**: Um Processo Educativo De Cunho Científico E Social Mediado Pela Pesquisa. XXIII Jornada de Extensão - Salão do conhecimento UNJUI 2022.

BARBOSA, Romildo Vieira. **A Educação Inclusiva no ensino de matemática em Corrente (PI)/ Romildo Vieira Barbosa**. -2017 Disponível em http://bia.ifpi.edu.br:8080/jspui/bitstream/123456789/538/2/2017_tcc_rvbarbosa.pdf Acesso em 22 de fev. de 2023.

BRASIL. Decreto nº 6949/2009. **Promulga a Convenção Internacional sobre os Direitos da Pessoa com Deficiência e seu Protocolo Facultativo**. 2009.

BIEMBENGUT, Maria Salett; ZERMIANI, Vilmar José**. Feiras de Matemática: história das ideias e ideias da história**. Blumenau: Legere/Nova Letra, 2014. 264 p.

FONSECA, Vitor da. **Novos desafios da educação inclusiva para uma sociedade em mudança.**, In: VI Seminário capixaba de educação inclusiva, CD-Rom Educação Inclusiva. Vitória, ES: MEC/FNDE/SEESP, set/2002.

HOELLER, Solange Aparecida de Oliveira *et al.* (Org.). **Feiras de Matemática:** percursos, reflexões e compromisso social. Blumenau, SC: IFC, 2015. 163 p.

MANTOAN, Maria Teresa Eglér. **Inclusão é o Privilégio de Conviver com as Diferenças**. In Nova Escola, maio, 2005.

OLIVEIRA, Fátima Peres Zago de; PIEHOWIAK, Ruy; ZANDAVALLI, Carla. Gestão das Feiras de Matemática: em Movimento e em Rede. In: HOELLER, Solange Aparecida de Oliveira *et al* (Orgs). **Feiras de Matemática:** percursos, reflexões e compromisso social. Blumenau: IFC, 2015. 163p.

TRZASKACZ, Alcides José. CAETANO, Joyce Jaquelinne. CRUZ, Gilmar de Carvalho. **O ensino de matemática e a educação inclusiva: em foco as pesquisas realizadas no período 2010-2017**. Revista Diálogos e Perspectivas em Educação Especial, v.5, n.2, p. 161-172, Jul.-Dez., 2018

ZEICHNER, K. **Repensando as conexões entre a formação na universidade e as experiências de campo na formação de professores em faculdades e universidades**. *Educação*, Santa Maria, RS, v. 35, n. 3, p. 479-504, 2010.

ZERMIANI, Vilmar José. **Avaliação dos Projetos de Extensão Desenvolvidos pelo Laboratório de Matemática da FURB**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, SC, 2002.

______. Histórico das Feiras Catarinenses de Matemática. Revista Catarinense de Educação Matemática*,* SBEM/SC, ano I, n. 1, p. 3-9, 1996.

ZERMIANI, Vilmar José; JUBINI, Gilberto Mazoco; SOUZA, Rafael Gonçalves. **Histórico da Rede de Feiras de Matemática**. In: HOELLER, Solange Aparecida de Oliveira *et al.* (Org.). Feiras de Matemática*:* percursos, reflexões e compromisso social. Blumenau, SC: IFC, 2015. p. 17-29.

Capítulo

02

Matemática para além do espectro: uma abordagem lúdica para alunos autistas

Paulo Marcos Ferreira Andrade

Secretaria Municipal de Educação e Cultura – SMEC. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6401-9769

Lucinéia de Souza Gomes

Secretaria de Estado de Educação - SEDUC. Orcid: https://orcid.org/0000-0002-6625-0024

Marília Regina de Almeida

Secretaria Municipal de Educação e Cultura – SMEC. Orcid. https://orcid.org/0000-0003-3755-2602

Francisco das Chagas Pereira de Sousa

Secretaria Estadual de Educação-Seduc. Orcid: https://orcid/000-002-5446-645

Silvane dos Santos Ferreira da Silva

Secretaria Municipal de Educação e Cultura – SMEC. Orcid: https://orcid.org/0009-0001-2826-4126

Charles da Silva Lopes

Secretaria de Estado de Educação – SEDUC. Orcid: https://orcid.org/0009-0009-9813-611X

Karoline Vieira Sant'ana

Secretaria Municipal de Educação e Cultura – SMEC. Orcid: https://orcid.org/0009-0004-2816-9972

RESUMO

Este estudo explora a inclusão de alunos com Transtorno do Espectro Autista (TEA) no ensino de Herculano Borges, em Barra do Bugres, MT. Ao realizar um diagnóstico na escola, identificaram-se desafios, como a escassez de materiais adaptados, ausência de debates sobre inclusão e inadequações na infraestrutura. No entanto, destaca-se a importância de inovar as práticas pedagógicas, utilizando estratégias como planejamentos matemática na Escola Municipal pedagógicos e materiais didáticos manipuláveis. A gamificação e tecnologias assistivas são recursos potenciais para promover o ensino e a aprendizagem da matemática. A pesquisa adotou uma abordagem de campo, qualitativa e exploratória, com embasamento em estudos bibliográficos que ressaltam a necessidade de uma educação adaptada às necessidades dos alunos autistas. O estudo enfatiza a importância de uma abordagem inclusiva e personalizada, reconhecendo a singularidade de cada aluno e buscando formas de tornar a matemática mais acessível e significativa para todos os estudantes, independentemente de suas habilidades e desafios específicos.

Palavras-chave: inclusão; autismo; estratégias; pedagogia; ensino de matemática.

AYA Editora©

ABSTRACT

This study explores the inclusion of students with Autism Spectrum Disorder (ASD) in mathematics education at Herculano Borges Municipal School in Barra do Bugres, MT. When conducting a diagnosis at the school, challenges were identified, such as the scarcity of adapted materials, absence of discussions on inclusion, and inadequacies in infrastructure. However, the importance of innovating pedagogical practices is highlighted, using strategies such as pedagogical planning and manipulative didactic materials. Gamification and assistive technologies are potential resources for promoting the teaching and learning of mathematics. The research adopted a qualitative and exploratory field approach, based on bibliographic studies emphasizing the need for education tailored to the needs of autistic students. The study emphasizes the importance of an inclusive and personalized approach, recognizing the uniqueness of each student and seeking ways to make mathematics more accessible and meaningful for all students, regardless of their abilities and specific challenges.

Keywords: inclusion; autism; strategies; pedagogy; mathematics education.

INTRODUÇÃO

A discussão sobre a educação inclusiva e os desafios enfrentados por pessoas com deficiência ou transtornos tem ganhado cada vez mais destaque e complexidade nos últimos anos. Com o aumento significativo do número de crianças com necessidades especiais matriculadas nas escolas, torna-se premente a necessidade de compreensão e adaptação por parte das instituições de ensino para lidar com essa diversidade. Nesse cenário, o Transtorno do Espectro Autista (TEA) emerge como uma das condições menos compreendidas e abordadas no contexto educacional, o que demanda uma reflexão profunda sobre as práticas pedagógicas voltadas para a inclusão.

É notável que os alunos com TEA enfrentam desafios singulares no processo de ensino e aprendizagem, devido às suas características neurobiológicas particulares. Essas dificuldades muitas vezes requerem abordagens pedagógicas diferenciadas e adaptadas às suas necessidades específicas. Diante disso, é fundamental que tanto os professores quanto as instituições de ensino compreendam profundamente a realidade de cada aluno autista, a fim de garantir seu direito a uma educação de qualidade e inclusiva.

A motivação para este estudo surge a partir de observações empíricas realizadas no ambiente escolar, onde se torna evidente os desafios enfrentados pelos professores ao ensinar alunos com TEA. Esses desafios vão desde a falta de recursos adequados até a necessidade de adaptações curriculares e metodológicas para atender às necessidades individuais de cada aluno autista. Diante desse cenário, torna-se crucial abordar a realidade do ensino de matemática inclusiva na perspectiva da aprendizagem do aluno autista, visando identificar estratégias e práticas pedagógicas que favoreçam sua participação e desenvolvimento acadêmico.

Nesse sentido, surge o questionamento central deste estudo: como promover uma educação matemática inclusiva para alunos autistas nos anos iniciais do ensino fundamental? Essa questão envolve não apenas a identificação de estratégias pedagógicas eficazes, mas também a criação de um ambiente escolar que seja acolhedor, inclusivo e sensível às necessidades individuais de cada aluno.

O objetivo principal deste estudo é investigar as potencialidades da perspectiva lúdica na promoção de uma educação matemática inclusiva para alunos autistas nos anos iniciais do ensino fundamental. Para alcançar esse objetivo, optou-se por uma abordagem de pesquisa qualitativa e exploratória, combinando métodos de pesquisa bibliográfica, observações em sala de aula e entrevistas com professores e profissionais da educação. Essa abordagem metodológica visa não apenas produzir conhecimento teórico, mas também fornecer insights práticos e orientações para a prática pedagógica inclusiva no contexto da educação matemática.

Destaca-se a importância da participação ativa da comunidade escolar, incluindo alunos, pais e profissionais da educação, no processo de pesquisa e desenvolvimento de estratégias inclusivas. A colaboração e o envolvimento de todas as partes interessadas são fundamentais para garantir o sucesso e a eficácia das iniciativas de inclusão educacional.

Além disso, reconhece-se a necessidade de oferecer formação continuada e apoio profissional aos professores que trabalham com alunos autistas, fornecendo-lhes as ferramentas e recursos necessários para atender às necessidades específicas desses alunos de forma eficaz.

Em suma, este estudo busca contribuir para o avanço do conhecimento e das práticas pedagógicas no campo da educação inclusiva, especialmente no que diz respeito ao ensino de matemática para alunos autistas. Ao promover uma abordagem centrada no aluno e sensível às suas necessidades individuais, espera-se que este estudo possa ajudar a criar um ambiente educacional mais inclusivo e acolhedor para todos os alunos, independentemente de suas diferenças e desafios específicos.

COMPREENDENDO O AUTISMO: DEFINIÇÕES E CONCEITOS

O conceito de autismo foi introduzido inicialmente pelo psiquiatra suíço Eugen Bleuler, que o utilizou para descrever um conjunto de estudos relacionados à esquizofrenia. Originária do grego “autos” (eu), a palavra significa “próprio” ou “de si mesmo”. No entanto, foi somente a partir de 1943 que o psiquiatra austríaco Leo Kanner iniciou estudos científicos e delimitou o autismo, descrevendo suas características sociais, comportamentais e linguísticas em publicações especializadas.

O autismo é considerado um transtorno do desenvolvimento que acarreta atrasos e comprometimentos nas áreas de interação social e linguagem, abrangendo uma variedade de sintomas emocionais, cognitivos, motores e sensoriais. Esses desafios são complexos e se manifestam de maneira distinta em cada indivíduo, tornando cada caso único. Especialistas classificam o autismo em três níveis de gravidade: leve (nível 1), moderado (nível 2) e grave (nível 3). Quanto maior o nível, mais acentuados são os sintomas e as dificuldades associadas.

É importante ressaltar que muitas crianças autistas sofrem com o subdesenvolvimento devido à falta de diagnóstico e acompanhamento adequados no ambiente escolar.

Na ótica de Belisário Filho e Cunha (2010, p. 15):

> O autismo se caracteriza pela presença de um desenvolvimento acentuadamente prejudicado na interação social e comunicação, além de um repertório marcantemente restrito de atividades e interesses. As manifestações desse transtorno variam imensamente a depender do nível de desenvolvimento e idade.

Com o avanço das pesquisas científicas, foi concluído que o autismo não é simplesmente um distúrbio de contato afetivo, mas sim um distúrbio do desenvolvimento que geralmente emerge nos primeiros três anos de vida e compromete as habilidades de comunicação e interação social. Segundo Belisário Filho e Cunha (2010, p. 15), o autismo é caracterizado por um desenvolvimento significativamente prejudicado na interação social e comunicação, juntamente com um repertório restrito e repetitivo de atividades e interesses. Essas manifestações variam consideravelmente de acordo com o nível de desenvolvimento e idade do indivíduo.

No âmbito da psicanálise, o autismo é visto como uma forma de defesa contra situações adversas. De acordo com Guedes (2002), para os estudos de psicanálise de Melanie Klein, o autismo é considerado uma forma de defesa contra o trauma do nascimento, onde o contato forçado com o mundo externo resultaria em um retardamento profundo no desenvolvimento do indivíduo. No entanto, pesquisas recentes apontam que o quadro do autismo, ou transtorno do espectro autista (TEA), abrange uma gama de características complexas e pode se manifestar de forma pura ou associada a outras condições patológicas.

Segundo a Classificação Internacional de Doenças (CID-10), o autismo é classificado como um transtorno invasivo do desenvolvimento que se manifesta até os três anos de idade, com desenvolvimento anormal e característico nas áreas de socialização e linguagem, além da presença de comportamentos restritivos e repetitivos. Nesse contexto, a questão educativa assume grande relevância, requerendo o desenvolvimento de estratégias de ensino que visem alcançar níveis mais elevados de competência, conforme defendido por Belisário Filho e Cunha (2010, p. 15).

MATEMÁTICA ACESSÍVEL: ABORDAGENS PARA O APRENDIZADO DO ALUNO AUTISTA

A busca por uma educação inclusiva e equitativa no Brasil é um desafio contínuo que requer políticas educacionais mais eficazes, alinhadas com os princípios estabelecidos na Constituição Federal de 1988 e na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB). O artigo 205 da Constituição estabelece a educação como um direito de todos e um dever do Estado e da família, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, sua preparação para a cidadania e sua qualificação para o trabalho.

Nesse contexto, a educação especial desempenha um papel fundamental, sendo definida pela LDB como uma modalidade transversal a todos os níveis e modalidades de ensino, oferecida preferencialmente na rede regular, para educandos com deficiência e transtornos globais do desenvolvimento. O princípio da igualdade de condições de acesso e permanência na escola é reafirmado como um direito fundamental, garantindo o Atendimento Educacional Especializado (AEE) como uma estratégia para assegurar a inclusão desses alunos.

A interlocução entre os professores do AEE e da sala de aula regular é essencial para identificar as necessidades educacionais individuais e desenvolver estratégias pedagógicas adequadas. A Lei 12.764/2012, que institui a política nacional de proteção dos direitos da pessoa com transtorno do espectro autista, representa um avanço significativo nessa luta pelos direitos das pessoas autistas.

Para Mantoan (2007), a transformação da escola em um ambiente inclusivo requer um compromisso genuíno com a diversidade, não apenas como uma exigência, mas como um dever moral. Isso implica em repensar o ensino para atender às necessidades de todos os alunos, incluindo aqueles com deficiência e dificuldades de aprendizagem.

No contexto da matemática, o desafio é ainda maior, especialmente para alunos autistas, que podem apresentar dificuldades na compreensão de conceitos abstratos. Nesse sentido, a abordagem da matemática inclusiva visa criar uma aprendizagem significativa por meio de atividades dinâmicas e lúdicas. Os jogos, quando bem utilizados, têm o potencial de motivar os alunos e facilitar a compreensão dos conteúdos.

Rosa (2005) destaca a importância de os profissionais da educação buscarem constantemente a qualidade no ensino, por meio de estudos e comprometimento. Para os professores, a educação é uma ferramenta poderosa de transformação, e é seu dever proporcionar um ensino adequado para todos os alunos, incluindo aqueles com deficiência.

Diante desse cenário, a construção de uma educação inclusiva no Brasil requer o engajamento de toda a sociedade, o fortalecimento das políticas públicas e o compromisso dos profissionais da educação com a diversidade e a equidade. Somente assim será possível garantir o direito à educação para todos, independentemente de suas condições individuais.

Para dar continuidade ao raciocínio, é relevante considerar a perspectiva de Rosa (2005), que ressalta a importância da compreensão da diversidade humana no contexto educacional. Ao enfatizar a necessidade de os educadores aprenderem sobre os diferentes modos de ser, pensar, sentir e agir de cada indivíduo, a autora aponta para a essencialidade de práticas pedagógicas que atendam às particularidades de todos os alunos, incluindo aqueles com autismo.

Dessa forma, ao planejar e implementar estratégias de ensino da matemática para alunos autistas, os professores estão não apenas cumprindo uma exigência da educação inclusiva, mas também reconhecendo a singularidade de cada estudante e buscando maneiras de promover sua aprendizagem de forma eficaz e significativa.

Portanto, ao considerar a visão de Rosa, podemos inferir que o uso de jogos matemáticos e outras estratégias de ensino mencionadas anteriormente não apenas facilitam a compreensão dos conteúdos, mas também contribuem para a promoção de uma educação inclusiva que valoriza a diversidade e o potencial de cada aluno.

Segundo Medeiros (2011, p.09) afirma que:

> Os jogos constituem um recurso privilegiado para a aprendizagem e, quando bem utilizados, ampliam possibilidades de compreensão através de experiências significativas. Além disso, os jogos por seu caráter coletivo permitem que os alunos autistas troquem informações, façam perguntas e explicitem suas ideias e estratégias avançando em seu processo de aprendizagem e comunicação.

A citação de Medeiros (2011) ressalta a importância de ir além da simples utilização de jogos em sala de aula. Ela enfatiza a necessidade de um planejamento cuidadoso das ações docentes, com objetivos claros e específicos para cada atividade lúdica, garantindo que cada jogo contribua efetivamente para a aprendizagem matemática do estudante. Nesse sentido, é essencial que as aulas sejam bem articuladas com os jogos propostos, de forma a criar uma experiência de aprendizagem significativa e contextualizada para o aluno.

Ao considerar essa perspectiva, percebemos que o uso do lúdico e das brincadeiras não se limita apenas à transmissão de conteúdos escolares, mas também desempenha um papel fundamental no desenvolvimento global do aluno autista. Além de favorecer a assimilação de conceitos matemáticos, essas atividades contribuem para o crescimento afetivo, cognitivo, social, intelectual e psicomotor do estudante, proporcionando-lhe uma experiência educativa mais completa e enriquecedora. Assim, ao integrar o lúdico de forma planejada e articulada ao processo de ensino, os professores podem promover um ambiente de aprendizagem mais inclusivo e estimulante para todos os alunos, incluindo aqueles com autismo.

ENSINO DE MATEMÁTICA PARA ALUNOS AUTISTAS: UMA PERSPECTIVA LÚDICA

Ao dialogar com os professores da Escola Herculano Borges, tornou-se evidente que eles compartilham uma visão alinhada aos desafios e potenciais da inclusão educacional, especialmente no que tange ao ensino de matemática para alunos autistas. Os educadores reconhecem a importância da prática pedagógica inclusiva e estão cientes dos obstáculos enfrentados, como a falta de formação continuada e a necessidade de estratégias inovadoras para atender às necessidades diversificadas dos alunos.

Nesse contexto, a ludicidade na abordagem do ensino de matemática emerge como uma ferramenta promissora, capaz de superar algumas das barreiras encontradas no processo de aprendizagem. Os professores destacam a relevância de atividades lúdicas e jogos matemáticos na promoção da compreensão dos conteúdos e no desenvolvimento das habilidades dos alunos autistas.

Essa percepção está em consonância com as reflexões apresentadas por Carvalho (2005) que enfatizam a necessidade de remover barreiras e garantir o acesso e a permanência bem-sucedida dos alunos na escola, por meio de estratégias pedagógicas inclusivas e da qualificação profissional dos educadores.

Além disso, a abordagem proposta pelos professores da Escola Herculano Borges reconhece a matemática como um desafio educacional e destaca a importância de inovações pedagógicas para enfrentá-lo.

Nesse sentido, a utilização de estratégias lúdicas e a criatividade na prática docente surgem como elementos essenciais para promover uma aprendizagem significativa e estimular a autonomia dos alunos autistas no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Portanto, ao reconhecerem os desafios e potenciais da ludicidade no ensino de matemática para alunos autistas, os professores da Escola Herculano Borges demonstram um compromisso com a educação inclusiva e com o desenvolvimento integral de seus estudantes.

Durante a sessão de diálogo sobre o ensino para alunos autistas, os professores destacaram os principais desafios enfrentados no contexto educacional. Esses desafios foram compilados em uma tabela para fornecer uma visão abrangente das preocupações levantadas pelos educadores

Tabela 1 - Principais desafios do ensino para alunos autistas: opinião de professores dados da pesquisa.

Professor	Principais Desafios
Prof. A	Dificuldade de comunicação e interação social.
Prof. B	Adaptação de conteúdo para diferentes estilos de aprendizagem.
Prof. C	Manejo de comportamentos desafiadores.
Prof. D	Individualização do ensino para atender necessidades específicas.
Prof. E	Integração eficaz de recursos de apoio na sala de aula.
Prof. F	Promoção da inclusão e participação ativa dos alunos

Fonte: Dados da pesquisa, 2024.

Os dados da Tabela 01 refletem os desafios multifacetados enfrentados pelos professores ao ensinar alunos autistas. Cada professor entrevistado trouxe à tona preocupações distintas, destacando a natureza individualizada e complexa das necessidades educacionais desses alunos.

De acordo com o Professor A, a dificuldade de comunicação e interação social como um desafio central, refletindo a necessidade de estratégias específicas para promover a comunicação eficaz e a interação social dos alunos autistas. O Professor B enfatizou a adaptação de conteúdo para diferentes estilos de aprendizagem, indicando a importância de abordagens pedagógicas flexíveis e personalizadas.

Já o Professor C abordou o desafio do manejo de comportamentos desafiadores, ressaltando a necessidade de habilidades de gestão de sala de aula e estratégias de apoio comportamental. O Professor D destacou a importância da individualização do ensino para atender às necessidades específicas de cada aluno autista, reconhecendo a diversidade de habilidades e desafios dentro da sala de aula inclusiva.

Enquanto o Professor E mencionou a integração eficaz de recursos de apoio na sala de aula como um obstáculo a ser superado, indicando a importância de tecnologias assistivas e outros recursos para promover o engajamento e a participação dos alunos. Por fim, o Professor F ressaltou a promoção da inclusão e participação ativa dos alunos autistas como um desafio essencial, evidenciando a importância de um ambiente escolar acolhedor e inclusivo.

Esses dados refletem a complexidade e a variedade de desafios enfrentados pelos professores ao ensinar alunos autistas, destacando a necessidade de abordagens educacionais individualizadas, apoio especializado e um compromisso contínuo com a inclusão e a diversidade na sala de aula.

Em uma segunda questão: Como você percebe o potencial da ludicidade para o ensino de matemática para autistas? Obtive-se as respostas da tabela 02, que segue:

Tabela 2 - Percepção sobre a ludicidade no ensino de matemática para autistas.

Professor	Percepções dos professores
Prof. A	Autistas aprendem mais e se envolvem produtivamente com atividades lúdicas.
Prof. B	Concordo que a ludicidade é eficaz para o ensino de matemática para autistas.
Prof. C	Autistas demonstram maior interesse e participação em atividades lúdicas de matemática.
Prof. D	Ludicidade no ensino de matemática tem impacto positivo no aprendizado de autistas.
Prof. E	Autistas respondem bem a atividades lúdicas, tornando o aprendizado mais eficaz.
Prof. F	Utilizar a ludicidade no ensino de matemática para autistas é benéfico e estimulante.

Fonte: Dados da Pesquisa, 2024.

Os professores expressaram uma visão unânime sobre a importância e eficácia da ludicidade no ensino de matemática para alunos autistas. Todos reconheceram que o uso de abordagens lúdicas pode ser extremamente benéfico, oferecendo uma maneira engajadora e acessível de explorar conceitos matemáticos complexos. As respostas indicam que os autistas aprendem mais e se envolvem produtivamente com atividades lúdicas, demonstrando maior interesse e participação.

Essa percepção dos professores está alinhada com as ideias apresentadas pelos autores anteriormente citados. Carvalho (2005) destacou a importância de remover barreiras para garantir a inclusão educacional, enquanto Silva (2007) ressaltou a necessidade de qualificação profissional para o desenvolvimento da inclusão. Além disso, as observações dos professores estão em consonância com a perspectiva de Mantoan (2007) sobre a transformação necessária na escola para garantir uma educação inclusiva e de qualidade para todos os alunos.

Os professores também observaram que a ludicidade pode ser uma ferramenta eficaz para promover a autonomia e a confiança dos alunos, permitindo-lhes explorar e experimentar livremente os conceitos matemáticos em um ambiente seguro e de apoio. Eles ressaltaram que, ao incorporar jogos e atividades lúdicas em suas práticas de ensino, podem criar experiências educacionais mais personalizadas e adaptadas às necessidades individuais de cada aluno autista.

Em resumo, os professores reconheceram que a ludicidade desempenha um papel fundamental no ensino de matemática para alunos autistas, oferecendo uma abordagem inclusiva, envolvente e eficaz para promover a aprendizagem e o desenvolvimento acadêmico desses alunos.

Os professores foram questionados sobre como promover uma educação matemática inclusiva para alunos autistas nos anos iniciais do ensino fundamental, solicitando-lhes que identificassem estratégias e eixos que abordassem essa questão. Os resultados foram compilados na tabela 03, onde são apresentadas as respostas dos professores de forma organizada e coesa, destacando as diferentes estratégias e áreas de foco que eles consideraram relevantes para atender às necessidades desses alunos.

Tabela 3 - Estratégias que como promover uma educação matemática.

Estratégias	Ações
Formação Específica	• Participação em workshops sobre autismo e educação inclusiva. • Leitura de literatura especializada sobre métodos de ensino para autistas. • Colaboração com profissionais da área de saúde e educação especializada.
Ambiente de Aprendizagem	• Adaptação da sala de aula para minimizar estímulos sensoriais. • Criação de espaços de descanso e relaxamento para alunos autistas. • Implementação de rotinas visuais claras para orientar as atividades.
Adaptação Curricular	• Modificação de atividades matemáticas para atender às necessidades individuais dos alunos. • Utilização de recursos visuais e concretos para auxiliar na compreensão dos conceitos. • Incorporação de tecnologias assistivas para adaptação de conteúdos e materiais.
Uso de Tecnologia Assistiva	• Utilização de softwares educacionais interativos para reforçar conceitos matemáticos. • Adaptação de aplicativos e ferramentas online para atender às necessidades dos alunos autistas. • Introdução de tablets e dispositivos eletrônicos como recursos de aprendizagem.
Ensino Multissensorial	• Incorporação de materiais táteis e visuais para ensinar operações matemáticas. • Exploração de atividades que envolvam diferentes modalidades sensoriais. • Utilização de recursos sonoros e musicais para reforçar conceitos matemáticos.
Atividades Lúdicas e Jogos	• Introdução de jogos matemáticos adaptados para promover a participação ativa dos alunos. • Organização de competições e desafios matemáticos em formato de jogo. • Criação de atividades lúdicas que estimulem a resolução de problemas matemáticos.
Trabalho em Grupo	• Organização de atividades de aprendizagem colaborativa em pequenos grupos. • Promoção de discussões e trocas de experiências entre os alunos. • Designação de papéis específicos para cada aluno no grupo, incentivando a participação.
Apoio Individualizado	• Oferta de tempo adicional para realização das atividades matemáticas. • Fornecimento de suporte individualizado durante as aulas, adaptado às necessidades de cada aluno. • Realização de avaliações formativas para acompanhar o progresso individual dos alunos.

Fonte: Dados da pesquisa, 2024.

A tabela 03, apresenta uma síntese das estratégias propostas pelos professores para promover uma educação matemática inclusiva para alunos autistas nos anos iniciais do ensino fundamental. A formação específica é essencial para que os professores compreendam as necessidades dos alunos autistas e desenvolvam práticas pedagógicas adequadas. Participar de workshops sobre autismo e educação inclusiva, ler literatura especializada e colaborar com profissionais da área são medidas fundamentais para adquirir esse conhecimento.

Além disso, a adaptação do ambiente de aprendizagem é crucial para criar um espaço acolhedor e propício ao desenvolvimento dos alunos autistas. Através da minimização de estímulos sensoriais, da criação de espaços de descanso e relaxamento e da implementação de rotinas visuais claras, os professores podem proporcionar um ambiente mais confortável e organizado, facilitando a participação e aprendizagem dos alunos autistas.

Outro ponto relevante destacado na tabela é a importância da adaptação curricular. Modificar atividades matemáticas para atender às necessidades individuais dos alunos, utilizar recursos visuais e concretos e incorporar tecnologias assistivas são estratégias eficazes para garantir que todos os alunos tenham acesso ao currículo e possam desenvolver suas habilidades matemáticas de forma significativa e inclusiva.

REFLEXÕES SOBRE O POTENCIAL DA LUDICIDADE NO ENSINO DE MATEMÁTICA PARA ALUNOS AUTISTAS

Ao contemplar as perspectivas dos professores e refletir sobre as contribuições dos autores, emerge uma compreensão profunda do valor da ludicidade no contexto do ensino de matemática para alunos autistas. A partir das visões compartilhadas pelos educadores e das análises propostas por Rosa (2005), Carvalho (2005), e Silva (2009), é possível delinear um cenário educacional enriquecido pela inclusão e pela eficácia pedagógica.

A ludicidade, conforme discutido por Rosa (2005), não apenas representa uma ferramenta pedagógica, mas também uma filosofia educacional que promove a equidade e o desenvolvimento integral dos alunos autistas. Essa abordagem não se limita à simples aplicação de jogos e atividades lúdicas, mas sim à criação de um ambiente educacional engajador, motivador e acessível, onde cada aluno possa explorar e construir seu conhecimento de forma significativa.

Nesse sentido, a formação continuada dos professores, como destacado por Carvalho (2005) e Silva (2009), desempenha um papel fundamental. Essa formação não apenas capacita os educadores a compreenderem as necessidades específicas dos alunos autistas, mas também os habilita a desenvolverem estratégias pedagógicas adaptadas, que integram a ludicidade de maneira eficaz no processo de ensino e aprendizagem.

Assim, ao reconhecer e valorizar o potencial da ludicidade no ensino de matemática para alunos autistas, estamos promovendo uma educação inclusiva e humanizada, que visa não apenas à transmissão de conhecimentos, mas também ao cultivo das habilidades socioemocionais, cognitivas e motoras dos estudantes. Essa abordagem, quando integrada de forma consistente e intencional, não só facilita a aprendizagem, mas também estimula a autonomia, a confiança e o senso de pertencimento dos alunos, contribuindo para a construção de uma sociedade mais justa, igualitária e acolhedora.

A pesquisa realizada com os professores dos anos iniciais revela que a ludicidade pode ser uma ferramenta valiosa no ensino de matemática para alunos autistas. Suas respostas unânimes ressaltam o potencial das atividades lúdicas em promover um aprendizado mais engajador, acessível e significativo para essa população estudantil. Ao reconhecer a importância da ludicidade, os professores estão adotando uma abordagem inclusiva e centrada no aluno, que valoriza a diversidade de estilos de aprendizagem e busca atender às necessidades individuais de cada estudante autista. Essa compreensão alinha-se com as perspectivas teóricas de autores como Rosa (2005), Carvalho (2005) e Silva (2009), que destacam a ludicidade como uma estratégia eficaz para remover barreiras educacionais e promover o pleno desenvolvimento dos alunos autistas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo desta pesquisa, mergulhamos em uma análise aprofundada sobre o ensino de matemática para alunos autistas, considerando não apenas as teorias educacionais, mas também as percepções e experiências práticas dos professores que lidam diretamente com esses alunos. Nesse processo, foi possível compreender a complexidade e os desafios enfrentados no contexto educacional inclusivo, onde a busca pela efetivação dos direitos à educação de qualidade para todos os alunos é constante.

Partindo das reflexões propostas por Rosa (2005), Carvalho (2005), Silva (2009) e outros, foi evidenciada a importância da educação inclusiva como um princípio fundamental para a construção de uma sociedade mais justa e igualitária. Nesse sentido, a ludicidade surge como uma ferramenta pedagógica capaz de romper barreiras educacionais e proporcionar oportunidades de aprendizagem significativas para alunos autistas.

As respostas dos professores participantes da pesquisa revelaram uma visão unânime sobre o potencial da ludicidade no ensino de matemática para alunos autistas. A ludicidade foi reconhecida como uma abordagem engajadora e acessível, capaz de motivar e envolver os alunos de forma eficaz. Além disso, destacou-se o papel das atividades lúdicas na promoção de um ambiente de aprendizagem inclusivo, onde cada aluno é reconhecido e valorizado em suas habilidades e potencialidades individuais.

Essas conclusões corroboram com as teorias que defendem a importância de uma educação centrada no aluno, que respeite e valorize a diversidade humana. Ao reconhecer o potencial da ludicidade como uma estratégia pedagógica eficaz, os professores estão contribuindo para a construção de práticas educativas mais inclusivas e humanizadas, que buscam atender às necessidades específicas de cada aluno autista.

À luz das reflexões propostas por Rosa (2005), Carvalho (2005), Silva (2009) e outros, aliadas às percepções e experiências práticas dos professores, é possível afirmar que a ludicidade emerge como uma ferramenta pedagógica essencial no ensino de matemática para alunos autistas. A análise das respostas dos professores, evidenciada na Tabela 03, reforça essa conclusão, destacando a unanimidade de visão sobre o potencial da ludicidade para promover uma educação matemática inclusiva.

Ao reconhecer a ludicidade como uma abordagem engajadora e acessível, os professores estão não apenas proporcionando oportunidades de aprendizagem significativas, mas também criando um ambiente educacional inclusivo, onde cada aluno é valorizado em suas habilidades e potencialidades individuais. A ludicidade, conforme revelado na pesquisa, promove a motivação e o envolvimento dos alunos autistas de forma eficaz, contribuindo para a construção de práticas educativas mais humanizadas e centradas no aluno.

Assim, a implementação de estratégias lúdicas no ensino de matemática não apenas beneficia os alunos autistas, mas também enriquece o ambiente escolar como um todo. Essa abordagem não só fortalece os laços de colaboração e respeito mútuo entre os membros da comunidade escolar, mas também impulsiona o avanço em direção a uma educação de qualidade, que reconhece e valoriza a diversidade humana em todas as suas formas.

Logo, podemos concluir que a ludicidade desempenha um papel fundamental no ensino de matemática para alunos autistas, oferecendo uma abordagem inclusiva, envolvente e eficaz para promover a aprendizagem e o desenvolvimento acadêmico desses alunos. A sua implementação nas práticas educativas não apenas beneficia os alunos autistas, mas também enriquece o ambiente escolar como um todo, fortalecendo os laços de colaboração e respeito mútuo entre todos os membros da comunidade escolar.

REFERÊNCIAS

BAPTISTA, C.R. **Autismo e educação:** reflexões e propostas de intervenção. Porto Alegre: Artmed, 2002.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Lei n° 9.394. Promulgada em 20 de dezembro de 1996. Brasília: Editora do Brasil, 1996.

BRASIL. **Lei n°12764, de 27 de dezembro de 2012**.e diretrizes e bases da educação nacional. Institui a política nacional de proteção dos direitos da pessoa com TEA.

BELISÁRIO FILHO José Ferreira. CUNHA. Patrícia. **A Educação Especial na Perspectiva da Inclusão Escolar Transtornos Globais do Desenvolvimento**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Especial; [Fortaleza] : Universidade Federal do Ceará, 2010

CARVALHO, Rosita Edler. **Educação Inclusiva:** com os pingos nos is. 3. Ed. Porto Alegre: Mediação, 2005.

GUEDES, D. P.; GUEDES, J. E. R. P. **Criando e Recriando Educação**. Jogos matemáticos. Porto Alegre: Mediação, 2002.

MANTOAN, M. T. E. **Igualdade e diferenças na escola: como andar no fio da navalha**. Disponível em: . Educação, 32(1). 2007. Recuperado de https://periodicos.ufsm.br/reveducacao/article/view/675 Acesso em: 15 de mai. 2024

ROSA. C.C. **Os limites da inclusão**. Revista Pátio. Porto Alegre, ano III, n.32. p. 08-12, nov. 2004/jan. 2005.

SILVA, M. O. E. (2007). **Inclusão:** Concepções e Práticas nos Últimos Dez Anos – Relato de uma Experiência, Conferência proferida na Universidade Federal do Rio Grande do Norte: IIIº Ciclo de Estudos e Debates sobre Educação Inclusiva, 1 e 2 de outubro.

Capítulo 03

Integrando etnomatemática e matemática crítica na educação financeira: contribuições para o ensino fundamental

Integrating ethnomathematics and critical mathematics in financial education: contributions to elementary school

Wesley Guilherme de Lira Dantas

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte – Natal Central. https://lattes.cnpq.br/1497178204202205

Danielle de Oliveira Nunes Vicente

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte – Natal Central. http://lattes.cnpq.br/3731365462449878

RESUMO

O estudo examina como a matemática financeira é ensinada no ensino fundamental a partir do ponto de vista da etnomatemática e da matemática crítica. O objetivo é descobrir como essas técnicas podem ajudar os alunos a entender e usar a matemática financeira melhor e fortalecer sua cidadania e inclusão cultural. A pesquisa-ação foi realizada com uma classe de alunos para alcançar esse objetivo. O foco da pesquisa foi aplicar o conceito de porcentagem como ferramenta didática usando um cardápio de lanchonete. A metodologia consistia em quatro etapas: introdução ao conteúdo teórico, aplicação prática com o cardápio, criação e exibição de combos pelos alunos e avaliação quantitativa e qualitativa dos resultados. Os resultados mostraram que a abordagem prática e contextualizada ajudou os alunos a entender melhor o conceito de porcentagem e a aplicá-lo a situações reais. A maioria dos alunos tinha uma boa compreensão dos cálculos de porcentagem e era capaz de fazer escolhas informadas sobre ofertas e descontos. As avaliações qualitativas mostraram que os alunos estavam mais motivados e envolvidos com o conteúdo. Eles também perceberam melhorias em suas habilidades matemáticas. A pesquisa mostra que os métodos contextualizados são eficazes na promoção de uma

AYA Editora©

DOI: 10.47573/aya.5379.2.344.3

educação matemática mais significativa e crítica. Eles também enfatizam a importância de incorporar abordagens pedagógicas que conectem a matemática financeira ao cotidiano dos alunos.

Palavras-chave: etnomatemática; matemática financeira; ensino fundamental; matemática crítica.

ABSTRACT

The study examines how financial mathematics is taught at the Elementary School level from the perspectives of ethnomathematics and critical mathematics. The aim is to discover how these techniques can help students better understand and use financial mathematics while strengthening their citizenship and cultural inclusion. An action research project was conducted with a class of students to achieve this goal. The focus of the research was to apply the concept of percentage as a teaching tool using a snack bar menu. The methodology consisted of four stages: introduction to theoretical content, practical application with the menu, creation and presentation of combos by the students, and quantitative and qualitative evaluation of the results. The findings indicated that the practical and contextualized approach helped students better understand the concept of percentage and apply it to real-life situations. Most students demonstrated a good understanding of percentage calculations and were able to make informed choices about deals and discounts. Qualitative assessments revealed that students were more motivated and engaged with the content. They also noticed improvements in their mathematical skills. The research shows that contextualized methods are effective in promoting a more meaningful and Critical Mathematical education. It also highlights the importance of incorporating pedagogical approaches that connect Financial Mathematics to students' everyday lives.

Keywords: ethnomathematics; financial mathematics; elementary school; critical mathematics.

INTRODUÇÃO

A educação matemática é cada vez mais reconhecida como uma ferramenta fundamental para o desenvolvimento das habilidades cognitivas e para a formação cidadã das pessoas. Assim, o ensino de matemática financeira é fundamental para capacitar os alunos a lidarem com questões financeiras e econômicas em suas vidas pessoais e profissionais.

Assim, o objetivo deste estudo é examinar o ensino de matemática financeira do ponto de vista da etnomatemática e da matemática crítica. Dado que a etnomatemática estuda a Matemática em contextos culturais diferentes, enquanto a matemática crítica usa a Matemática para analisar questões sociais e políticas.

Para isso, o estudo usa uma pesquisa-ação com uma turma de alunos ensino fundamental para destacar a importância desses métodos para a formação integral dos alunos. Tais estratégias são significativas porque conectam a Matemática ao cotidiano dos alunos, tornando-as mais significativas e incentivando a refletir criticamente sobre as coisas que acontecem ao seu redor.

Deste modo, a etnomatemática oferece uma visão mais ampla das relações entre matemática, cultura e sociedade, estudando como as matemáticas são usadas em diferentes contextos. Ela se torna significativa porque leva em consideração as diferentes maneiras pelas quais as pessoas pensam e resolvem problemas matemáticos, fazendo com que contribua para uma educação mais inclusiva e contextualizada. Isso promove a valorização dos diferentes pontos de vista encontrados no processo de ensino e aprendizagem.

A matemática crítica, por sua vez, busca relações de poder e as estruturas sociais que estão presentes no ensino tradicional de Matemática. Tal perspectiva, que usa uma abordagem mais reflexiva, visa empoderar os alunos, tornando-os agentes críticos e transformadores da realidade. Isso é essencial para capacitá-los a lidar com problemas sociais e econômicos com mais consciência e conhecimento.

Assim, esse estudo incorpora uma perspectiva de pesquisa-ação com o objetivo de incentivar a reflexão de uma prática pedagógica mais engajada e participativa. Visto que, a pesquisa-ação ajuda a desenvolver métodos mais eficazes de ensino de matemática financeira, adaptando aos requisitos e contextos únicos de cada comunidade escolar, envolvendo professores e alunos em processos de pesquisa e intervenção no cotidiano educacional.

A necessidade de uma abordagem educacional que não apenas ensine habilidades financeiras, mas também trabalhe a consciência crítica e a inclusão para os alunos é o que impulsionou a decisão de abordar o ensino de matemática financeira sob as perspectivas citadas.

Pois esses métodos permitem que os alunos percebam a Matemática não apenas como uma ferramenta técnica, mas como um meio de aprender e interagir com o mundo ao seu redor de forma mais reflexiva e justa.

Portanto, neste artigo apresentamos práticas pedagógicas que possam ser usadas em sala de aula para apoiar a inclusão e a cidadania. A pesquisa-ação será conduzida com uma turma de Ensino Fundamental Anos Finais, onde serão implementadas e avaliadas atividades que integrem essas abordagens.

EDUCAÇÃO FINANCEIRA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Ser cidadão implica respeitar tanto os seus direitos quanto deveres, além de contribuir para o bem comum. Para isso, requer a formação de cidadãos críticos e conscientes. A educação matemática é fundamental para esse processo, pois fornece aos alunos as habilidades necessárias para entender e analisar criticamente os fenômenos sociais e econômicos.

A participação crítica e ativa na sociedade requer competências matemáticas, como o raciocínio lógico, a resolução de problemas e a análise de dados, para que os cidadãos sejam capazes não só de implementar os seus direitos e obrigações, mas também de os compreender.

Tanto a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) quanto a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) enfatizam a importância da Educação Matemática para o desenvolvimento de um cidadão consciente. As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) (Brasil, 2013, p.119) afirmam que:

> A criação de um ambiente propício à aprendizagem na escola terá como base o trabalho compartilhado e o compromisso dos professores e dos demais profissionais com a aprendizagem dos alunos; [...] a contextualização dos conteúdos, assegurando que a aprendizagem seja relevante e socialmente significativa.

Para atingir esse objetivo, a pluralidade sociocultural do Brasil deve ser levada em consideração na educação matemática. Um currículo de Matemática deve respeitar a diversidade cultural e dar aos alunos a oportunidade de participar ativamente da transformação de seu ambiente. Isso é essencial para que as pessoas desenvolvam uma crítica diante das questões sociais e se envolvam no mundo do trabalho, nas relações sociais e na cultura.

A Educação Financeira também é importante, pois é fundamental para ser cidadão. Ao aprendê-la, ajuda os alunos a gerenciarem suas finanças de maneira responsável, eles adquirem habilidades como planejamento financeiro, compreensão de juros e análise de investimentos. Essa importância é dada já nas primeiras páginas de BNCC (Brasil, 2017), quando destaca que:

> Cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora. Entre esses temas, destacam-se:[...] Educação Financeira [...].

Dessa forma, os alunos devem ser preparados para tomar decisões financeiras estratégicas com segurança por meio de atividades práticas. De modo que atividades também os incentivem a ter comportamentos financeiros positivos que beneficiam tanto suas comunidades quanto seus indivíduos.

Portanto, ao incorporar desde cedo a Educação Financeira no âmbito escolar, ela se torna uma ferramenta poderosa para desenvolver habilidades essenciais para a participação ativa e consciente nos alunos.

MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO FUNDAMENTAL

A matemática financeira é uma parte fundamental da Matemática que desempenha um papel importante na educação básica porque ajuda a formar alunos como cidadãos conscientes e preparados para enfrentar os desafios financeiros que surgem durante a vida.

Essa área vai além do cálculo de números, pois ela dá aos alunos as ferramentas necessárias para entender e controlar adequadamente seu dinheiro, para que tomem decisões financeiras inteligentes e evitando armadilhas comuns como o endividamento. Em relação a isso, Dias *et al.* (2011) afirmam que:

> Matemática Financeira é uma ferramenta essencial para a formação do cidadão, pois está profundamente entrelaçada com aspectos do cotidiano, como o gerenciamento de finanças pessoais e a tomada de decisões econômicas informadas.

De tal forma, a introdução da matemática financeira na educação básica proporciona desde cedo uma inserção nas questões financeiras do cotidiano dos alunos, pois dá a capacidade de avaliar a vantagem de descontos, comparar opções de preço de um produto tudo isso com segurança.

Por isso, Gouvêa (2006, p. 12) ressalta que:

> A Educação Financeira deveria ser iniciada desde as séries iniciais do Ensino Fundamental, para que o indivíduo pudesse ter condições de interpretar os acontecimentos que estão à sua volta e ter a chance de se preparar financeiramente, pensando no futuro.

Assim, quando olhamos a abordagem da matemática financeira no ensino fundamental notamos que ela se concentra em conceitos básicos como porcentagem, descontos e juros simples, que podem ser aplicados a coisas cotidianas como compras ou relacionado ao orçamento da família (pontos esses que foram utilizados na prática descrita neste artigo).

Dado isso, a preparação adequada é essencial para que eles possam lidar com questões financeiras de forma crítica, pois as decisões relacionadas à finanças se tornam mais comuns e impactantes nessa fase da vida.

Para isso, afim de tornar o ensino de matemática financeira mais envolvente e eficaz, é necessário usar materiais didáticos adequados e metodologias inovadoras, poderemos notar a presença de duas delas evidenciadas no estudo a resolução de problemas e a metodologia ativa.

Na ação desenvolvida, a resolução de problemas foi utilizada para promover aos alunos verificarem se é vantajosa ou não os descontos atribuídos em situações pensadas no cotidiano da turma.

Por sua vez, a metodologia ativa promove o engajamento dos alunos em atividades práticas, como a criação de propostas de desconto e a simulação de compra e venda, o que favorece o desenvolvimento de habilidades de tomada de decisão, como enfatiza Berbel (2011) de que "as metodologias ativas têm o potencial de despertar a curiosidade, à medida que os alunos se inserem na teorização e trazem elementos novos, ainda não considerados nas aulas ou na própria perspectiva do professor".

Visto que a BNCC traz nortes para inserir a Matemática Financeira no Ensino Fundamental, dá possibilidades para se concretizar a utilização de uma área já tão bem determinada sua importância. Prova disso está numa habilidade indicada na Base, onde foi considerada no momento de planejamento da ação a qual este artigo se refere.

Estamos referindo-se a uma habilidade da unidade temática de Números na BNCC, Brasil (2018) sendo ela:

> Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da "regra de três", utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

Diante dessa situação, os livros didáticos que são usados no ensino fundamental e médio mostram que, embora ofereçam uma abordagem simplificada, eles frequentemente não fornecem um contexto suficiente, o que pode tornar mais difícil para os alunos entenderem suas aplicações no mundo real.

Ainda assim, quando aplicado, o entretenimento resulta em uma contextualização de um caráter que foge da realidade cotidiana dos alunos devido a fatores sociais, financeiros e outros. Gouvêa (2006) destaca que:

> A Matemática Financeira muitas vezes é ensinada de forma desvinculada da realidade do aluno, levando a uma memorização de fórmulas sem compreensão do impacto e uso prático desses conceitos.

Essa forma desvinculada da realidade do aluno foi notada quando, ao analisar o livro didático dos alunos da turma em que foi realizada a prática, notamos que havia contextualizações do conteúdo de porcentagem, mas que se distanciavam do cotidiano deles.

Assim, foi preciso reavaliar como seria tratada a proposta feita pelo livro de modo a adaptar para a situação de vida da turma, fazendo assim uma contextualização que fosse possível de ser assimilada por eles.

Portanto, é fundamental que os professores e os livros didáticos trabalhem para contextualizar o ensino de matemática financeira, integrando-o com outros conteúdos matemáticos e com a vida cotidiana dos alunos.

CONEXÕES ENTRE MATEMÁTICA CRÍTICA E MATEMÁTICA FINANCEIRA

Para formar indivíduos conscientes e preparados para enfrentar os desafios econômicos e sociais que surgem no mundo moderno, é necessário um campo de estudo interdisciplinar que surge das conexões entre a matemática financeira e a matemática crítica.

O objetivo do ensino da matemática crítica é relacionar a Matemática com questões sociais, políticas e morais. Esse método abre os olhos dos alunos para além do domínio técnico dos números, o que lhes permite compreender os conceitos matemáticos de maneira mais profunda e reflexiva.

De acordo com Skovsmose (2001), a educação matemática crítica visa preparar os alunos para uma "futura participação nos processos de trabalho na sociedade, ampliando, também, para os aspectos da vida social, cultural e política". Deste modo, essa abordagem é poderosa ao ensinar matemática financeira porque não apenas ensina os conceitos financeiros, mas também estimula a análise crítica das consequências das escolhas financeiras na vida pessoal e na sociedade.

A integração da matemática crítica com a matemática financeira torna possível a criação de práticas pedagógicas que abordam questões de relevância cotidiana, como taxas de desconto, distribuição de renda e orçamentos.

Essa prática, conforme sugerido por Cunha e Laudares (2017), proporciona discussões sobre questões econômicas, sociais e políticas no ambiente escolar, promovendo uma postura mais reflexiva e crítica entre os estudantes. Com isso, eles aprendem mais sobre o impacto das decisões financeiras em suas vidas e na sociedade ao lidar com situações práticas e cotidianas.

Dessa forma, uma abordagem interdisciplinar da matemática crítica facilita a compreensão de como os conceitos financeiros se relacionam com outras áreas do conhecimento, como a economia, a política e a ética, preparando os alunos para tomarem decisões financeiras que como apontam Silva e Powell (2013) são:

> Estimulados a produzir uma compreensão sobre finanças e economia, através de um processo de ensino, que os torne aptos a analisar, fazer julgamentos fundamentados, tomar decisões e ter posições críticas sobre questões financeiras que envolvam sua vida pessoal, familiar e da sociedade em que vivem.

Ao ensinar matemática financeira, essa abordagem é eficaz porque não apenas ensina os conceitos financeiros, mas também estimula a análise crítica das implicações das decisões financeiras na vida pessoal e na sociedade.

A integração da matemática crítica com a matemática financeira torna possível o desenvolvimento de práticas pedagógicas que abordam questões de relevância cotidiana, como taxas de juros, distribuição de renda e orçamentos familiares.

Por exemplo, uma situação problema foi criada para que os alunos pudessem praticar o cálculo matemático e aprender sobre prioridades financeiras e gestão responsável do dinheiro.

Essa abordagem considera o contexto socioeconômico dos alunos e evita que a educação financeira seja vista como um conjunto de exercícios abstratos sem aplicação real. Além disso, a ênfase em como os conceitos matemáticos podem ser aplicados na matemática crítica é particularmente relevante para a educação financeira.

Essa abordagem prepara os alunos para enfrentar os desafios do mundo financeiro ao permitir que eles usem projetos, estudos de caso e atividades para aplicar os conhecimentos financeiros a situações reais.

A integração entre matemática crítica e matemática financeira também se revela importante para a conscientização crítica dos estudantes em relação ao consumo responsável. A familiaridade com o contexto dos problemas financeiros pode facilitar a compreensão e a resolução desses problemas pois, conforme apontado por Franchi (2001):

> As dificuldades de resolução de problemas verbais podem decorrer de interpretações em que interferem fatores relativos às diferentes relações do aluno com o saber em suas experiências não escolares... ou ainda podem decorrer de um desvio do universo de interpretação do texto escolar, tomado como referindo-se a um problema do cotidiano.

Assim, a combinação de matemática crítica e matemática financeira permite que os alunos aprendam conceitos financeiros de maneira mais crítica e profunda.

Essa metodologia vai além da educação tradicional. Assim, a educação matemática crítica se torna uma ferramenta crucial na formação de indivíduos preparados para enfrentar os desafios de um mundo cada vez mais interconectado e complexo.

A PESQUISA-AÇÃO: ANÁLISE DE RESULTADOS E DISCUSSÕES

A necessidade de descobrir se a integração da matemática financeira atrelada à etnomatemática no Ensino Fundamental era eficaz foi o impulso para a pesquisa, fazendo deste uma pesquisa-ação afim de avaliar os resultados obtidos através da prática desenvolvida e sua eficiência com a utilização desta metodologia.

Considerou-se utilizar a etnomatemática pois é uma abordagem rica e contextualizada para o ensino da matemática que examina como as pessoas usam a Matemática em contextos culturais específicos. D'Ambrosio (1993) nos diz que a etnomatemática é a arte ou técnica de explicar, entender e se desempenhar na realidade dentro de um contexto cultural próprio.

A Pesquisa-ação, por sua vez, foi desenvolvida com a perspectiva de ensinar o conceito de porcentagem de forma dinâmica e contextualizada ao longo do estágio supervisionado em uma escola municipal de ensino fundamental.

A matemática financeira foi escolhida para abordar o conteúdo de porcentagem por ser um campo que se relaciona bem com este conteúdo e que foi possível estabelecer também com aspectos etnomatemáticos que viriam a ser trabalhados com base nas características sociais e financeiras da turma.

A escola municipal, campos de pesquisa, está localizada em uma área periférica da cidade do Natal/RN e atende a alunos de baixa renda que enfrentam vulnerabilidades sociais, por isso o contexto socioeconômico da turma foi importante para definir a abordagem da ação.

As contextualizações estabelecidas foram cuidadosamente pensadas para refletir as situações cotidianas e familiares dos alunos, tendo em vista essa realidade. Isto pois já afirma D'Ambrosio (2005, p.63), que: "muito mais que a importância acadêmica das disciplinas, o currículo reflete o que a sociedade espera das respectivas disciplinas que o compõem."

Ao usar um cardápio de lanchonete como material didático, pretende-se não apenas ensinar conceitos matemáticos de porcentagem, mas também conectar com coisas que acontecem diariamente com os alunos, como tomar decisões sobre como comprar alimentos ou avaliar descontos e promoções.

Os alunos foram incentivados a examinar se os combos de lanche oferecidos eram vantajosos em comparação com os preços individuais no menu selecionado. A intenção dessa atividade era fazer com que a matemática financeira fosse associada a situações do cotidiano, tornando o aprendizado mais relevante e significativo para os alunos.

Desta forma, eles puderam aprimorar suas habilidades em porcentagem ao avaliarem quantos porcento de desconto estavam sendo dados pelo estabelecimento e familiarizar-se com termos e conceitos financeiros comuns.

A pesquisa-ação foi desenvolvida em quatro momentos distintos, cada um com seus objetivos específicos e modos de atuação, permitindo um aprofundamento gradual do conteúdo. Porém, antes da ação, observamos a turma de ensino fundamental, percebemos suas necessidades e elaboramos uma proposta de prática. A seguir, detalham-se os momentos da ação:

1º Momento

No primeiro momento da ação, houve a introdução ao conteúdo de porcentagem, partindo do conhecimento prévio dos alunos e utilizando exemplos que fossem relevantes e assimiláveis para eles discutindo situações cotidianas e incentivando os alunos a compartilhar suas próprias experiências relacionadas a porcentagem, criando um ambiente de aprendizado colaborativo e interativo.

Foi apresentado representações da porcentagem em suas formas percentuais, fracionarias, decimais e ilustrada afim de promover atividades práticas simples. Este primeiro momento é fundamental para que fosse estabelecido uma base sólida para as etapas subsequentes da pesquisa-ação.

2º Momento

Após a apresentação do conteúdo teórico sobre porcentagem, dá-se início a utilização do cardápio como material didático. Este cardápio, conforme a figura 1, foi cuidadosamente elaborado com base em uma lanchonete acessível aos alunos, localizada nas proximidades da escola e nas áreas onde a maioria dos alunos reside.

Figura 1 - Cardápio.

Fonte: Autoria própria, 2023.

A familiaridade dos alunos com os preços e os combos do cardápio facilitou a aplicação prática do conteúdo aprendido, proporcionando um contexto realista e relevante para a atividade. Isso foi fundamental, pois como destaca Freire (1996) “buscar informações sobre o aluno (sua vida, sua comunidade, sua família, seus sonhos...), é conhecer o sujeito e seu jeito de aprender”. Assim trazendo a assimilação deles entre o novo e o já conhecido.

O objetivo desta etapa foi incentivar os alunos a refletirem sobre a veracidade dos descontos oferecidos pelos combos. Eles foram desafiados a calcular individualmente a porcentagem de desconto em relação ao valor original dos itens comprados separadamente e a determinar se os combos realmente proporcionavam a economia prometida ou se se tratava de um “falso” desconto.

Essa análise crítica não só reforçou o entendimento de porcentagem, mas também desenvolveu habilidades importantes de consumo consciente e análise financeira, preparando os alunos para tomar decisões mais conscientes no seu dia a dia.

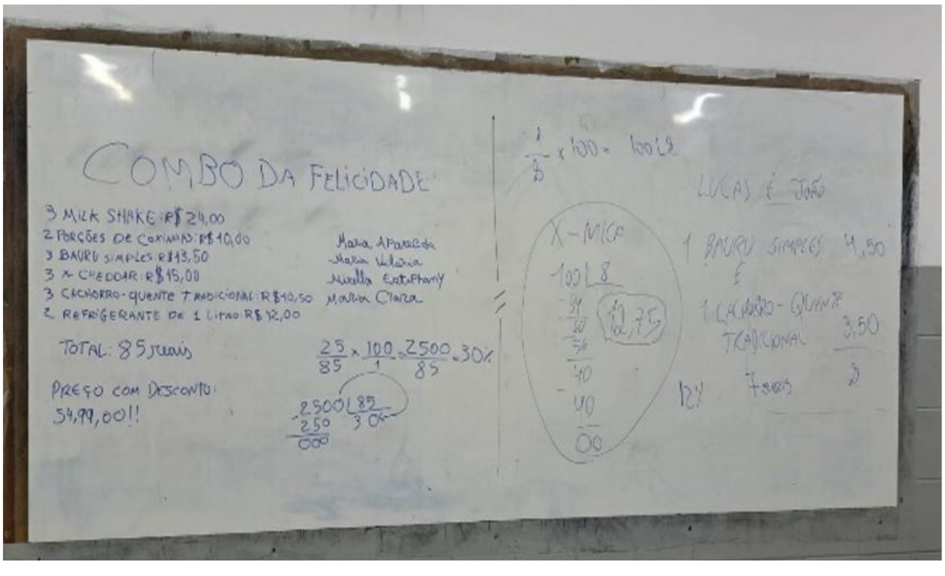
3º Momento

No terceiro momento da prática, os alunos foram divididos em grupos para criar seus próprios combos a partir dos preços individuais estabelecidos no cardápio. Cada grupo deveria calcular quantos reais de desconto seria oferecido em seu combo e quantos por cento esse desconto representaria em relação ao valor original dos itens comprados separadamente. Além disso, os grupos foram incentivados a dar um nome criativo aos seus combos, proporcionando-lhes uma característica única e pessoal.

Após a criação dos combos, cada grupo teve a oportunidade de apresentar suas criações ao restante da turma. Eles foram ao quadro para expor seus combos, explicando o processo de seleção dos produtos, os cálculos dos descontos em reais e em porcentagem, e a lógica por trás de suas escolhas.

Esta atividade não apenas reforçou os conceitos de porcentagem e desconto, mas também promoveu habilidades de comunicação e trabalho em equipe.

Figura 2 - Combos dos alunos.



Fonte: Autoria própria, 2023.

Os alunos puderam combater a introspecção, desenvolver autoconfiança e compartilhar suas ideias de forma clara e organizada, alguns explicando as motivações pelas quais fizeram o combo de tal modo, evidenciando algo já posto por D'Ambrosio (2002, p.11) quando este fala sobre "procurar entender, dentro do próprio contexto cultural do indivíduo, seus processos de pensamento e seus modos de explicar, de entender e de se desempenhar na sua realidade".

Além disso, a apresentação dos combos incentivou um ambiente colaborativo e de aprendizado ativo, onde todos os alunos puderam aprender uns com os outros e refletir sobre diferentes abordagens para resolver problemas matemáticos e tomar decisões financeiras.

4º Momento

Para ter um parâmetro geral da ação, foram desenvolvidas duas avaliações sendo uma quantitativa e outra qualitativa afim de uma sondagem aprimorada dos resultados obtidos pela ação, buscando enfatizar o que ressalta Freire (1996) de que é preciso considerar que cada aluno aprende de uma forma particular considerando suas vivências diferentes. Para isso, as avaliações contaram com a participação de 28 alunos da turma, sendo elas:

Avaliação da Aprendizagem do Conteúdo

A primeira avaliação adotou um caráter quantitativo com o objetivo de medir a compreensão dos conteúdos, relacionando teoria e prática através das diversas abordagens de porcentagem exploradas durante a ação. Essa avaliação, além de incluir questões teóricas, focava em como os alunos aplicavam os conceitos aprendidos em situações práticas.

Tabela 1 - Notas avaliação quantitativa.

Notas	Quantidade de Alunos
2 - 4	5
4 - 6	9
6 - 8	10
8 - 10	4

Fonte: Autoria Própria, 2023.

Ao analisar as médias das notas, constatou-se que apenas 5 dos 28 alunos obtiveram resultados abaixo do esperado, enquanto os demais apresentaram desempenhos medianos a excelentes.

Avaliação Qualitativa das Aulas

A segunda avaliação focou na qualidade das aulas, abordando aspectos como interesse e motivação dos alunos, clareza do material didático, eficácia das explicações, desafio das atividades propostas, ambiente para tirar dúvidas, facilidade de entendimento, melhoria nas habilidades matemáticas e o interesse dos alunos pelo assunto após as aulas.

Foram aplicados nove questionamentos em escala *Likert* sobre essas temáticas, revelando comentários amplamente favoráveis. 25 alunos concordaram que as aulas foram motivadoras e interessantes, além de considerarem a proposta desafiadora e benéfica para a aprendizagem. Dos 28 alunos, 22 afirmaram que a metodologia utilizada favoreceu seu processo de aprendizado.

Em relação à percepção de melhorias nas habilidades matemáticas após a ação, 17 alunos concordaram em ter percebido uma melhora, enquanto 6 avaliaram essa melhoria como mediana. Quando questionados sobre o entusiasmo em relação à matemática após a ação, o número de respostas medianas aumentou, com 13 alunos optando por essa categoria, enquanto 12 afirmaram sentir um entusiasmo aumentado pela disciplina.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através da pesquisa foi possível compreender que técnicas como etnomatemática e matemática crítica possuem potencial quando incorporadas ao ensino de matemática financeira. Por meio da interação da Matemática com contextos culturais e sociais específicos, essas abordagens ajudam os alunos a aprenderem de forma mais contextualizada e relevante, especialmente em contextos de vulnerabilidade social.

A pesquisa-ação mostra que usar materiais didáticos adaptados às necessidades dos alunos, como o cardápio de uma lanchonete, e metodologias ativas, como a análise crítica de descontos, pode não apenas ajudar os alunos a entenderem o conceitos matemáticos, mas também ajudar a tomarem decisões financeiras conscientes.

Essa abordagem ajuda a desenvolver cidadãos críticos que são capazes de usar a matemática para resolver problemas diários e pensar sobre os efeitos sociais e econômicos das decisões tomadas.

Os resultados da pesquisa, tanto qualitativos quanto quantitativos, mostram que o método foi potencial no ensino e no desenvolvimento de habilidades críticas. Os métodos usados foram consideravelmente bem-sucedidos, pois a maioria dos alunos teve um desempenho satisfatório nas avaliações e mostrou interesse e motivação nas atividades.

Como resultado, a incorporação de etnomatemática e matemática crítica ao ensino de matemática financeira mostrou-se como um método eficaz no contexto sociocultural dos alunos, contribuindo para que os mesmos possam enfrentar desafios econômicos e sociais que a sociedade atual exige. Podendo assim contribuir na melhoria não apenas de suas habilidades matemáticas, mas também na transformação do aluno como um indivíduo crítico e potencialmente ético.

Sendo assim, estudos futuros podem concentrar-se na aplicação de etnomatemática e matemática crítica ao ensino de matemática financeira no ensino médio, visto que permitiria avaliar como problemas mais concretos e complexos podem contribuir na preparação dos alunos para questões éticas e financeiras.

Em conclusão, este estudo ajudou a abrir espaço para discutirmos sobre a importância de práticas pedagógicas em que o aluno é um ser ativo no seu âmbito social, cultural e educacional, fornecendo assim informações úteis sobre métodos de ensino com o objetivo de uma melhoria da educação matemática, no contexto da educação básica.

REFERÊNCIAS

BERBEL, Neusi. **As metodologias ativas e a promoção da autonomia de estudantes.** Semina, Londrina. V. 32, n. 1, p. 25-40, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília, 2013. p.119.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica**. Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, 2017.

CUNHA, E. M.; LAUDARES, J. C. **Educação Financeira na Escola.** Belo Horizonte: Autêntica, 2017.

D'AMBRÓSIO, U**. Etnomatemática:** elo entre as tradições e a modernidade**.** Belo Horizonte: Autêntica, 2002. p.11.

D`AMBROSIO, U. **Etnomatemática**: um Programa. A Educação Matemática em Revista. (SBEM), Ano 1, Nº1, 2º semestre, 1993.

D'AMBROSIO, U. **Sociedade, cultura, matemática e seu ensino**. Educação e Pesquisa. São Paulo. v. 31, n. 1, jan/mar. 2005

DIAS, M.V, TASSOTE, E.M, VIANA, **A matemática financeira**: um alicerce para o exercício da cidadania. 2011. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática).: Universidade do Vale do Sapucaí. Pouso Alegre.

FRANCHI, A. **Situações multiplicativas**: diferentes situações e suas inter-relações. In: Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática, 1. SBEM, Curitiba. 2001**.**

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra. 1996.

GOUVÊA, Simone. **Novos caminhos para o ensino e aprendizagem de matemática financeira**: construção e aplicação de webquest. Rio Claro, São Paulo, 2006.

SILVA, C. C.; POWELL, A. B. **Educação Financeira e Educação Matemática Crítica**. Boletim de Educação Matemática, v. 27, n. 53, p. 12-13, 2013.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação Matemática Crítica**: a questão da democracia. Campinas, SP: Papirus, 2001.

Capítulo

04

O jogo Gama Matemático como recurso didático para ensino da matemática no 7° ano do ensino fundamental

The game Gama Mathematical as a didactic resource for teaching mathematics in the 7th grade of elementary

Felipe Lucas da Silva Lima

Graduando em Licenciatura em Matemática no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, Natal-Central. http://lattes.cnpq.br/0876022181753662

Alex Wagner Pereira

Mestrado em Matemática Aplicada e Estatística na UFRN. Professor de Matemática no IFRN. https://lattes.cnpq.br/8185076580565921

RESUMO

O ensino a partir de jogos na sala de aula tem sido uma ferramenta bastante utilizada pelos professores, pois estimula e desenvolve importantes habilidades nos alunos, como a comunicação verbal, o raciocínio lógico, a atenção, a concentração e a interação social, além de promover entre os jogadores diversas habilidades e competências. Por meio dessa potencialidade pedagógica o presente trabalho abordará a história do jogo que foi base para a construção do Gama Matemático, bem como, o seu uso como ferramenta de suporte para auxiliar o ensino-aprendizagem das operações de multiplicação e divisão na matemática. Por meio de estudos bibliográficos e de referenciais teóricos, se obteve resultados a respeito do contexto histórico do jogo base que é o Gamão, como também serão apresentadas a potencialidade pedagógica e as competências que são desenvolvidas pelos alunos através dos jogos de tabuleiro. Para se ter êxito na construção e elaboração do Gama Matemático o livro "*Gamão, o Rei dos jogos e os jogos dos Reis"* de Arnaldo Belmiro, foi indispensável para se obter não só a fundamentação histórica, como também na elaboração e adaptação das regras. Podemos concluir que a utilização de jogos em sala de aula, focando nos jogos de tabuleiro, possui uma alta potencialidade de desenvolver nos alunos diversas habilidades no ensino e aprendizagem do conteúdo de matemática.

Palavras-chave: história do gamão; jogos matemáticos; matemática básica; gama matemático.

DOI: 10.47573/aya.5379.2.344.4

ABSTRACT

Teaching through games in the classroom has been a tool widely used by teachers, as it stimulates and develops important skills in students, such as verbal communication, logical reasoning, attention, concentration and social interaction, in addition to promoting among players different skills and competencies. Through this pedagogical potenciality, this work will address the history of the game that was the basis for the construction of Gama Mathematical, as well as its use as a support tool to assist the teaching-learning of multiplication and division operations in mathematics. Through bibliographical studies and theoretical references, results were obtained regarding the historical context of the base game that is Backgammon, as well as the pedagogical potential and skills that are developed by students through board games will be presented. To be successful in the construction and elaboration of Gama Mathematical, the book "Backgammon, the King of games and the games of Kings" by Arnaldo Belmiro, was essential to obtain not only the historical foundation, but also in the elaboration and adaptation of the rules. It can be concluded that the use of games in the classroom, focusing on board games, has a high potential to develop students various skills in teaching and learning mathematics content.

Keywords: history of backgammon; mathematical games; basic math; gama mathematical.

INTRODUÇÃO

A utilização dos jogos no ambiente escolar vem ganhando popularidade e, com isso, professores e responsáveis pelas escolas têm introduzido tanto os jogos eletrônicos como também os jogos físicos no dia a dia de suas atividades. Desse modo, diante da alta potencialidade dos jogos, o presente artigo tem como objetivo apresentar uma nova possibilidade de auxiliar os alunos do 7° ano do ensino fundamental, nas operações de multiplicação e divisão, através do jogo Gama Matemático.

O jogo Gama Matemático se baseia no jogo gamão, e diante disso é de fundamental relevância entender a história e as regras do gamão, no entanto, a ampla diversidade de variações e regras do jogo, tornaram-se um desafio para o estudo. Assim, para que se possa apresentar as regras do jogo adaptado Gama Matemática, se focou em um único livro que foi a obra intitulada "*Gamão, o Rei dos jogos e os jogos dos Reis*" de Arnaldo Belmiro (1984).

Sobre potencialidade dos jogos, Borin (1996) afirma que o uso dos jogos nas aulas de Matemática é um importante fator que contribui para diminuir os bloqueios apresentados por muitos alunos que temem a Matemática e sentem-se incapacitados de aprendê-la. Desse modo, o jogo propicia vários aspectos no desenvolvimento dos alunos que vão desde a diminuição dos bloqueios com relação à disciplina ao melhoramento do intelecto pessoal, especialmente o raciocínio lógico.

A HISTÓRIA DO JOGO GAMÃO

A história do jogo Gamão possui uma ampla diversidade de deduções e explicações lendárias. No entanto, apesar da ampla diversidade, Belmiro (1984) aponta que o gamão surgiu no Oriente há milhares de anos, diante de que as referências mais antigas encontradas em relação ao jogo de tabuleiro, foram descobertas entre as civilizações sumerianas, na Mesopotâmia. Mas, mesmo diante da explicação mais aceita de que o surgimento do gamão seja voltado aos sumérios, é destacável levar em conta as diversas lendas apontadas sobre o jogo de tabuleiro, pois nos leva a pensar e refletir sobre as concepções de cada civilização. Dessa maneira, uma das concepções lendárias abordadas por Belmiro (1984, p.7), aponta que:

Uma das lendas, aliás muito interessante, conta que o gamão teria sido criado por um sábio chamado Caflan e, de acordo com essa antiga lenda surgida na Índia, o jogo foi baseado numa simbologia cronológica muito curiosa: os 24 triângulos (ou casas, flechas, pontos) que aparecem no tabuleiro representam as 24 horas do dia. Os 12 triângulos que estão situados nas duas fileiras paralelas em ambos os lados do tabuleiro representariam os 12 meses do ano e os símbolos dos zodíacos. As trinta peças com os quais se realiza o jogo seriam os dias dos meses. O dia e a noite são simbolizados pelos dois dados e, finalmente os 7 pontos, correspondentes à soma dos valores de quaisquer lados opostos de um dado, corresponderiam aos dias da semana.

Desta forma, é importante destacar essa lenda, pelo fato que a mesma apresenta a relação do gamão com a simbologia cronológica, onde os símbolos e peças presentes no jogo se interligam com as horas, dias e meses do ano. Além disso, outra versão lendária para o surgimento do gamão apontada no livro de Belmiro (1984), mostra que o famoso filósofo francês Voltaire atribui o surgimento do jogo ao indiano Pachisi, por ter inventado o mesmo há milhares de anos. Com isso, se observa que as lendas são importantes para se entender e analisar todos os aspectos relacionados a cada civilização apontada nas lendas.

Ao se relacionar sobre a chegada do jogo gamão nas civilizações, é importante destacar inicialmente que Belmiro nos remete de modo inicial ao Império Romano, sendo que o jogo chegou aos romanos intitulados de *"udus duodecim scriptorum",* ou seja, jogo das doze linhas, sendo muito vinculado aos imperadores Nero e Calígula, tornando assim visível a vislumbre fama do jogo entre grandes imperadores. No entanto, é importante ressaltar que enquanto os romanos conheciam o gamão pela primeira vez, os gregos, egípcios e fenícios já dominavam as regras e o jogo há bastante tempo. Mas, diferente da forma que esses povos conheciam o jogo, os romanos jogavam de uma maneira diferente, sendo jogado por três fileiras de casas e se detinham de três dados para jogarem.

A popularidade do jogo gamão foi tão significativa que, conforme Belmiro (1984), os primeiros cristãos não ficaram indiferentes ao maravilhoso jogo, pois muitos dos relevos gravados de mármore em vestígios históricos, retratam cenas em que os seguidores do apóstolo Pedro aparecem jogando.

Ao dar prosseguimento às civilizações do mundo ocidental, voltada a Europa, o tabuleiro foi introduzido no século I a.C com o nome de tábula. Outrossim, durante a Idade Média ainda sendo intitulado como "tábula", o jogo teve um enorme triunfo, e principalmente junto à nobreza feudal. Ao se focar diante do triunfo do gamão, é importante frisar que o mesmo não se perdeu com os avanços de algumas civilizações, e um exemplo disto é o aparecimento deste jogo de tabuleiro nas peças do Museu do Louvre, em Paris, na obra de Léonard Limosin, em Limoges, intitulado de Tabuleiro de xadrez e gamão, 1537.

A fama do gamão se tornou tão visível diante das civilizações, que acabou chamando atenção de forma negativa da igreja, pois conforme Belmiro(1984),“ a tábula foi perseguida por parte da Igreja, que via, em qualquer manifestação que desviava a atenção pública para outros caminhos que não fossem a ‘fé’, um inimigo ao seu poderio déspota”.

A notoriedade do gamão era tão perceptível, que acabou criando alguns “inimigos” além da igreja. Dessa forma, o primeiro “inimigo” do gamão, foi o aparecimento do xadrez, no século VI, que gerou uma diminuição na popularidade do jogo. Contudo, mesmo diante dessa baixa, Belmiro (1984, p.9) destaca que:

> Somente no século XVII (dois séculos depois do surgimento do xadrez) foi que o gamão retornou ao seu auge, recuperando a antiga popularidade, aparecendo na Europa com outros nomes: “**backgammon”** (na Inglaterra), “**gammon”** (na Escócia), “**tavola reale”** (na Itália), “**puif”** (na Alemanha), “**tric-trac”** (na França), “**tablas reales”** (na Espanha), **gamão** (em Portugal), etc. (grifo nosso).

Desta forma, é perceptível que o jogo não se limitava a um país ou mesmo a uma única civilização, nem tão pouco a uma pequena parcela de pessoas, o gamão tinha essa popularidade exatamente por ser um jogo onde todas as classes tinham, mesmo que pequena, a possibilidade de jogar e isso se torna ainda mais visível diante de que em conformidade com Belmiro (1984), devido a popularidade do jogo, em especial pela preferência de grande reis e imperadores romanos e aos czares da Rússia, o jogo fica conhecido como o jogo dos reis e, em contrapartida, passou a ser considerado “O Rei dos Jogos”.

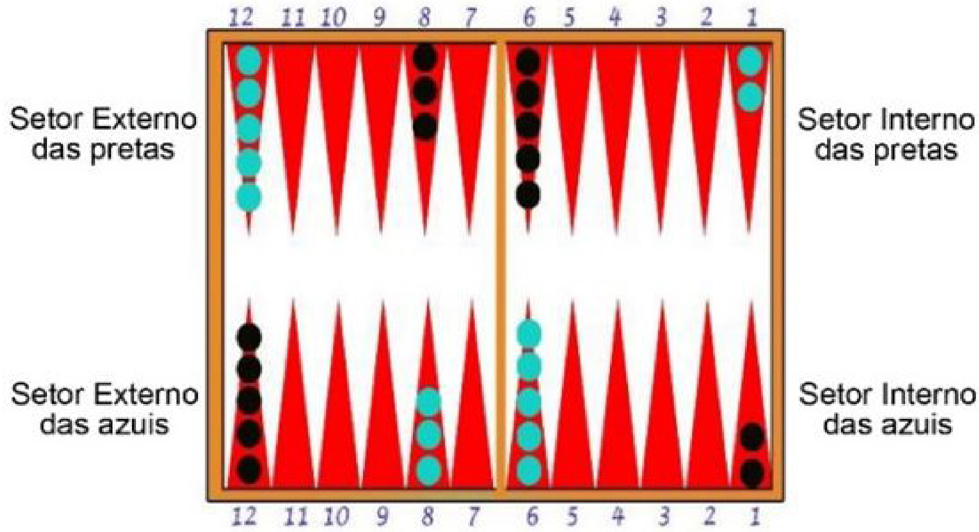
O JOGO GAMÃO

O Gamão é um jogo de tabuleiro que destaca habilidades como o raciocínio lógico que tem grande relevância, principalmente para se obter a vitória no jogo. O jogo possui uma grande diversidade de regras, mas para o presente artigo foi optado focar e utilizar as regras apresentadas no livro de Arnaldo Belmiro (1996), o qual aponta que o jogo gamão necessita da participação de dois jogadores, sendo que cada participante deve jogar somente com as pedras da cor escolhida e o objetivo de cada jogador é tirar do tabuleiro as 15 peças que possui, estas são chamadas de pedras ou piões.

Além disso, um ponto fundamental apresentado na obra é que nesse jogo de tabuleiro as pedras já possuem uma disposição predeterminada, conforme é apresentado na figura 1.

Em conforme as regras apresentadas por Belmiro (1984), as peças são distribuídas como: Peças azuis: 2 peças na casa 1 no setor interno das peças pretas; 5 peças na casa 12 no setor externo das peças pretas; 5 peças na casa 6 no setor interno das peças azuis; 3 peças na casa 8 no setor externo das peças azuis. Já as peças pretas: 2 peças na casa 1 no setor interno das peças azuis; 5 peças na casa 12 no setor externo das azuis; 5 peças na casa 6 no setor interno das peças pretas; 3 peças na casa 8 no setor externo das peças preta.

Figura 1 - O tabuleiro.



Fonte: Autoria Própria, 2023.

Portanto, cada jogador após a escolha da cor de sua pedra, vai movimentando as suas peças seguindo seu lado correspondente.

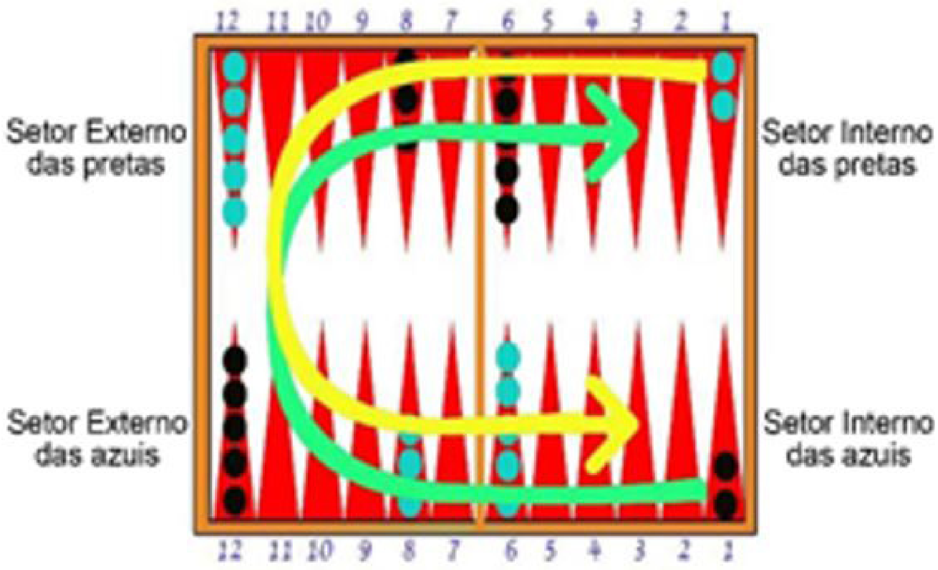
Início da Partida

Diante das regras apresentadas no livro, Belmiro aponta que o jogo gamão possui 2 dados, contudo para dar início à partida é utilizado um desses dados, onde quem, ao lançar o dado, obter a maior pontuação fará o primeiro movimento. A partir daí, o jogo prosseguirá com os lançamentos simultâneos dos dois dados, até que ocorra o término da partida.

Movimentos das Pedras

Em relação ao movimento das pedras, o autor do livro "Gamão, o rei dos jogos e o jogo dos reis", mostra que as pedras se movem no sentido indicado pelas setas contidas na figura 3, sentido horário ou anti-horário. No sentido anti-horário, as azuis e, no sentido horário, as pretas. As pedras se movimentam a partir da casa 1.

Figura 2 - Sentido das pedras.



Fonte: Autoria Própria, 2023.

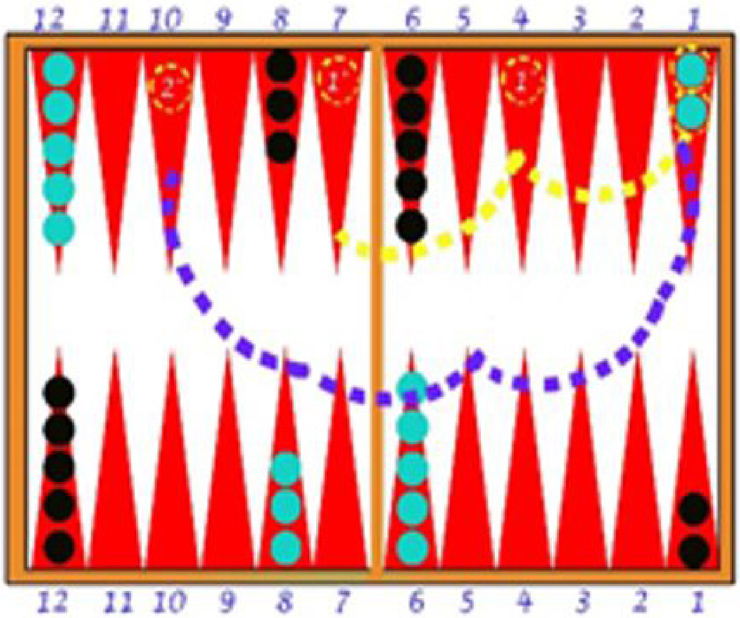
No gamão, as pedras são colocadas nas casas em forma de colunas, uma atrás da outra, sem se sobreporem. Para iniciar a retirada das pedras do tabuleiro, o jogador só poderá fazê-lo depois que todas as peças forem movimentadas.

As Jogadas

Diante dos modos de jogadas, o autor do livro inicia supondo uma jogada inicial, a qual ao se realizar essa jogada será lançado inicialmente um único dado, para determinar quem vai começar jogando. Supondo que ao lançar o dado se tenha obtido os valores 3 e 6, onde cada valor corresponde ao lançamento inicial de cada jogador, tendo em vista que 6 é maior que 3, quem iniciará será o jogador que tirou 6 no dado. Dessa forma, o primeiro movimento do jogador será realizado a partir destes dois valores (3 e 6), que a partir daí terá inúmeras maneiras de ser jogado.

O primeiro modo é: o jogador pode mover duas pedras, onde seguindo o exemplo anterior, uma que anda até a casa 4 e outra até a casa 7. Já o segundo modo: o jogador pode mover uma única pedra onde realizará a soma dos dois valores dos dados que neste exemplo (3+6 = 9), ou seja, o jogador andaria 9 casas e chegaria à casa 10. Conforme a figura 3, podemos observar as duas formas de realizar a jogada.

Figura 3 - Modos de Jogadas.



Fonte: Autoria Própria, 2023.

Possibilidades de Movimentos

O jogador pode movimentar uma ou mais pedras para qualquer casa que não esteja no sentido de seu percurso, contanto que:

a) A casa não esteja ocupada;

b) A casa esteja ocupada com uma ou mais de suas próprias pedras;

c) A casa esteja ocupada com apenas uma pedra do adversário, o que caracteriza a captura da peça do outro jogador.

Possibilidades de vitória

No final do jogo, conforme a disposição das pedras no tabuleiro, após um dos jogadores ter conseguido retirar todas as suas pedras, a vitória poderá ser considerada por meio de três formas. Vitória simples: quando o derrotado conseguiu retirar pelo menos uma pedra do tabuleiro; Vitória dupla: quando o adversário não conseguiu retirar nenhuma pedra do jogo; Vitória tripla: onde o adversário além de não retirar nenhuma pedra ainda possuía pedras na linha bar (linha central do tabuleiro) ou no setor interno do vencedor.

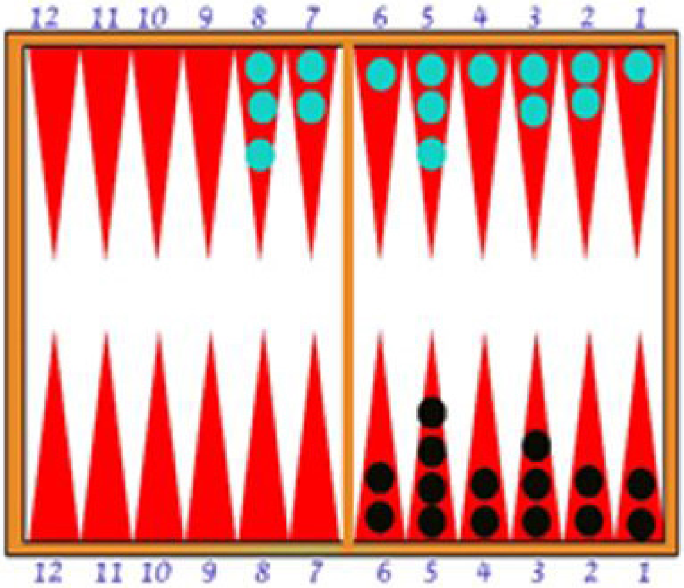
Valores dos Dados nos Lançamentos

No lançamento dos dados, pode ocorrer dois resultados. Podem sair valores iguais ou valores distintos nos dois dados. No caso de acontecer a segunda opção, segue a lógica explanada no tópico sobre as jogadas. No caso de valores iguais, temos as dobradinhas, e o jogador que conseguir obter valores iguais poderá fazer uma jogada dupla, ou seja, jogar quatro vezes ao invés de duas.

Retiradas das Pedras

A retirada das pedras só acontece quando o jogador já tiver movimentado todas as peças do jogo. Desse modo, o que vai interessar no momento das retiradas das pedras é se todas estão situadas na numeração de 1 a 6 e não haja nenhuma pedra na linha bar. Assim o jogador poderá ir retirando as peças. Contudo, vale observar que para que as peças possam ser retiradas, é preciso que elas estejam localizadas numa casa cujo número coincida com os valores obtidos no lançamento dos dados, conforme apresentado na figura 4.

Figura 4 - Retiradas das pedras



Fonte: Autoria Própria, 2023.

Desse modo, mesmo diante da ampla diversidade de regras e pela enorme quantidade de maneiras de se jogar, se tornou imprescindível o livro em estudo, pelo fato de que através do mesmo se pode ter um rumo a seguir sobre suas regras.

A UTILIZAÇÃO DE JOGOS NA SALA DE AULA

A utilização de jogos e brincadeiras como método de ensino nas escolas é uma ideia bastante difundida desde o século XIX, e segundo Starepravo (2009, p.19) que cita a concepção defendida por Fröebel, aponta que:

> Fröebel defendia a importância dos jogos de brincadeiras na educação infantil, salientando seu papel na exteriorização do pensamento e na construção de conhecimento. Na chamada Escola Ativa, os jogos e brincadeiras eram tidos como instrumentos essenciais de aprendizagem, recebendo papel de destaque na organização do trabalho escolar.

Assim sendo, conforme exposto anteriormente, os jogos são de suma importância na sala de aula, pois através desses jogos as crianças poderão desenvolver o pensamento e ampliar a construção do conhecimento. Nesta perspectiva, o desenvolvimento de atividades por meio de jogos no ambiente escolar tem ganhado forte destaque, e isso ocorre principalmente pelo fato de que muitos professores têm conduzido os jogos para o ambiente escolar, a fim de auxiliar e ampliar a compreensão dos alunos em relação aos conteúdos ministrados de uma maneira menos tradicional. Nessa perspectiva, diante da importância da inserção dos jogos para a sala de aula, Ribeiro (2009, p. 19) apresenta que:

> [...] a inserção de jogos no contexto escolar aparece como uma possibilidade altamente significativa no processo ensino-aprendizagem, por meio do qual, ao mesmo tempo em que se aplica a ideia de aprender brincando, gerando interesse e prazer, contribui-se para o desenvolvimento cognitivo, afetivo e social dos alunos.

Desta maneira, explorar os jogos no ambiente escolar, dando ênfase na Matemática, é de extrema importância, pois desenvolve e possibilita diversas oportunidades de desenvolvimentos nos alunos.

Além disso, Starepravo (2009, p. 20) aponta como os jogos podem desenvolver habilidades e gerar significado nos cálculos dos alunos:

> Nos jogos, os cálculos são carregados de significado porque se referem a situações concretas (marcar mais ponto, controlar a pontuação, formar uma quantia que se tem por objetivo etc.). Além disso, o retorno das hipóteses é imediato, pois, se um cálculo ou uma estratégia não estiver correta, não se atingem os objetivos proposto ou não se cumprem regras e isso é apontado pelos próprios jogadores.

Deste modo, ao se utilizar os jogos com a estratégia correta e bem organizada nas aulas, isso contribui e gera uma nova possibilidade de auxiliar a compreensão dos alunos. Segundo Piaget (1978), os jogos ou brincadeiras podem ser de três tipos: de exercício, de símbolo e de regra. O jogo de exercício só tem o objetivo de fazer com que gere o funcionamento do jogo. Já o jogo de símbolos, ultrapassa os limites do funcionamento e vai se acrescentar ao espaço onde serão resolvidos os conflitos e realizar desejos que não puderam ser realizados em possíveis situações não lúdicas. Já no jogo de regra, que é o caso do Gamão, ocorre a estruturação, ou seja, nesse tipo o jogo surge de maneira pronta, com características e regras preestabelecidas.

Nessa lógica, vale salientar que o jogo proporciona diversos desenvolvimentos nas variáveis percepções das crianças, conforme abrange Piaget (2010, p. 158), que aponta que:

> A criança que joga desenvolve suas percepções, sua inteligência, suas tendências à experimentação, seus instintos sociais. É pelo fato de o jogo ser um meio tão poderoso para a aprendizagem das crianças, que em todo lugar onde se consegue transformar em jogo a iniciação à leitura, ao cálculo ou à ortografia, observa-se que as crianças se apaixonam por essas ocupações comumente tidas como maçantes.

O jogo além de desenvolver percepções na inerência e nos instintos pessoais, segundo Macedo (1995), também é uma atividade lúdica que estimula a curiosidade, a iniciativa e a autoconfiança do aluno.

No entanto, vale destacar que para trabalhar com um jogo em sala de aula, os docentes que ministram a disciplina de Matemática necessitam intencionalmente traçar objetivos que pretendem alcançar, planejar-se criteriosamente e aplicar ludicamente, isto é, criando um ambiente favorável, dinâmico e divertido para o desenvolvimento dos alunos. É por meio dessa perspectiva que Smole (2007, p. 11) apresenta que:

> O trabalho com jogos nas aulas de matemática, quando bem planejado e orientado, auxilia o desenvolvimento de habilidades com observação, análise, levantamentos de hipóteses, busca de suposições, reflexão, tomada de decisão, argumentação e organização, que estão estreitamente relacionadas ao chamado raciocínio lógico.

A utilização de jogos na sala de aula, como estratégia de ensino, pode contribuir para despertar o interesse dos alunos pelas atividades da escola e melhorar o desempenho deles, facilitando a aprendizagem. Deste modo, segundo Borin (1996), o uso dos jogos nas aulas de Matemática é um importante fator que contribui para diminuir os bloqueios apresentados por muitos alunos que temem a Matemática e sentem-se incapacitados de aprendê-la. Neste aspecto, por meio da utilização de jogos, o aluno constrói seu conhecimento de maneira ativa e dinâmica, proporcionando uma reflexão em profundidade sobre os conceitos que estão sendo discutidos.

JOGOS DE TABULEIRO

O início da prática do jogo de tabuleiro se deu há milhares de anos no Oriente, tendo como referências mais antigas os vestígios encontrados entre as civilizações sumérias, na Mesopotâmia. Para Huizinga (2014), a cultura surge no jogo e, enquanto jogo, para nunca mais perder esse caráter. Assim, para o autor a cultura surge de uma atividade lúdica. Há alguns milhares de anos, nas regiões do antigo Egito e da Mesopotâmia (Oriente Médio), foram encontrados em escavações arqueológicas objetos e desenhos que parecem ser ou fazer referência a jogos de tabuleiro. No meio dos artefatos encontrados nas tumbas, Sir Leonard Woolley (1880-1960), um grande arqueólogo inglês, encontrou vários tabuleiros. Neste aspecto, é perceptível que os jogos eram tidos com muita relevância:

> Os jogos eram uma companhia indispensável após a morte, já que se acreditava que fossem parte integrante do divertimento no outro mundo. Diante do tamanho da eternidade, era bom que os jogos fossem interessantes; de outro modo, o resultado seria um tédio infinito (Super Interessante, 2016).

Nesta perspectiva, se compreende que os jogos de tabuleiro já detinham uma forte proximidade entre as civilizações até mesmo após a morte.

A UTILIZAÇÃO DOS JOGOS DE TABULEIRO NA SALA DE AULA

Os jogos de tabuleiro são de alta importância não só para divertimentos pessoais, mas também para atividades didáticas que tenham como fim o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos, pois através deles os estudantes podem ter um melhor desenvolvimento tanto da parte cognitiva como afetiva, no que diz respeito à educação.

Os jogos possuem classificações específicas diante do seu objetivo. Segundo Teixeira (1970, p. 28):

> Os jogos dividem-se em: - jogos sensoriais: ação dos aparelhos do sentido (cheirar, provar, ouvir, tocar, etc.); - jogos psíquicos: exercícios das capacidades mais elevadas (jogar sério, conter o riso, brincar de estátua, etc.); - jogos motores: é ação dos músculos e coordenação dos movimentos (engatinhar, saltar, jogar a bola, etc.); - jogos afetivos: desenvolvimento dos sentimentos estáticos ou experiências desagradáveis (desenho, escultura, música, etc.); - jogos intelectuais: (jogos de dominó, damas, rimas de palavras, charadas, adivinhações, xadrez, etc.).

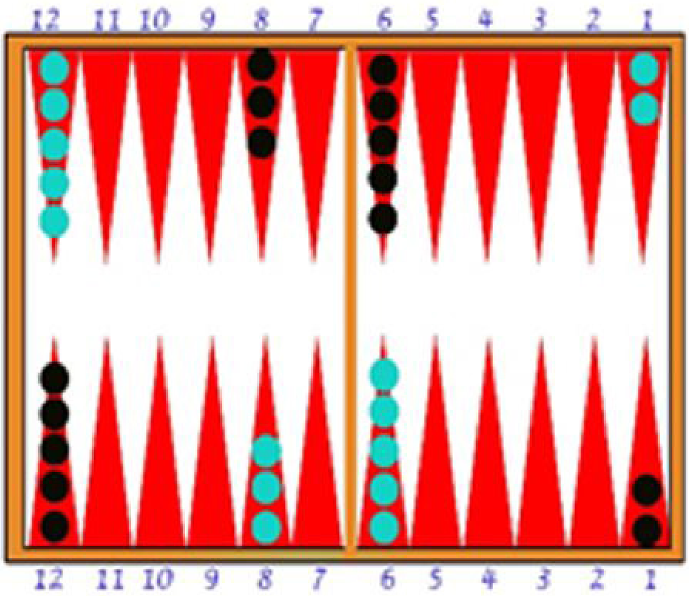
Neste sentido, considerando essa classificação dos jogos, Teixeira (1970), afirma que os jogos de tabuleiro pertencem aos jogos intelectuais, onde ocorre a presença da inteligência e capacidade de compreender o jogo. Dessa forma, os jogos de tabuleiro oferecem muitos benefícios aos alunos, estimulam e desenvolvem importantes habilidades como a comunicação verbal, o raciocínio lógico, a atenção, a concentração e a interação social, além de promover entre os jogadores o respeito, a paciência, as diferenças existentes entre eles e da sociedade a qual vivemos.

Dessa forma, diante da ampla e perceptível importância dos jogos de tabuleiro, Silva (2011) estabelece que, o jogo de tabuleiro se destaca entre outros diversos jogos, pelo fato de ser conhecido por grande parte da população, fazendo com que seja mais fácil de gerar um interesse nos alunos pelas atividades propostas, à medida que estas respondam às necessidades histórico-sociais das pessoas. Além disso, em conformidade ao que foi explanado anteriormente, Laíse Prado (2018, p. 30) assinala que “os primeiros jogos de tabuleiro registrados são datados em cerca de 7.000 anos a.C., e desde este tempo eles já eram usados para facilitar a aprendizagem”. Com isso, diante da alta potencialidade dos jogos de tabuleiro para auxiliar e facilitar a aprendizagem, se torna perceptível avaliar um modo de trazer esses jogos para o contexto da sala de aula.

O GAMA MATEMÁTICO

Diante da ampla potencialidade dos jogos de tabuleiro surgiu a ideia do Gama Matemático, o qual possui as mesmas regras do gamão tradicional apresentado por Arnaldo Belmiro, contudo o objetivo deste é fazer com que os jogadores consigam ter um raciocínio mais rápido e mais amplo diante da Matemática Básica focando nos conteúdos e habilidades referentes à divisão e multiplicação. Além disso, uma modificação entre o jogo tradicional gamão e o Gama Matemático é que no jogo matemático, para o jogador mover as pedras de acordo com a jogada do dado, precisará acertar o produto ou o quociente da pergunta realizada. Em relação a disposição das pedras, continua a mesma predeterminada e apresentada anteriormente, conforme a figura a seguir:

Figura 5 - Tabuleiro do Gama Matemático.



Fonte: Autoria Própria, 2023.

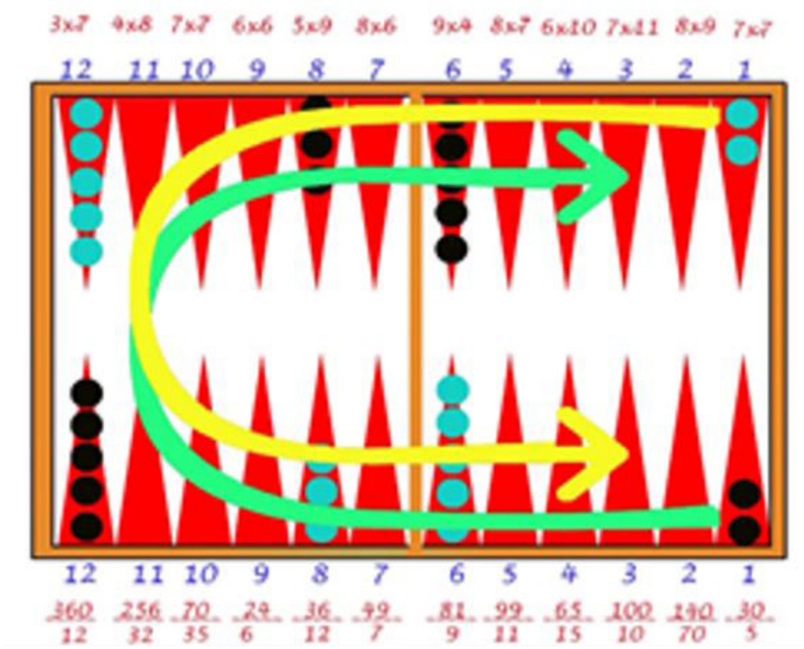
Início da Partida

O Gama Matemático utiliza 2 dados, contudo para dar início a partida só é utilizado um deles, onde quem tirar o maior número terá que acertar o produto ou o quociente da pergunta realizada. Caso responda corretamente realizará o primeiro movimento. E assim o jogo prosseguirá com os lançamentos simultâneos de dois dados e a cada jogada, haverá uma questão a ser solucionada, até que ocorra o término da partida.

Movimento das Pedras

Em relação ao movimento das pedras, estas se movimentam no sentido indicado pelas setas da figura 8, ou seja, as azuis no sentido anti-horário e as pretas no sentido horário. Desse modo, as pedras se movimentam a partir da casa 1. Para que ocorra a movimentação das pedras, além da possibilidade de poder mover até a casa correspondente ao número tirado pelos dois dados, um ponto fundamental será a resolução de uma multiplicação ou divisão conforme a figura 6.

Figura 6 - Movimento das pedras no Gama Matemático



Fonte: Autoria Própria, 2023.

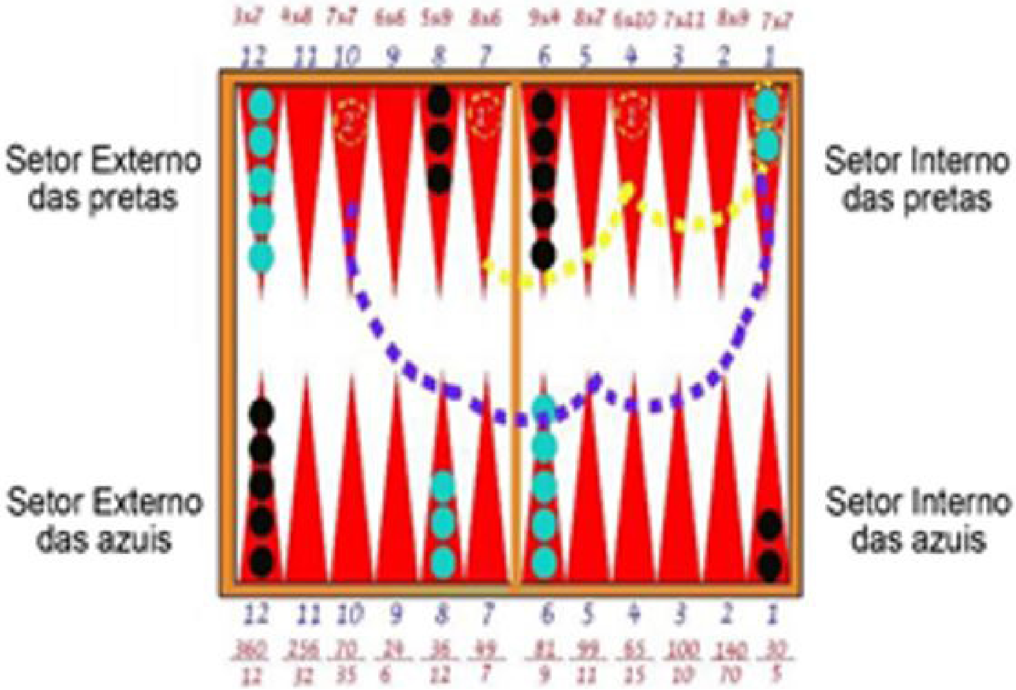
Dessa forma, conforme pode ser visto na figura, para movimentarem suas peças os participantes terão que acertar o produto ou quociente da questão e, ao errar, a vez da jogada é passada para o outro jogador.

As Jogadas

Diante das jogadas, suponhamos que seja realizado um lançamento inicial com um só dado para determinar quem vai começar jogando. Caso tenham sido obtidos os valores 3 e 6, onde cada valor corresponde ao lançamento de um jogador e tendo em vista que 6 é maior que 3, aquele que tirou o número 6 irá resolver uma questão de multiplicação ou divisão e ao acertar iniciará o jogo. O primeiro movimento do jogador será obtido através dos valores obtidos pelo jogador 1 e o jogador 2 que foram o 6 e o 3, os quais podem ser usados de várias maneiras:

Uma das primeiras maneiras é quando o jogador pode mover duas pedras, uma até a casa 4 e outra até a 7, contudo para movimentar duas pedras terá que responder duas questões que podem envolver multiplicação ou divisão. Seguindo o exemplo anterior, onde os valores obtidos pelo jogador 1 e o jogador 2 foram 6 e 3, respectivamente. O jogador das pedras azuis, ao obter os valores 6 e 3 passa para as casas 7 e 4 tendo que resolver as multiplicações 8x6 e 6x10. Se acertar as duas multiplicações poderá movimentar as duas pedras, se errar as duas não moverá as pedras e, se errar uma e acertar a outra, movimentará a pedra indo para a posição que acertou o resultado.

Figura 7 - Modo de movimentar o Gama Matemático.



Fonte: Autoria Própria, 2023.

2° modo: O jogador pode mover uma única pedra onde realizará a soma dos dois valores que neste caso seriam 6 e 3, que andaria 9 casas e com isso chegaria à casa 10, resolveria a questão para poder colocar a pedra na casa 10.

Possibilidades de Movimento e Maneiras de Vitória

A possibilidade de movimento contínua do mesmo modo que o apresentado no tópico das regras do Gamão tradicional, contudo para mover as pedras se faz necessário que o jogador acerte o resultado da pergunta para seguir para a casa correspondente.

No final do jogo, conforme a disposição das pedras no tabuleiro, após um dos jogadores ter conseguido retirar todas as suas pedras, a vitória poderá ser considerada de três formas. A primeira é a vitória simples, ocorre quando o adversário não conseguiu retirar pelo menos uma pedra do tabuleiro e errou de 2 a 4 perguntas. A segunda forma é a vitória dupla, que é quando o adversário não conseguiu retirar nenhuma pedra do jogo e errou de 4 a 8 perguntas. E a terceira é a vitória tripla que ocorre quando o adversário além de não retirar nenhuma pedra ainda possuía pedras na linha bar, ou no setor interno do vencedor, ou tenha errado acima de 8 perguntas.

Valores dos Dados nos Lançamentos

No lançamento dos dados, pode ocorrer dois resultados: valores iguais nos dois dados ou valores distintos aos dados. No caso de valores iguais, temos as dobradinhas. A dobradinha é caracterizada pela situação em que no lançamento de dados saem valores iguais nos dois, sendo um lançamento qualquer. O jogador que conseguir obter valores iguais poderá fazer uma jogada dupla, ou seja, jogar quatro vezes em lugar de duas, como é de praxe. Porém, para realizar o movimento de quatro pedras será necessário a resolução de 4 questões que podem envolver multiplicação e divisão, ou então o jogador poderá somar o valor das 4 jogadas, percorrer o número de casas correspondente a esse valor e na casa que cair, resolver uma única questão. Já no lançamento com valores distintos, segue a mesma lógica descrita no tópico anterior.

Retiradas das Pedras

A retirada das pedras acontece quando o jogador tiver movimentado todas as peças. Diante disso, supondo que um dos jogadores tenha conseguido colocar todas as pedras no seu setor interno, deixando de lado a distribuição das pedras pelas casas, o jogador só poderá começar a retirar as pedras se todas estiverem situadas nas casas 1 a casa 6, além de ser importante frisar que nenhuma pedra do adversário esteja nas casas numeradas e que nenhuma esteja na linha bar. Assim o jogador poderá ir retirando as peças. Vale observar que para que as peças possam ser retiradas, é preciso que elas estejam localizadas numa casa cujo número coincida com os valores obtidos no lançamento dos dados. E, nesta parte final do Gama Matemático, terá uma pequena diferença, pois para que os jogadores possam ir retirando as pedras eles terão que resolver questões que o adversário criará para ele, sendo que os valores devem estar no intervalo de 1 até 11 na multiplicação e de 1 até 200 na divisão, observando que o resultado da divisão deverá ser exato, ou seja, não poderá ter resto.

O Gama Matemático não possui o objetivo de que os alunos decorem os resultados, mas seu objetivo é fazer com que esses venham a melhorar o seu raciocínio lógico e desenvolvam ainda mais a sua capacidade intelectual.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A utilização de jogos em sala de aula se torna possível e gera um benefício na compreensão matemática, especialmente no raciocínio lógico e nas habilidades intelectuais dos alunos. Portanto, o Gama Matemático se torna um auxílio muito importante para ajudar os alunos na Matemática Básica. Observamos, que o jogo criado não tem o objetivo de mecanização dos resultados, comumente chamado de “decoreba”, mas tem o objetivo de melhorar e ampliar a compreensão dos alunos em relação às operações básicas como multiplicação e divisão.

Sendo assim, para que a aplicação do jogo seja exitosa, acreditamos que seja necessário que os professores entendam a história e as regras contidas no jogo original e no Gama Matemático. Isso porque se não houver um planejamento e organização dos docentes para aplicação deste, poderá ser comprometida a atividade e não realizará o objetivo principal do Gama Matemático.

O objetivo geral deste trabalho foi demonstrar como a utilização de um jogo de tabuleiro pode contribuir e ampliar o conhecimento dos alunos. Diante de um aprofundamento sobre a história do jogo, podemos concluir que o jogo Gamão foi um dos primeiros jogos de tabuleiro a serem criados e jogados, sendo muito aceito em todas as épocas, desde a sua criação, até mesmo por reis e, também grandes imperadores.

O Gama Matemático, jogo criado e apresentado no artigo, além de gerar uma nova perspectiva dos alunos para jogos de tabuleiro, pode gerar nos professores uma forma de ampliar o conhecimento dos alunos, aplicando um recurso pedagógico que o auxilie a sair um pouco das aulas tradicionais. Sendo assim, o Gama Matemático pode e deve ser um recurso pedagógico utilizado nas séries iniciais e, nas séries finais do Ensino Fundamental, como forma de revisão para as operações de multiplicação e divisão.

Futuramente, pretendemos realizar uma intervenção pedagógica aplicando o jogo Gama Matemático em sala de aula e apresentar outro estudo com os resultados qualitativos e quantitativos dessa intervenção, para que fiquem mais explicitadas as análises dos dados deste jogo como um recurso pedagógico.

REFERÊNCIAS

BORIN, Júlia. **Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática.** São Paulo: IME-USP, 1996.

BELMIRO, Arnaldo. **Gamão: O Rei dos Jogos e o Jogo dos Reis.** Rio de Janeiro: Editora Tecnoprint S.A., 1984.

DAL MONTE NETO, Luiz. **O jogo real de Ur: características do jogo, um dos mais antigos de que se tem notícia.** Site: Revista Super Interessante. Publicado em 31 out 2016. Disponível em: <https://super.abril.com.br/comportamento/o-jogo-real-de-ur> Último acesso em 20 junho 2024.

HUIZINGA, Johan. **Homo Ludens**. 8ª ed. São Paulo: Perspectiva, 2014.

MACEDO, Lino de. **Os jogos e sua importância na escola.** In: Caderno de Pesquisa, Fundação Carlos Chagas, n. 93, p. 5-10, São Paulo, maio 1995.

PIAGET, Jean. **A formação do símbolo na criança: imitação, jogo e sonho imagem e representação.** Rio de Janeiro: Editora Guanabara Koogan, 3ª edição, 1978.

PIAGET, Jean. **Psicologia e pedagogia.** Rio de Janeiro: Editora Forense Universitária, 10ª edição, 2010.

PRADO, L. L. **Jogos de tabuleiro modernos como ferramenta pedagógica: pandemic e o ensino de ciências.** Revista Eletrônica Ludus Scientiae, Foz do Iguaçu, v. 02, n. 02, p. 26-38, jul./dez. 2018.

RIBEIRO, Flávia Dias. **Jogos e Modelagem na Educação Matemática.** São Paulo: Saraiva, 2009.

SILVA, A. P. F. **Reprovados, indisciplinados, fracassados: as micro-relações de insucesso escolar na perspectiva do ‘aluno problema’**. 2009. 446 f. Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

STAREPRAVO, Ana Ruth. **Jogando com a matemática: números e operações.** Curitiba: Aymará, 2009.

SMOLE, K.S.; DINIZ, M. I.; MILANI, E. **Cadernos do Mathema, Jogos de Matemática do 6º ao 9º ano.** Porto Alegre. Artmed, 2007.

TEIXEIRA, M. S. **Recreação para todos.** 2. ed. São Paulo: Obelisco, 1970.

Capítulo
05

Resolução de problemas contextualizados no ENEM: identificando e superando dificuldades

Solving contextualized problems in ENEM: identifying and overcoming difficulties

Eliana Saletti de Moraes
Universidade Virtual do Estado de São Paulo. https://orcid.org/0009-0003-3958-4779

RESUMO

Este estudo estudo busca atender o seu objetivo que é realizar uma revisão bibliográfica sobre as principais dificuldades enfrentadas pelos estudantes na resolução de problemas matemáticos contextualizados no ENEM e propor estratégias pedagógicas baseadas na literatura para superar esses desafios. O estudo revelou que a má formação de conceitos matemáticos básicos, a abordagem tradicional de ensino focada na memorização, a falta de integração entre disciplinas e a ausência de recursos didáticos adequados são fatores críticos que contribuem para essas dificuldades. Além disso, a resistência dos alunos a metodologias ativas, a falta de tempo para a prática de resolução de problemas, a ansiedade e o medo de errar, bem como a desmotivação, são barreiras adicionais que comprometem o desempenho dos estudantes. Para superar esses desafios, o artigo propõe a implementação de estratégias pedagógicas inovadoras, como a integração de disciplinas e o uso de problemas contextualizados no ensino diário. Além disso, a formação continuada dos professores é destacada como um pilar fundamental para a melhoria da qualidade do ensino, garantindo que os educadores estejam preparados para implementar essas estratégias de maneira eficaz. Enquanto metodologias de ensino, este estudo sugere a utilização de recursos didáticos, como materiais concretos, jogos educativos e tecnologias digitais, para facilitar a compreensão dos alunos e tornar o aprendizado mais significativo. As implicações desses achados para a prática e a política educacional são discutidas, destacando a necessidade de uma revisão das diretrizes curriculares e das práticas de formação de professores.

Palavras-chaves: dificuldades matemáticas; resolução de problemas; ENEM; contextualização de questões.

AYA Editora©

ABSTRACT

This study seeks to meet its objective, which is to carry out a bibliographical review on the main difficulties faced by students in solving mathematical problems contextualized in ENEM and to propose pedagogical strategies based on literature to overcome these challenges. The study revealed that the poor training of basic mathematical concepts, the traditional teaching approach focused on memorization, the lack of integration between subjects and the absence of adequate teaching resources are critical factors that contribute to these difficulties. Furthermore, students resistance to active methodologies, lack of time to practice problem solving, anxiety and fear of making mistakes, as well as demotivation, are additional barriers that compromise student performance. To overcome these challenges, the article proposes the implementation of innovative pedagogical strategies, such as the integration of subjects and the use of contextualized problems in daily teaching. Furthermore, continuing teacher training is highlighted as a fundamental pillar for improving the quality of teaching, ensuring that educators are prepared to implement these strategies effectively. As teaching methodologies, this study suggests the use of teaching resources, such as concrete materials, educational games and digital technologies, to facilitate students understanding and make learning more meaningful. The implications of these findings for educational practice and policy are discussed, highlighting the need for a review of curricular guidelines and teacher training practices.

Keywords: mathematical difficulties; problem solving; ENEM; contextualization of issues.

INTRODUÇÃO

A prova do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) é uma das principais portas de entrada para o ensino superior no Brasil, sendo utilizada por diversas universidades como critério de seleção. Entre as competências avaliadas, a capacidade de resolver problemas matemáticos contextualizados se destaca, pois exige dos estudantes não apenas o domínio de conceitos matemáticos, mas também a habilidade de aplicar as informações em situações práticas (Proença *et al.,* 2022). No entanto, muitos alunos enfrentam dificuldades significativas nessa área, o que pode comprometer seu desempenho geral no exame (Silva *et al.,* 2016).

Essas dificuldades podem ser atribuídas a diversos fatores, incluindo a má formação de conceitos matemáticos e o desconhecimento sobre o significado de termos específicos (Proença *et al.,* 2022). Além disso, a falta de integração entre disciplinas e a abordagem tradicional de ensino, que muitas vezes se concentra na memorização de fórmulas em vez da compreensão profunda dos conceitos, agravam o problema (Freitas, 2020). Segundo Sandes e Moreira (2018), a educação atual passa por um momento de reflexão sobre as possibilidades de um ensino mais significativo, buscando superar processos antigos que não atendem às expectativas dos professores e alunos.

A contextualização matemática, que envolve a aplicação de problemas em situações do cotidiano, é uma estratégia que pode ajudar a superar essas dificuldades (Silva *et al.,* 2016). No entanto, a implementação dessa abordagem requer uma mudança significativa na prática pedagógica, incluindo a formação continuada dos professores e o desenvolvimento de recursos didáticos adequados (Sandes e Moreira, 2018). Segundo Curi (2004), a contextualização deve ir além de simplesmente inserir elementos do cotidiano nos problemas matemáticos; ela deve promover uma compreensão mais ampla e integrada dos conceitos.

Por fim, é importante destacar que a superação das dificuldades na resolução de problemas matemáticos contextualizados no ENEM não depende apenas dos alunos, mas também de um esforço conjunto de professores, gestores educacionais e formuladores de políticas públicas (Mantoan e Lanuti, 2016). A criação de um ambiente de aprendizagem que valorize a compreensão profunda dos conceitos e a aplicação prática do conhecimento é essencial para melhorar o desempenho dos estudantes e a qualidade do ensino de matemática no Brasil (Curi, 2004).

DIFICULDADES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS CONTEXTUALIZADOS NO ENEM: UMA REVISÃO DA LITERATURA

A revisão de literatura deste artigo aborda as principais dificuldades enfrentadas pelos estudantes na resolução de problemas matemáticos contextualizados no ENEM, dividindo-se em três tópicos principais. Primeiramente, serão discutidas as dificuldades de compreensão e interpretação de problemas, destacando como a má formação de conceitos matemáticos e o desconhecimento de termos específicos impactam negativamente o desempenho dos alunos (Proença *et al.,* 2022; Silva *et al.,* 2016). Em seguida, será abordada a integração entre disciplinas e a abordagem tradicional de ensino, que muitas vezes se concentra na memorização de fórmulas em vez da compreensão profunda dos conceitos (Freitas, 2020; Sandes e Moreira, 2018).

Outro ponto essencial a ser discutido é a contextualização matemática, que envolve a aplicação de problemas em situações do cotidiano e como essa estratégia pode ajudar a superar as dificuldades dos alunos (Silva *et al.,* 2016; Mantoan e Lanuti, 2016). No entanto, a implementação dessa abordagem requer uma mudança significativa na prática pedagógica, incluindo a formação continuada dos professores e o desenvolvimento de recursos didáticos adequados (Curi, 2004; Proença *et al.,* 2022).

A compreensão e interpretação de problemas matemáticos é uma das principais dificuldades enfrentadas pelos estudantes no ENEM. Estudos indicam que muitos alunos têm dificuldade em entender o enunciado dos problemas, o que impede a aplicação correta das fórmulas e algoritmos necessários para a solução (Proença *et al.,* 2022; Silva *et al.,* 2016). Além disso, a falta de habilidade para modelar problemas matemáticos e a tendência de aplicar fórmulas de maneira mecânica, sem compreender a situação, são barreiras significativas (Freitas, 2020; Sandes e Moreira (2018). Segundo Proença *et al.* (2022), a má formação de conceitos matemáticos e o desconhecimento sobre o significado de palavras específicas são fatores que contribuem para essas dificuldades.

Teorias Educacionais e a Compreensão das Dificuldades Matemáticas

A Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida por Gérard Vergnaud, é uma das principais abordagens teóricas utilizadas para entender as dificuldades dos alunos na aprendizagem matemática. Essa teoria propõe que o conhecimento está organizado em campos conceituais, que são conjuntos de situações, conceitos e representações que os alunos devem dominar para resolver problemas complexos (Vergnaud, 2007). Segundo Moreira (2016), a Teoria dos Campos Conceituais oferece uma estrutura consistente para estudar o desenvolvimento e a aprendizagem de competências complexas, especialmente nas ciências e nas matemáticas.

Vergnaud (2007) argumenta que a aprendizagem é um processo dinâmico que envolve a construção e a reorganização de esquemas conceituais, que são estruturas cognitivas que permitem aos alunos interpretarem e resolver problemas. De acordo com Moreira (2016), essa teoria fornece princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem, permitindo uma compreensão mais profunda das dificuldades enfrentadas pelos alunos.

Além da Teoria dos Campos Conceituais, a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel também é relevante para entender as dificuldades dos alunos na resolução de problemas matemáticos. Ausubel (2003) propõe que a aprendizagem significativa ocorre quando novos conhecimentos são integrados de maneira substantiva e não arbitrária aos conhecimentos prévios do aluno. Moreira (2016) contribui afirmando que a aprendizagem significativa é essencial para a compreensão profunda dos conceitos matemáticos, pois permite que os alunos façam conexões significativas entre os novos conhecimentos e os conhecimentos já adquiridos.

A Teoria da Aprendizagem Significativa enfatiza a importância do conhecimento prévio na aprendizagem. Ausubel (2003) argumenta que a estrutura cognitiva do aluno, ou seja, o conjunto de conceitos e ideias que ele já possui, desempenha um papel crucial na assimilação de novos conhecimentos. Moreira (2016) corrobora afirmando que, a falta de conhecimentos prévios adequados pode ser uma das principais causas das dificuldades dos alunos na resolução de problemas matemáticos, pois impede a integração significativa dos novos conhecimentos.

Outra teoria significativa é a Teoria da Aprendizagem por Descoberta, proposta por Jerome Bruner, para entender as dificuldades dos alunos na resolução de problemas matemáticos. Bruner (1986) argumenta que a aprendizagem é um processo ativo de descoberta, no qual os alunos constroem novos conhecimentos através da exploração e da experimentação. Segundo Moreira (2016), a aprendizagem por descoberta pode ser uma abordagem eficaz para superar as dificuldades dos alunos na resolução de problemas matemáticos, pois incentiva a curiosidade e a investigação.

A Teoria da Aprendizagem por Descoberta sugere que os alunos devem ser incentivados a explorar e experimentar por conta própria. Bruner (1986) argumenta que a aprendizagem é mais eficaz quando os alunos são ativos e engajados no processo de descoberta, pois isso promove a compreensão profunda e a retenção dos conhecimentos. De acordo com Moreira (2016), a aprendizagem por descoberta pode ajudar a superar as dificuldades dos alunos na resolução de problemas matemáticos, pois promove a autonomia e a criatividade.

Por fim, a Teoria da Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL), desenvolvida por Barrows e Tamblyn (1980), também oferece uma abordagem valiosa para entender as dificuldades dos alunos na resolução de problemas matemáticos. Os autores argumentam que a PBL é uma abordagem pedagógica que utiliza problemas complexos e reais como ponto de partida para a aprendizagem, incentivando os alunos a desenvolverem habilidades de resolução de problemas e pensamento crítico. Segundo Moreira (2016), a PBL pode ser uma estratégia eficaz para superar as dificuldades dos alunos na resolução de problemas matemáticos, pois promove a aplicação prática dos conhecimentos em situações reais.

A Teoria da Aprendizagem Baseada em Problemas, enfatiza a importância de problemas autênticos e desafiadores. Barrows e Tamblyn (1980) argumentam que a PBL incentiva os alunos a trabalharem em colaboração para resolver problemas complexos, desenvolvendo habilidades de pensamento crítico e resolução de problemas. De acordo com Moreira (2016), a PBL pode ajudar a superar as dificuldades dos alunos na resolução de problemas matemáticos, pois promove a aprendizagem ativa e a aplicação prática dos conhecimentos.

Desafios na Resolução de Problemas Matemáticos Contextualizados: uma Análise Crítica

A resolução de problemas matemáticos contextualizados no ENEM apresenta uma série de desafios para os estudantes, conforme relatado na literatura. Um dos principais problemas identificados é a dificuldade de compreensão e interpretação dos enunciados dos problemas. Segundo Freitas (2020), muitos alunos não conseguem entender o que está sendo solicitado, o que impede a aplicação correta das fórmulas e algoritmos necessários para a solução. Além disso, Silveira *et al.* (2012) destaca que a falta de habilidades básicas de leitura e interpretação de texto é um fator crucial que contribui para essas dificuldades.

Outro desafio significativo é a má formação de conceitos matemáticos. De acordo com Loureiro (2013), muitos alunos chegam ao ensino médio sem uma compreensão sólida dos conceitos matemáticos fundamentais, o que dificulta a resolução de problemas mais complexos. Proença *et al.* (2022) acrescentam que o desconhecimento sobre o significado de termos específicos também é uma barreira importante para a compreensão dos problemas. Essa falta de base conceitual impede que os alunos façam conexões significativas entre os diferentes tópicos matemáticos.

A abordagem tradicional de ensino, focada na memorização de fórmulas, também contribui para as dificuldades dos alunos. Sandes e Moreira (2018) argumenta que essa abordagem não promove a compreensão profunda dos conceitos matemáticos, o que é essencial para a resolução de problemas contextualizados. Para Freitas (2020), a ênfase na memorização impede que os alunos desenvolvam habilidades de pensamento crítico e resolução de problemas. Isso resulta em uma aprendizagem superficial e fragmentada, que não prepara os alunos para enfrentar desafios complexos.

A falta de integração entre disciplinas é outro fator que agrava as dificuldades dos alunos. Curi (2004) destaca que a matemática é frequentemente ensinada de forma isolada, sem conexão com outras áreas do conhecimento, o que dificulta a aplicação dos conceitos em contextos reais. Proença *et al.* (2022) argumentam que a integração entre disciplinas é essencial para promover uma compreensão mais ampla e contextualizada dos conceitos matemáticos. A ausência dessa integração impede que os alunos façam conexões significativas entre os diferentes tópicos e áreas do conhecimento.

A falta de recursos didáticos adequados também é uma barreira significativa para a aprendizagem eficaz da matemática. Loureiro (2013) argumenta que a utilização de materiais concretos e visuais pode ajudar os alunos a visualizarem e entender melhor os problemas matemáticos, tornando o aprendizado mais acessível e significativo. Silveira (2012) reforça essa ideia, destacando que a falta de recursos didáticos adequados é uma das principais barreiras para a aprendizagem eficaz da matemática. A ausência de materiais apropriados impede que os alunos desenvolvam uma compreensão profunda e integrada dos conceitos matemáticos.

A resistência dos alunos à metodologia de resolução de problemas também é um desafio importante. Segundo Freitas (2020), muitos alunos estão acostumados a métodos de ensino tradicionais e têm dificuldade em se adaptar a abordagens mais ativas e participativas. Sandes e Moreira (2018) contribuem que essa resistência pode ser superada através de uma formação continuada dos professores, que devem ser capacitados para implementar metodologias ativas de maneira eficaz. A mudança de abordagem pedagógica requer um esforço conjunto de professores, alunos e gestores educacionais.

A falta de tempo para a resolução de problemas também é uma barreira significativa. De acordo com Loureiro (2013), muitos alunos relatam que não têm tempo suficiente para resolver os problemas durante as provas, o que aumenta a ansiedade e dificulta a concentração. Silveira (2012) acrescenta que a gestão do tempo é uma habilidade crucial que deve ser desenvolvida ao longo do processo educativo. A falta de tempo adequado impede que os alunos apliquem de maneira eficaz as estratégias de resolução de problemas.

A falta de apoio e orientação adequada por parte dos professores também é um fator que contribui para as dificuldades dos alunos. Curi (2004) afirma que os professores devem atuar como mediadores do conhecimento, oferecendo suporte e orientação continuada aos alunos. Proença *et al.* (2022) destacam que a formação continuada dos professores é essencial para que eles possam identificar e abordar as dificuldades dos alunos de maneira eficaz, e que a ausência de apoio adequado impede que os alunos superem suas dificuldades e desenvolvam habilidades de resolução de problemas.

A ansiedade e o medo de errar também são barreiras significativas para a resolução de problemas matemáticos. Segundo Freitas (2020), muitos alunos têm medo de cometer erros e, por isso, evitam tentar resolver problemas mais complexos. Sandes e Moreira (2018) corroboram com a afirmação afirmando que a criação de um ambiente de aprendizagem seguro e acolhedor é essencial para reduzir a ansiedade e incentivar a participação ativa dos alunos, pois a ansiedade impede que os alunos se concentrem e apliquem de maneira eficaz as estratégias de resolução de problemas.

A falta de prática regular na resolução de problemas também é um desafio importante. Loureiro (2013) argumenta que a prática regular é essencial para o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas, pois permite que os alunos se familiarizem com diferentes tipos de problemas e estratégias de solução. E, Silveira (2012) acrescenta que a prática regular ajuda a consolidar os conhecimentos e a desenvolver a confiança dos alunos, pois a ausência de prática regular impede que os alunos desenvolvam habilidades de resolução de problemas de maneira eficaz.

E, finalmente, a falta de motivação e interesse dos alunos pela matemática é uma barreira significativa para a aprendizagem eficaz. Curi (2004) assegura que a motivação é um fator crucial para o sucesso na aprendizagem, pois influencia diretamente o engajamento e a persistência dos alunos. Já Proença *et al.* (2022) destacam, que a contextualização dos problemas matemáticos em situações reais pode aumentar a motivação e o interesse dos alunos pela matemática, afinal, a falta de motivação impede que os alunos se envolvam ativamente no processo de aprendizagem e desenvolvam habilidades de resolução de problemas.

PROPOSTAS DE SOLUÇÃO PARA A SUPERAÇÃO DAS DIFICULDADES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS CONTEXTUALIZADOS

Neste capítulo, serão discutidas diversas estratégias pedagógicas e metodológicas que podem ser implementadas para superar as dificuldades enfrentadas pelos estudantes na resolução de problemas matemáticos contextualizados. A primeira seção abordará as estratégias de ensino, destacando a importância da integração de disciplinas e do uso de problemas contextualizados no ensino diário. A literatura sugere que essas abordagens podem tornar o aprendizado mais significativo e relevante para os alunos, facilitando a compreensão e aplicação dos conceitos matemáticos (Freitas, 2020; Silveira, 2012).

A segunda seção discutirá a formação de professores, enfatizando a importância da formação continuada e do desenvolvimento profissional dos educadores. Mantoan e Lanuti (2016) afirmam que professores bem-preparados são capazes de identificar e abordar as dificuldades dos alunos de maneira mais eficaz, utilizando metodologias inovadoras e estratégias pedagógicas adequadas. A formação continuada dos professores é essencial para a implementação de práticas pedagógicas que promovam a aprendizagem significativa e a resolução de problemas.

Na terceira seção, serão propostos diversos recursos didáticos que podem facilitar a compreensão dos alunos. A utilização de materiais concretos e visuais, por exemplo, pode ajudar os alunos a visualizarem e entender melhor os problemas matemáticos, tornando o aprendizado mais acessível e significativo. Além disso, a incorporação de tecnologias educacionais e ferramentas digitais pode enriquecer o processo de ensino-aprendizagem, oferecendo novas possibilidades para a resolução de problemas.

A integração de disciplinas é discutida como uma estratégia fundamental para promover a compreensão contextualizada dos conceitos matemáticos. Segundo Freitas (2020), a matemática deve ser ensinada de forma integrada com outras áreas do conhecimento, permitindo que os alunos façam conexões significativas entre os diferentes tópicos e disciplinas. A autora afirma que essa abordagem pode facilitar a aplicação dos conceitos matemáticos em contextos reais, promovendo uma aprendizagem mais ampla e contextualizada (Proença *et al.,* 2022).

Por fim, será destacada a importância de criar um ambiente de aprendizagem seguro e acolhedor, que incentive a participação ativa dos alunos e reduza a ansiedade e o medo de errar. Sandes e Moreira (2018) argumentam que a criação de um ambiente de aprendizagem positivo é essencial para promover a confiança e a motivação dos alunos, facilitando a superação das dificuldades na resolução de problemas. E acrescentam que, a motivação é um fator crucial para o sucesso na aprendizagem, pois influencia diretamente o engajamento e a persistência dos alunos.

Estratégias Pedagógicas Inovadoras para a Superação das Dificuldades Matemáticas

As estratégias pedagógicas inovadoras seguem os desafios encontrados já citados neste artigo. A integração de disciplinas é uma estratégia pedagógica que pode ajudar significativamente na superação das dificuldades matemáticas. Segundo Freitas (2020), a matemática deve ser ensinada de forma integrada com outras áreas do conhecimento, permitindo que os alunos façam conexões significativas entre os diferentes tópicos e disciplinas. Proença *et al.* (2022) argumentam que essa abordagem facilita a aplicação dos conceitos matemáticos em contextos reais, promovendo uma aprendizagem mais ampla e contextualizada.

O uso de problemas contextualizados no ensino diário é outra estratégia eficaz. De acordo com Silveira (2012), a contextualização dos problemas matemáticos em situações reais pode aumentar a motivação e o interesse dos alunos pela matemática. Sandes e Moreira (2018) destacam que a resolução de problemas contextualizados ajuda os alunos a entenderem a relevância dos conceitos matemáticos em suas vidas cotidianas, tornando o aprendizado mais significativo.

A metodologia de ensino baseada em projetos também pode ser uma ferramenta poderosa para superar as dificuldades matemáticas. Segundo Loureiro (2013), essa abordagem permite que os alunos trabalhem em projetos interdisciplinares, aplicando os conceitos matemáticos em situações práticas e reais. Freitas (2020) acrescenta que a aprendizagem baseada em projetos promove o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas e pensamento crítico.

A utilização de tecnologias educacionais é outra estratégia que pode facilitar a compreensão dos alunos. De acordo com Curi (2004), ferramentas digitais e recursos online podem enriquecer o processo de ensino-aprendizagem, oferecendo novas possibilidades para a resolução de problemas matemáticos. A autora ainda complementa que que a incorporação de tecnologias educacionais pode tornar o aprendizado mais interativo e envolvente, aumentando a motivação dos alunos.

A prática regular e sistemática de resolução de problemas é essencial para o desenvolvimento de habilidades matemáticas. Sandes e Moreira (2018) apontam que a prática constante ajuda os alunos a se familiarizarem com diferentes tipos de problemas e estratégias de solução, consolidando os conhecimentos adquiridos. E acrescentam que a prática regular promove a confiança dos alunos, permitindo que eles enfrentem desafios mais complexos com maior segurança (Loureiro, 2013).

A criação de um ambiente de aprendizagem colaborativo também é fundamental. Segundo Proença *et al.* (2022), a colaboração entre alunos pode promover a troca de ideias e estratégias, facilitando a compreensão dos conceitos matemáticos. O trabalho em grupo permite que os alunos aprendam uns com os outros, desenvolvendo habilidades sociais e de comunicação.

A personalização do ensino é outra estratégia importante. De acordo com Curi (2004), o ensino personalizado permite que os professores adaptem as estratégias pedagógicas às necessidades individuais dos alunos, oferecendo suporte e orientação adequados. Silveira (2012) destaca que a personalização do ensino pode ajudar a identificar e abordar as dificuldades específicas de cada aluno, promovendo uma aprendizagem mais eficaz.

A utilização de materiais concretos e visuais pode facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos. Loureiro (2013) argumenta que a utilização de recursos visuais ajuda os alunos a visualizarem e entender melhor os problemas matemáticos, tornando o aprendizado mais acessível e significativo. E acrescenta que os materiais concretos podem tornar os conceitos abstratos mais tangíveis, facilitando a compreensão dos alunos.

A formação continuada dos professores é essencial para a implementação eficaz dessas estratégias pedagógicas. Segundo Proença *et al.* (2022), a formação continuada permite que os professores se atualizem sobre as novas metodologias e práticas pedagógicas, melhorando a qualidade do ensino, sendo fundamental para a identificação e abordagem das dificuldades dos alunos, promovendo uma aprendizagem mais eficaz.

A avaliação formativa é uma ferramenta importante para monitorar o progresso dos alunos e identificar áreas de dificuldade. De acordo com Curi (2004), a avaliação formativa permite que os professores acompanhem o desenvolvimento dos alunos, oferecendo *feedback* contínuo e ajustando as estratégias pedagógicas conforme necessário. Silveira (2012) contribui afirmando que a avaliação formativa pode ajudar a identificar as dificuldades dos alunos em tempo hábil, permitindo intervenções pedagógicas mais eficazes.

A motivação dos alunos é um fator crucial para o sucesso na aprendizagem matemática. Sandes e Moreira (2018) argumentam que a criação de um ambiente de aprendizagem positivo e acolhedor é essencial para promover a motivação e o engajamento dos alunos. E acrescentam que a motivação dos alunos influencia diretamente o seu desempenho acadêmico, sendo um fator determinante para a superação das dificuldades matemáticas.

Por fim, a integração de diferentes metodologias pedagógicas pode ser uma estratégia eficaz para superar as dificuldades matemáticas. Segundo Proença *et al.* (2022), a combinação de diferentes abordagens pedagógicas permite que os professores adaptem as estratégias de ensino às necessidades e estilos de aprendizagem dos alunos, promovendo uma aprendizagem mais eficaz. Assim, a integração de metodologias pedagógicas pode enriquecer o processo de ensino-aprendizagem, oferecendo uma abordagem mais holística e contextualizada.

Formação Continuada de Professores: Pilar para a Excelência Educacional

A formação continuada dos professores é um elemento crucial para a melhoria da qualidade do ensino. Segundo Gadotti (1998), a educação é um espaço onde a sociedade se interroga e busca soluções para seus desafios, e os professores são fundamentais nesse processo. De acordo com o Instituto Ayrton Senna (2024) a formação permite que os educadores se mantenham atualizados com as novas metodologias e práticas pedagógicas, promovendo uma educação mais eficaz e relevante.

A importância da formação continuada é destacada por diversos estudos. De acordo com a pesquisa do Viva Metodologia Ativa (2023), 99% dos professores consideram a melhoria da carreira e das condições de trabalho como essenciais para se sentirem mais valorizados (Instituto Península, 2021). Essa valorização é fundamental para a motivação e o engajamento dos professores, que, por sua vez, impactam diretamente na qualidade do ensino (Viva Metodologia, 2024).

Segundo Curi (2004), a educação está em constante evolução, e os professores precisam estar preparados para lidar com essas mudanças. A formação continuada oferece aos educadores as ferramentas necessárias para se adaptarem às novas demandas e desafios do ensino, promovendo uma prática pedagógica mais eficaz. Além disso, de acordo com Sandes e Moreira (2018), a formação continuada permite que os professores aprimorem suas habilidades e conhecimentos, promovendo um ensino de qualidade. Assim, se torna fundamental para a atualização dos professores, garantindo que eles estejam sempre preparados para oferecer o melhor ensino possível.

De acordo com o Instituto Ayrton Senna (2024), a formação continuada ajuda a reconhecer e valorizar a importância dos professores na sociedade, promovendo uma maior valorização da carreira docente. Essa valorização é essencial para atrair e reter bons profissionais na educação, garantindo a qualidade do ensino.

Já Proença *et al.* (2022), afirmam que programas que priorizam a prática desde o início da formação são mais eficazes, pois garantem que os futuros professores apliquem os conhecimentos em contextos reais de ensino. Essa integração é essencial para promover uma compreensão profunda do conteúdo teórico e das práticas pedagógicas.

Segundo Curi (2004), os professores precisam desenvolver habilidades como pensamento crítico, comunicação eficaz e competência digital para lidar com as demandas do ensino moderno. Essas competências são essenciais para preparar os alunos para os desafios do século 21, promovendo uma educação mais relevante e eficaz.

A formação continuada dos professores também deve incluir o desenvolvimento de habilidades emocionais e sociais. De acordo com Silveira (2012), a inteligência emocional é uma competência essencial para os professores, pois influencia diretamente a qualidade das interações em sala de aula. Curi (2004) acrescenta que o desenvolvimento de habilidades sociais é fundamental para promover um ambiente de aprendizagem positivo e acolhedor.

Segundo o Instituto Ayrton Senna (2024), a formação continuada contribui para o aperfeiçoamento constante dos professores e, consequentemente, para a evolução das práticas pedagógicas, se tornando essencial para garantir a qualidade do ensino e promover uma educação mais eficaz e relevante. Por fim, a formação continuada permite que os educadores se mantenham atualizados com as novas metodologias e práticas pedagógicas, promovendo uma educação mais eficaz e relevante.

Recursos Didáticos Inovadores: Facilitando a Compreensão Matemática

A utilização de recursos didáticos inovadores é essencial para facilitar a compreensão dos alunos e tornar o aprendizado mais significativo. Segundo Monteiro (2023), os recursos didáticos são ferramentas que auxiliam na transmissão de conhecimento de maneira eficaz, estimulando o interesse e a participação dos alunos. Já Freitas (2020) destaca que a utilização de materiais concretos e visuais pode ajudar os alunos a visualizarem e entender melhor os problemas matemáticos, tornando o aprendizado mais acessível e significativo. Segundo Curi (2004), os manipulativos matemáticos podem ajudar os alunos a visualizarem e entender melhor os conceitos abstratos, tornando o aprendizado mais acessível e significativo. Assim, a utilização de materiais concretos pode tornar os conceitos matemáticos mais tangíveis, facilitando a compreensão dos alunos.

Os recursos didáticos digitais, como softwares de simulação e plataformas de aprendizagem online, têm se mostrado eficazes na facilitação do aprendizado. De acordo com Curi (2004), a incorporação de tecnologias educacionais pode enriquecer o processo de ensino-aprendizagem, oferecendo novas possibilidades para a resolução de problemas matemáticos. A utilização de recursos digitais pode tornar o aprendizado mais interativo e envolvente, aumentando a motivação dos alunos.

A utilização de jogos educativos é outra estratégia eficaz para facilitar a compreensão dos alunos. Segundo Loureiro (2013), os jogos educativos podem tornar o aprendizado mais divertido e envolvente, promovendo a participação ativa dos alunos. E ainda acrescenta que os jogos educativos podem ajudar os alunos a desenvolverem habilidades de resolução de problemas e pensamento crítico, tornando o aprendizado mais significativo. Monteiro (2023), aponta também que os vídeos educativos podem ajudar a ilustrar conceitos complexos de maneira visual e acessível, facilitando a compreensão dos alunos. Assim, a utilização de vídeos educativos pode tornar o aprendizado mais dinâmico e envolvente, aumentando a motivação dos alunos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo estudo revisou a literatura sobre as dificuldades enfrentadas pelos alunos na resolução de problemas matemáticos contextualizados, identificando as principais causas e propondo estratégias pedagógicas para superá-las. A análise revelou que a má formação de conceitos matemáticos básicos, a abordagem tradicional de ensino focada na memorização, a falta de integração entre disciplinas, a ausência de recursos didáticos adequados, a resistência dos alunos a metodologias ativas, a falta de tempo para a resolução de problemas, a falta de apoio e orientação dos professores, a ansiedade e o medo de errar, a falta de prática regular e a desmotivação dos alunos são fatores que contribuem significativamente para essas dificuldades. A formação continuada dos professores e a utilização de recursos didáticos inovadores foram destacadas como estratégias essenciais para a superação dessas barreiras.

As implicações desses achados para a prática educacional são profundas. A necessidade de uma abordagem pedagógica mais integrada e contextualizada é evidente. A integração de disciplinas e o uso de problemas contextualizados no ensino diário podem tornar o aprendizado mais significativo e relevante para os alunos, facilitando a compreensão e aplicação dos conceitos matemáticos. Além disso, a formação contínua dos professores é crucial para garantir que eles estejam preparados para implementar essas estratégias de maneira eficaz. A valorização da carreira docente e a oferta de oportunidades de desenvolvimento profissional contínuo são essenciais para atrair e reter bons profissionais na educação.

Para a política educacional, os achados deste estudo sugerem a necessidade de uma revisão das diretrizes curriculares e das práticas de formação de professores. Políticas que incentivem a integração de disciplinas e a utilização de metodologias ativas de ensino podem promover uma aprendizagem mais eficaz e significativa. Além disso, é fundamental que as políticas educacionais reconheçam a importância da formação continuada dos professores e ofereçam suporte e recursos adequados para o desenvolvimento profissional dos educadores. A implementação de programas de formação contínua que priorizem a prática desde o início da formação pode garantir que os futuros professores estejam bem-preparados para enfrentar os desafios do ensino.

As sugestões para pesquisas futuras incluem a investigação de novas metodologias pedagógicas que possam facilitar a compreensão dos alunos e promover a aprendizagem significativa. Estudos que explorem a eficácia de diferentes recursos didáticos, como jogos educativos, vídeos e tecnologias digitais, podem oferecer *insights* valiosos sobre como tornar o aprendizado mais interativo e envolvente. Além disso, pesquisas que investiguem a integração de disciplinas e a contextualização dos problemas matemáticos em situações reais podem contribuir para o desenvolvimento de práticas pedagógicas mais eficazes.

Por fim, a investigação das habilidades emocionais e sociais dos professores é uma área que merece atenção. Pesquisas que explorem como desenvolver a inteligência emocional e as habilidades sociais dos educadores podem contribuir para a criação de um ambiente de aprendizagem positivo e acolhedor, promovendo a motivação e o engajamento dos alunos. Além disso, estudos que investiguem a motivação dos alunos e como ela influencia o desempenho acadêmico podem oferecer orientações valiosas para a implementação de práticas pedagógicas que promovam a superação das dificuldades matemáticas.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção de conhecimentos:** uma perspectiva cognitiva. Lisboa: Plátano, 2003.

BARROWS, H. S., TAMBLYN, R. M. **Problem- based learning**: an approach to Medical Education. New York: Springer, 1980.

BRUNER, J. **Toward a theory of instruction**. Cambridge: Harvard University Press, 1986.

CURI, Edda. Contextualização, resolução de problemas e Educação Matemática. In: **Anais do VIII**

ENEM – Minicurso. GT 2 – Educação matemática nas Séries Finais do Ensino Fundamental. 2004. Disponível em: https://sbembrasil.org.br/ files/viii/pdf/02/MC02875535820.pdf. Acesso em: jul. 2024.

FREITAS, Cristina dos S. **Resolução de problemas matemáticos contextualizados:** a importância da leitura e da interpretação de texto na aprendizagem de Matemática. 34 f. Monografia. Curso de Matemática. Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira. Redenção – CE, 2020.

GADOTTI, Moacir. **Pedagogia da práxis**, 2. ed., São Paulo, Cortez, 1998.

INSTITUTO AYRTON SENNA. **Formação de professores:** o papel crucial da educação contínua no desenvolvimento de educadores. 2024. Disponível em: https://institutoayrtonsenna.org.br/ formacao-de-professores/ Acesso em ago. 2024.

LOUREIRO, Vanilda. **Dificuldades na aprendizagem da matemática:** um estudo com alunos do Ensino Médio. 59 f. Dissertação mestrado em Matemática. Universidade Federal do Espírito Santo. Disponível em: https://repositorio.ufes.br/ server/api/core/bitstreams/2f2f04d0-a86e-4134-b1e5-804ce5d923b5/content Acesso em jul. 2024.

MANTOAN, Maria T. E.; LANUTI, José E. O.E. Identificação das dificuldades dos estudantes em relação à resolução de problemas por meio dos campos conceituais de Vergnaud. **XII Encontro Nacional de Educação Matemática**. 2016. Disponível em: https://www.sbem.com.br/enem2016/ anais/pdf/4783_2299_ID.pdf Acesso em jun. 2024.

MONTEIRO, Roberto. **Recursos didáticos:** o que são, exemplos e importância. 2023. Disponível em: https://www.educlad.com.br/recursos/ Acesso em ago. 2024.

MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 7, n. 1, p. 7–29, 2016. Disponível em: https://ienci.if.ufrgs.br/index.php/ienci/article/view/569. Acesso em jul. 2024.

PROENÇA, Marcelo C. *et al.* Dificuldades de alunos na resolução de problemas: análise a partir de propostas de ensino em dissertações. **Bolema.** Rio Claro (SP), v. 36. n. 72, abr. 2022. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/rJgQHszSd NtDmfNHFKYWgsz/. Acesso em: jul. 2024.

SANDES, J. P.; MOREIRA, G. E. Educação matemática e a formação de professores para uma prática docente significativa. **Revista @mbienteeducação**. São Paulo: Universidade Cidade de São Paulo, v. 11, n. 1, p. 99-109, jan/abr 2018. Disponível em: https://publicacoes.unicid.edu.br/ ambienteeducacao/article/view/49/471 Acesso em jun. 2024.

SILVA, Lucas I. B. *et al.* Contextualização matemática: a dificuldade dos educandos na interpretação de problemas na Educação Básica. In: **XII Encontro Nacional de Educação Matemática**. 2016. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/ enem2016/anais/ pdf/8213_4295_ID.pdf. Acesso em: jun. 2024.

SILVEIRA, Bianca *et al.* Situação de dificuldade em matemática: estudo de caso na Educação Básica. **III EIEMAT Escola de Inverno de Educação Matemática.** 2012. Disponível em: http:// w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/PO/PO_ Silveira_Bianca.pdf Acesso em ago. 2024.

VERGNAUD, G. A. ¿En qué sentido la teoría de los campos conceptuales puede ayudarnos para facilitar aprendizaje significativo? **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 12, n. 2, p. 285-302, 2007.

VIVA METODOLOGIA ATIVA. **A importância da formação continuada de professores.** 2023. Disponível em: https://vivametodologia.com/gestao-escolar/a-importancia-da-formacao-continuada-de-professores/ Acesso em ago. 2024.

Capítulo 06

A relação entre a psicologia do desenvolvimento cognitivo e a educação matemática: uma revisão de literatura

Joyce Kelly de Jesus Santos

Graduada em Engenharia Mecatrônica e Licenciatura plena em matemática pela Universidade Tiradentes. Especialista no ensino da matemática e física. Lattes: http://lattes.cnpq.br/9793036846395389

Denise Alves de Oliveira França

Graduada em Psicologia pelo Centro Universitário Unirg. Especialista em psicologia educacional e do trabalho. Lattes: http://lattes.cnpq.br/7933113434880891

RESUMO

A psicologia do desenvolvimento cognitivo desempenha um papel crucial na compreensão de como os estudantes aprendem matemática, oferecendo valiosas teorias e práticas aplicáveis ao ensino. Essas teorias podem explorar aspectos como a capacidade de abstração matemática, a conexão entre pensamento lógico e resolução de problemas, entre outros elementos pertinentes. Esta pesquisa busca, então, estudar de que maneira a teoria do desenvolvimento cognitivo de Jean Piaget pode ser aplicada efetivamente ao contexto da educação matemática. Foi adotado o método de revisão de literatura exploratória para realizar este estudo. Logo, a interconexão entre a psicologia do desenvolvimento cognitivo e a educação matemática é essencial para a compreensão de como os estudantes adquirem e aprimoram suas habilidades matemáticas.

Palavras-chave: psicologia; educação matemática; desenvolvimento cognitivo.

INTRODUÇÃO

A relação entre a psicologia do desenvolvimento cognitivo e a educação matemática envolve uma discussão mais ampla sobre a interação entre essas duas áreas. É importante integrar esses dois campos do conhecimento, mas também é fundamental reconhecer a identidade e autonomia de cada um deles. Não se pode permitir que uma área normatize a outra. Por um lado, a psicologia oferece subsídios teóricos para a educação, e por outro lado, encontra na educação um campo vasto de aplicação, inclusive examinando a validade de alguns de seus pressupostos.

No entanto, nem sempre essa relação foi equilibrada. Estudiosos da psicologia escolar/educacional apontam que muitas vezes houve uma

DOI: 10.47573/aya.5379.2.344.6

assimetria, com a psicologia mantendo uma certa autoridade sobre a educação. Um exemplo disso foi o impacto da aplicação de testes psicométricos na educação, especialmente quando se tratava de dificuldades de aprendizagem. Na verdade, havia uma tendência em "patologizar" o fracasso escolar, atribuindo as dificuldades das crianças, principalmente as de baixa renda, a distúrbios ou problemas psicológicos.

Ao assumir a responsabilidade de explicar e remediar essas dificuldades, a psicologia retirava da escola a oportunidade de encontrar alternativas para superá-las, que muitas vezes residiam não no indivíduo, mas nas práticas educacionais. A ênfase nas abordagens diagnósticas e clínicas acabava "psicologizando" o ambiente educacional, o que foi amplamente criticado. No entanto, outras áreas da psicologia mantinham uma relação mais apropriada com a educação, como a psicologia da aprendizagem e a psicologia do desenvolvimento.

A psicologia do desenvolvimento tem mantido um diálogo contínuo com a educação, observando-se diferentes configurações ao longo do tempo. Ao discutir a relação entre aprendizagem e desenvolvimento, enfatiza-se a importância de entender até que ponto o desenvolvimento pode ser alterado por situações de aprendizagem. A psicologia se torna mais eficaz na sua contribuição para a educação quando se afasta de teorias gerais e se aproxima de teorias específicas de domínios. É nesse contexto interdisciplinar e específico que este capítulo se insere. A teoria dos campos conceituais, proposta por Gérard Vergnaud, exemplifica o diálogo entre a psicologia do desenvolvimento cognitivo e a educação matemática. Essa teoria é uma abordagem pós-construtivista que se baseia na noção de esquema, teoremas-em-ação e desenvolvimento de campos conceituais específicos. Os esquemas são estruturas cognitivas que orientam as ações do indivíduo diante de situações específicas. No contexto da matemática, os esquemas de ação estão relacionados à compreensão das operações aritméticas.

Os teoremas-em-ação referem-se às competências mobilizadas para resolver problemas específicos, e os conceitos-em-ação não são conceitos explícitos, mas estão implicitamente presentes na construção do conhecimento matemático. A teoria dos campos conceituais também enfatiza a complexidade crescente dos campos conceituais de aritmética e álgebra, que envolvem esquemas de ação, representações e situações de uso. Esses campos conceituais são gradualmente dominados e incluem a compreensão de operações e relações mais complexas, como frações, proporções e porcentagens.

Dessa forma, foi levantada a seguinte problemática: Como a psicologia do desenvolvimento cognitivo pode influenciar o ensino e a aprendizagem da matemática?

Como hipótese foi levantada que a compreensão dos estágios cognitivos do desenvolvimento humano pode contribuir para a elaboração de estratégias de ensino mais eficazes na educação matemática.

Assim, a presente pesquisa tem como objetivo investigar como a teoria do desenvolvimento cognitivo de Jean Piaget pode ser aplicada na educação matemática.

A relação entre a psicologia do desenvolvimento cognitivo e a educação matemática é de grande relevância, pois compreender como os alunos aprendem e desenvolvem habilidades matemáticas pode auxiliar os educadores a implementarem práticas de ensino mais eficazes. Além disso, a revisão da literatura nessa área pode fornecer embasamento teórico para a adequação dos métodos de ensino e currículos escolares, visando atender melhor às necessidades dos alunos em diferentes estágios de desenvolvimento cognitivo.

INFLUÊNCIA DA TEORIA DO DESENVOLVIMENTO COGNITIVO DE PIAGET NO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO LÓGICO-MATEMÁTICO

De acordo com Silva (2005), a teoria cognitiva elaborada por Jean Piaget, conhecida como epistemologia genética, sustenta que há uma conexão direta entre os processos biológicos de evolução e adaptação ao ambiente e a inteligência. Esta teoria ganhou grande relevância entre as teorias de aprendizagem atuais, especialmente na educação e no uso de tecnologia para acompanhar o processo de aprendizagem.

Para Piaget, o desenvolvimento lógico e moral pode ser dividido em quatro etapas principais: sensório-motor, intuitivo ou simbólico, operatório concreto e operatório formal. No nascimento, a criança começa a explorar o mundo principalmente através de sensações e movimentos, sem um pensamento real. À medida que a criança cresce, seus mecanismos de pensamento evoluem, passando de uma abordagem centrada no próprio individuo para uma mais sociável, em que aceita normas do ambiente externo (Silva, 2005).

Este cenário muda na fase do pensamento operatório concreto, quando a criança é capaz de internalizar suas ações e seu pensamento se torna mais estruturado. Logo no início da adolescência, a criança entra no estágio operatório formal, onde as operações abstratas tomam conta de seu pensamento, permitindo-lhe pensar por meio de hipóteses (Silva, 2005).

Para Piaget, o desenvolvimento da mente segue um caminho lógico e sequencial que pode ser estudado em diferentes fases. Ele argumenta que o desenvolvimento intelectual é a resultante de duas características inatas da mente humana: organização, que é a criação de processos simples; e adaptação, a mudança constante que acontece no indivíduo em interação com o ambiente.

A teoria piagetiana também destaca a importância da influência social no desenvolvimento do pensamento lógico. Piaget acreditava que o desenvolvimento cognitivo ocorre a partir do encontro entre as experiências individuais e a influência do ambiente social. Este enfoque, que repousa sobre a interação entre o indivíduo e seu ambiente na formação de conhecimento, foi corroborado por estudiosos contemporâneos de Piaget, como o psicólogo argentino Jean Piaget. Eles argumentam que é através da interação físico-mental do indivíduo com seu ambiente que o conhecimento é construído.

O desenvolvimento do pensamento lógico-matemático é um processo contínuo que se dá através das ações mentais sobre os objetos. Ele é uma construção que resulta das relações que a criança cria ao pensar sobre o mundo. O pensamento lógico-matemático é uma construção mental, que acontece através de diferentes estágios de abstração. Ele exige um conhecimento base, que é adquirido a partir de interações sociais, e que torna possível o desenvolvimento de regras lógicas, que são necessárias para a troca de pensamentos entre os indivíduos (Perroni, 2002).

De acordo com Piaget, apesar de as habilidades matemáticas requererem funções cognitivas como intuição, senso comum, percepção de regularidades e abstração, as estruturas mentais são construídas de maneira espontânea e seguem um processo contínuo de desenvolvimento. Para Piaget, a aprendizagem ocorre na medida em que se adquire um resultado (conhecimento ou atuação) por meio da experiência, que pode ser física ou lógico-matemática (Silva, 2005).

Com seu estudo, Piaget sugeriu que existe uma capacidade cognitiva genérica, que se auto-instaura por estágios, desde a percepção sensório-motor até o pensamento formal abstrato. No entanto, pesquisas recentes na área da cognição indicam que a mente humana possui módulos especializados geneticamente programados, que trabalham com tipos específicos de informações, realizando operações específicas e entregando os resultados a outro módulo (Silva, 2005).

PSICOLOGIA EDUCACIONAL E APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

De acordo com Spinillo (2006), as mudanças que a psicologia educacional vem passando, aliadas às influências teóricas recentes da psicologia da aprendizagem e do desenvolvimento, contribuíram para a formação de um campo de estudo chamado Psicologia da Educação Matemática, que tem como foco a análise da atividade matemática. Essa atividade compreende três contextos culturais de construção de significado: a matemática escolar, que trata das atividades desenvolvidas em sala de aula; a matemática extra-escolar, que envolve conhecimentos matemáticos em situações extra-escolares, como práticas profissionais; e a matemática dos matemáticos, que é um conjunto de conhecimentos compartilhados e praticados por grupos específicos de profissionais.

No contexto da educação, é importante destacar a transformação que ocorre no conhecimento matemático ao se tornar um saber a ser ensinado, inserido em uma situação didática. De acordo com Spinillo (2006), o significado do conhecimento matemático é influenciado pela forma como o conteúdo é abordado e transformado em sala de aula. Nesse sentido, uma das características de uma situação didática é sua intencionalidade e sistematização, pois se trata de um contexto social criado especificamente para ensinar algo a alguém. Além disso, a sala de aula é regida por um conjunto de normas e expectativas, denominado contrato didático, que estabelece as relações entre professor, alunos e conhecimento, bem como as relações entre conhecimento escolar e extra-escolar.

Spinillo (2006) discute as complexas relações entre a matemática escolar e a matemática extra-escolar, com base em pesquisas em educação matemática. A partir dessas reflexões, o autor identifica quatro concepções do professor em relação ao conhecimento extra-escolar dos alunos da educação infantil e das séries iniciais do ensino fundamental. A primeira concepção é a de que a escola é o lugar onde o raciocínio matemático se desenvolve pela primeira vez na mente da criança. A segunda concepção desvaloriza o conhecimento extra-escolar, considerando-o desnecessário e inadequado para a aprendizagem na escola. Enquanto isso, a terceira concepção superestima o conhecimento extra-escolar do aluno, presumindo que os conteúdos escolares devem atender às necessidades cotidianas fora da escola e que o conhecimento espontâneo adquirido fora da escola prepara para o conhecimento escolar. No entanto, a ideia de que o conhecimento matemático extra-escolar sempre favorece o conhecimento matemático escolar é simplista. O conhecimento extra-escolar pode tanto ajudar como dificultar a aprendizagem da matemática escolar.

Portanto, a psicologia da educação matemática busca unir conhecimentos da matemática, educação e psicologia, com o objetivo de aprofundar a compreensão dos aspectos psicológicos do ensino e aprendizagem dessa disciplina. De acordo com Spinillo (2006), a psicologia contribui significantemente por meio de pesquisas que investigam como as pessoas compreendem e aprendem conceitos matemáticos. Por isso, são discutidas pesquisas realizadas com crianças, tanto do ponto de vista psicológico quanto educacional.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Portanto, a relação entre a psicologia do desenvolvimento cognitivo e a educação matemática é crucial para entendermos como os alunos aprendem e desenvolvem habilidades matemáticas. É importante reconhecer a identidade e autonomia de cada área, evitando que uma área normatize a outra. A psicologia do desenvolvimento cognitivo oferece subsídios teóricos para a educação matemática, enquanto a educação matemática oferece um campo vasto de aplicação para a psicologia do desenvolvimento cognitivo.

No entanto, é necessário superar a assimetria que já existiu entre essas áreas, reconhecendo a importância da escola em encontrar alternativas para a superação das dificuldades de aprendizagem, que muitas vezes residem não no indivíduo, mas nas práticas educacionais.

A psicologia da educação matemática é um campo de estudo importante que busca aprofundar a compreensão dos aspectos psicológicos do ensino e aprendizagem da matemática, e sua integração nas práticas educacionais pode contribuir para um ensino mais eficaz e adequado às necessidades dos alunos.

REFERÊNCIAS

SPINILLO, Alina Galvão; LAUTERT, Síntria Labres. **O diálogo entre a psicologia do desenvolvimento cognitivo e a educação matemática**. Psicologia Cognitiva: cultura, desenvolvimento e aprendizagem, p. 46-80, 2006.

SILVA, Vicente Eudes Veras da. **O pensamento lógico-matemático, 30 anos após o debate entre Piaget e Chomsky**. Reunião anual da ANPED, v. 28, 2005.

PERRONI, Elaine Regina Amador *et al.* **Educação e informática: o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático da criança com necessidades educativas especiais**. 2002.

Capítulo 07

O impacto positivo da presença de psicólogos nas escolas: uma análise da importância dos psicólogos na educação matemática

Joyce Kelly de Jesus Santos

Graduada em Engenharia Mecatrônica e Licenciatura plena em matemática pela Universidade Tiradentes. Especialista no ensino da matemática e física. Lattes: http://lattes.cnpq.br/9793036846395389

Denise Alves de Oliveira Franca

Graduada em Psicologia pelo Centro Universitário Unirg. Especialista em psicologia educacional e do trabalho. Lattes: http://lattes.cnpq.br/7933113434880891

RESUMO

A Psicologia Escolar e Educacional tem ganhado destaque no Brasil, apesar de ter recebido menos atenção dos psicólogos em comparação com outras áreas. As escolas são ambientes complexos, influenciados por diversos fatores, como classe social, raça, gênero, sexualidade, deficiência e idade. Em relação a educação matemática, os psicólogos desempenham um papel fundamental no apoio emocional e no desenvolvimento de habilidades socioemocionais dos estudantes, o que influencia diretamente o desempenho e a atitude em relação à matemática. O presente estudo científico tem como objetivo analisar de que forma a presença obrigatória de psicólogos nas redes públicas de ensino, estabelecida pela Lei nº 13.935/2019, pode impactar positivamente o ambiente escolar. Ademais, irá abordar quais os impactos dos psicólogos educacionais na educação matemática. Para isso, foi adotado o método da revisão de literatura exploratória com abordagem qualitativa. Portanto, a presença dos psicólogos nas escolas, estabelecida pela Lei nº 13.935/2019, é um passo importante para a valorização da Psicologia Escolar e Educacional e para a promoção de processos educacionais mais inclusivos e adequados às necessidades dos estudantes.

Palavras-chave: psicologia escolar; psicologia na escola; educação.

INTRODUÇÃO

A Psicologia Escolar e Educacional tem desempenhado um papel importante na produção de conhecimento científico no Brasil. Embora os psicólogos tenham se concentrado menos na área da educação em comparação a outras áreas como saúde, assistência social, trabalho e clínica, existem muitas discussões e práticas que destacam o poder da psicologia na vida escolar.

DOI: 10.47573/aya.5379.2.344.7

AYA Editora©

O campo da educação apresenta muitos desafios para a pesquisa e atuação profissional em psicologia. As escolas são espaços complexos, inseridos em diferentes contextos sociais que são influenciados por questões de classe social, raça, gênero, sexualidade, deficiência e idade. Essas questões interseccionadas resultam em realidades institucionais distintas. A complexidade das escolas desafia os psicólogos a desenvolver práticas que integrem diferentes áreas de conhecimento, como políticas educacionais, currículo, psicologia da aprendizagem e do desenvolvimento, psicologia social, psicologia institucional, sociologia, antropologia, filosofia, entre outras. Essa integração contribui para uma compreensão dos fenômenos no campo da educação.

A Lei nº 13.935, promulgada em dezembro de 2019, estabelece a prestação de serviços de psicologia e serviço social nas escolas públicas de educação básica. Essa lei incentiva os profissionais da psicologia a desenvolverem práticas voltadas para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem, com a participação da comunidade escolar e a mediação das relações sociais e institucionais. Além disso, a lei destaca a importância do trabalho em equipe multiprofissional e do respeito ao projeto político-pedagógico das redes públicas de educação básica e suas instituições. Essa abordagem está de acordo com as ideias defendidas por diversos autores. Acredita-se que o reconhecimento da área e o suporte profissional aos demais atores educacionais possam trazer uma nova realidade para as escolas.

No entanto, embora a aprovação da lei seja um avanço significativo para a inserção do profissional de psicologia na educação, reconhece-se que sua regulamentação não é suficiente para garantir processos educacionais inclusivos, baseados nos direitos humanos. A Psicologia Escolar e Educacional é um campo heterogêneo, com diferentes perspectivas teórico-metodológicas, que podem produzir efeitos diversos na vida escolar. Existem discursos científicos que questionam a necessidade da atuação do psicólogo nas escolas, assim como discursos que enfatizam os possíveis riscos dessa atuação. Portanto, é fundamental que a Psicologia Escolar e Educacional reconheça a complexidade do fenômeno educacional e as contribuições efetivas da área para o campo.

Diante disso, surge a seguinte problemática: Como a presença dos psicólogos no ambiente educacional pode contribuir para a produção de conhecimento, essencialmente na educação matemática?

O presente estudo científico tem como objetivo analisar de que forma a presença obrigatória de psicólogos nas redes públicas de ensino, estabelecida pela Lei nº 13.935/2019, pode impactar positivamente o ambiente escolar, por meio do desenvolvimento de ações de prevenção, promoção da saúde mental e melhoria do desempenho acadêmico dos estudantes. Ademais, irá abordar quais os impactos dos psicólogos educacionais, essencialmente na disciplina da matemática, que é considerada a disciplinas que os alunos mais possuem dificuldade. Para isso, foi adotado o método da revisão de literatura exploratória com abordagem qualitativa.

A presença dos psicólogos no ambiente educacional pode contribuir significativamente para a produção de conhecimento e atuação profissional da psicologia na educação básica. A aprovação da Lei nº 13.935/2019, que estabelece a presença obrigatória de psicólogos nas redes públicas de ensino, tem gerado entusiasmo e expectativa na profissão. Essa lei representa uma oportunidade para os psicólogos ampliarem seus campos de atuação e contribuírem de forma mais efetiva para a melhoria do ambiente escolar. Com a presença dos psicólogos, será possível desenvolver ações de prevenção, promoção da saúde mental e melhoria do desempenho acadêmico dos estudantes.

A Psicologia Escolar no Brasil

Para Bertasso (2022), a história da Psicologia Escolar e Educacional no Brasil remonta aos tempos coloniais, em que questões relacionadas à educação e pedagogia traziam elaborações sobre os fenômenos psicológicos. A partir do século XIX, a presença da psicologia se tornou mais evidente. Sua necessidade nos contextos escolares estava relacionada a dois fatores, conforme afirma Bertasso (2022): (a) a necessidade de higienização da sociedade; e (b) o surgimento de metodologias semelhantes ao escolanovismo. O primeiro fator estava ligado à necessidade de manter as regras e costumes na população, com a escola desempenhando um papel fundamental, exigindo, assim, a contribuição da psicologia como ciência. O segundo fator dizia respeito aos métodos de ensino e compreensão dos indivíduos e sua aprendizagem na escola, exigindo o entendimento psicológico para sua efetivação e desenvolvimento.

A preocupação com questões psicológicas dentro da pedagogia no século XIX marcou o início da sistematização que seria aprofundada no final dessa mesma época e início do século seguinte, com maior rigor metodológico em seu estudo. Os temas abordados pouco diferem entre os dois períodos, o que indica uma evolução no tratamento dessas questões e reforça a importância da relação entre Psicologia e Pedagogia.

Antes de se tornar um campo de conhecimento independente, a psicologia já estava presente em estudos médicos, sendo considerada “ideias psicológicas”. Para Antunes (2008), no século XIX, essas ideias psicológicas relacionadas à educação também eram produzidas em outras áreas do conhecimento, embora de forma mais institucionalizada. Outro ponto destacado por Antunes (2008) é como a psicologia se inseriu no contexto da educação brasileira. Até então, ela estava ligada à medicina. Mesmo quando necessária nas escolas, eram os pesquisadores médicos que possuíam o conhecimento psicológico para orientar seu trabalho. Nesse período, o Brasil estava no início da implementação do capitalismo industrial, importando conhecimentos de países desenvolvidos, sem levar em consideração a situação precária do país, reforçando a ideia de que a psicologia e seus conhecimentos trabalhavam em prol da emergente burguesia brasileira e da implementação da industrialização. Antunes (2008) afirma que a psicologia já era estudada no Brasil, mas inserida em outros campos do conhecimento. Foi somente no final do século XIX, com o fortalecimento do pensamento liberal, que surgiu a necessidade de um novo tipo de pessoa para atuar na modernização da sociedade brasileira, e a escola ficou responsável por formar esse indivíduo moderno.

De acordo com Machado (2010), no século XX, a psicologia passou a se voltar para estudos focados em alunos com necessidades especiais, e vários laboratórios ligados às Escolas Normais foram criados, sendo a Escola Normal de Niterói a primeira delas. Foi nesse contexto que surgiram os estudos da psicologia educacional. Nesse período, ocorreu o primeiro Congresso de Psicologia no Brasil e a criação e funcionamento dos primeiros laboratórios de psicologia. As pesquisas realizadas nesses laboratórios e nas escolas normais tinham uma abordagem biologicista e estavam fortemente ligadas à medicina, mesmo com a psicologia caminhando para sua autonomia como área de pesquisa e atuação.

Nas décadas de 1920 e 1930, surgiu o movimento de saúde mental, que defendia a ideia de que os profissionais da psicologia deveriam antecipar os problemas das pessoas e trabalhar no controle de seus comportamentos. Isso também se estendeu às escolas, por meio da prática de higiene mental. Naquela época, os profissionais, principalmente médicos, concebiam a escola como um local para prevenir problemas e direcionar comportamentos adaptados socialmente, com uma abordagem diagnóstica. Esse contexto é crucial para compreender por que a psicologia atuou de forma clínica nas escolas por tanto tempo (Facci, 2023).

Durante esse período, os estudos em psicologia, nos laboratórios experimentais das Escolas Normais e nos hospitais psiquiátricos, tinham uma ligação com a medicina e estavam focados no controle de crianças e adultos que não se adequavam a certos padrões, sem levar em conta fatores sociais. Assim, o conhecimento psicológico se mostrava útil na identificação de alunos com dificuldades de aprendizagem e comportamentos inadequados. Embora a psicologia ainda não fosse considerada uma profissão, médicos e psicólogos desempenhavam um papel significativo na educação com essa abordagem medicalizante, ensinada nos laboratórios de psicologia das Escolas Normais (Facci, 2023).

A partir das décadas de 1960 e 1970, com a lei 4.119/62, a psicologia se tornou uma profissão regulamentada, e foram estabelecidos os currículos mínimos nos cursos de graduação. Também foi nesse período que ocorreu o golpe militar no Brasil. Essa conjuntura política e econômica influenciou a psicologia, levando muitos profissionais a receberem uma formação teoricamente insuficiente e crítica (Scisleski, 2010).

Na década de 1980, surgiram críticas à atuação da psicologia nas escolas, principalmente em relação ao fracasso escolar. Essas críticas denunciavam um sistema excludente, discriminatório e responsabilizavam os alunos por seus problemas de aprendizagem. A partir dessas críticas, houve uma busca por uma abordagem mais abrangente e menos individualista, que levasse em consideração fatores sociais e históricos no processo de aprendizagem dos alunos (Scisleski, 2010).

No final da década de 1990 e início dos anos 2000, novas formas de aproximação entre a psicologia e a educação surgiram, por meio de profissionais com especialização em psicopedagogia, psicomotricidade e neuropsicologia/neuropsicopedagogia. No entanto, essas abordagens muitas vezes retornaram às explicações individualistas e organicistas para as dificuldades de aprendizagem, afastando-se da perspectiva crítica alcançada anteriormente (Bossa, 2020).

É importante entender toda essa história para compreender como a Psicologia Escolar se desenvolveu no Brasil e como a atuação dos psicólogos nessa área foi moldada ao longo do tempo. As críticas e as pesquisas realizadas resultaram em avanços e mudanças nas práticas, mas também há o risco de retrocessos. Portanto, é fundamental que os profissionais atuem de forma crítica e reflexiva, considerando o contexto social e histórico do fracasso escolar e das dificuldades de aprendizagem enfrentadas pelos alunos.

Psicologia na Escola: uma Análise de Projetos de Lei

Devido à complexidade, os projetos de lei analisados foram limitados ao âmbito federal. Os projetos de lei necessários para esta seção foram buscados nos sites www.senado.gov.br e www.camara.gov.br. Ademais, foi consultada a dissertação de mestrado de Bertasso (2022). O quadro 1 ilustra as legislações encontradas.

Quadro 1 - Projetos de Lei.

Projeto de Lei	Ementa	Situação
PLC 837/2003	Regulamenta a inclusão de assistentes sociais e psicólogos na equipe funcional das escolas.	Apensado ao PL 3688/2000
PLC 1497/2003	Estabelece a disponibilidade de serviços de psicologia para acompanhamento dos alunos tanto na escola quanto na comunidade.	Apensado ao PL 837/2003
PLC 2513/2003	Determina a obrigatoriedade da presença de profissionais da área de psicologia em todas as escolas, tanto públicas quanto privadas.	Arquivada
PLC 3154/2004	Exige a contratação de assistentes sociais e psicólogos pelas escolas públicas e privadas.	Arquivada
PLC 3613/2004	Estabelece a obrigatoriedade da participação de psicólogos nos quadros funcionais das escolas brasileiras.	Apensado ao PL 837/2003
PLC 7500/2006	Adiciona o artigo 86-A à lei nº 9.394/96, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, para tornar obrigatória a assistência psicológica aos educadores e educandos da Educação Básica.	Arquivada
PL 984/2011	Cria o Programa Nacional de Assistência Social e Psicológica nas escolas públicas de Educação Básica.	Apensado ao PL 6874/2010
PL 7986/2014	Implementa o Programa Creche Saudável, com o objetivo de fornecer acompanhamento médico, nutricional e psicológico para crianças nas creches públicas e comunitárias.	Apensado ao PL 1616/2011
PL 8013/2014	Regulamenta a prestação de assistência psicológica aos alunos da Educação Básica.	Apensado ao PL 7986/2014
PL 1543/2015	Inclui um dispositivo na lei nº 9.394/96 para estabelecer a obrigatoriedade de serviços de apoio técnico de psicologia nas redes públicas de Educação Básica, de acordo com as necessidades e prioridades definidas pelas políticas educacionais.	Apensado ao PL 8013/2014
PL 2729/2019	Acrescenta um inciso ao artigo 4º da lei nº 9.394/96 para garantir o dever do Estado de oferecer atendimento psicológico e socioassistencial na Educação Básica.	Apensado ao PL 1543/2015
PL 3426/2019	Adiciona um parágrafo único ao artigo 12 da lei nº 9.394/96 para garantir a atuação profissional de assistentes sociais, psicólogos e nutricionistas nas instituições de ensino da rede pública e privada da Educação Básica.	Apensado ao PL 2729/2019

Fonte: As autoras, baseadas nos dados de Bertasso, 2022.

A análise do quadro 1 revela uma série de propostas legislativas relacionadas à inclusão de assistentes sociais e psicólogos nas escolas, bem como à disponibilidade de serviços de psicologia para acompanhamento dos alunos.

Primeiramente, é importante ressaltar que algumas dessas propostas foram arquivadas, o que indica a falta de avanços concretos na implementação dessas medidas. Por exemplo, o PLC 2513/2003, que determinava a obrigatoriedade da presença de profissionais da área de psicologia em todas as escolas, tanto públicas quanto privadas, foi arquivado. Além disso, outros projetos de lei foram apensados a outros, o que sugere a tentativa de unir esforços em torno de uma proposta mais ampla. Por exemplo, o PLC 837/2003 teve outros projetos apensados a ele, como o PLC 1497/2003, que estabelecia a disponibilidade de serviços de psicologia para acompanhamento dos alunos tanto na escola quanto na comunidade.

Outras propostas incluíram a obrigatoriedade de contratação de assistentes sociais e psicólogos pelas escolas públicas e privadas, como o PLC 3154/2004. No entanto, esse projeto também foi arquivado, o que indica a resistência ou falta de vontade política para implementar medidas nesse sentido. Também é importante notar a existência de propostas de lei que abrangem diferentes aspectos da assistência psicológica nas escolas, como o PL 984/2011, que cria o Programa Nacional de Assistência Social e Psicológica nas escolas públicas de Educação Básica, e o PL 1543/2015, que inclui um dispositivo na lei nº 9.394/96 para estabelecer a obrigatoriedade de serviços de apoio técnico de psicologia nas redes públicas de Educação Básica.

Em suma, esse quadro revela uma série de propostas legislativas relacionadas à inclusão de assistentes sociais e psicólogos nas escolas e à disponibilidade de serviços de psicologia para acompanhamento dos alunos. No entanto, é importante destacar que muitas dessas propostas foram arquivadas ou apensadas a outros projetos, o que indica a falta de avanços concretos na implementação de tais medidas. Isso ressalta a necessidade de um debate e ação mais efetivos para garantir a presença desses profissionais nas escolas e oferecer suporte psicológico aos alunos.

A Atuação do Psicólogo nas Escolas: uma Abordagem da Lei 13.935/2019

De acordo com a lei 13.935/2019, as escolas públicas de Educação Básica devem contar com serviços de psicologia e serviço social, por meio de equipes multiprofissionais, para atender às necessidades e prioridades estabelecidas pelas políticas de educação. Essas equipes devem desenvolver ações para melhorar a qualidade do processo de ensino-aprendizagem, promovendo a participação da comunidade escolar e atuando na mediação das relações sociais e institucionais. O trabalho dessas equipes deve levar em consideração o projeto político-pedagógico das redes de educação básica e das escolas (Brasil, 2019). A lei estabelece ainda que os sistemas de ensino têm um ano, a partir da sua publicação, para tomar as medidas necessárias para cumprir as disposições da lei.

Ao se analisar as políticas educacionais a nível internacional e nacional, é importante reconhecer que os documentos são resultados de práticas sociais e da consciência humana em um determinado momento histórico. Ao analisar os documentos, é crucial identificar os autores e destinatários, bem como as vozes presentes, silenciadas e ocultas nos documentos. Nesse contexto, é relevante lembrar que em novembro de 2000 foi proposto um projeto de lei que previa a presença de assistentes sociais nas escolas, com o objetivo de ajudar nas urgências presentes no ambiente escolar. Posteriormente, em 2015, foi acrescentado o requerimento para a atuação de psicólogos, diferenciando os serviços oferecidos por cada profissional.

A presença de profissionais de psicologia e serviço social nas escolas é fundamental para a promoção da educação, garantindo a permanência dos alunos na escola e auxiliando na mediação comunitária e familiar. Esses profissionais contribuem para a implementação de melhores condições de trabalho para os professores, favorecendo o desenvolvimento e a socialização do conhecimento. É importante ressaltar que a presença desses profissionais não se limita a outras políticas públicas, mas está diretamente envolvida com o processo educativo e o desenvolvimento dos alunos.

Ao realizar uma pesquisa sobre uma determinada política, é necessário analisar diversos documentos, pesquisas e dados que informam sobre o tema. A análise dos documentos não se resume à lei em si, de forma descritiva, mas busca compreender e explicar o objeto de estudo, superando a aparência imediata da lei e compreendendo suas diversas determinações. É necessário adotar uma posição ativa na produção do conhecimento, selecionando e analisando as evidências presentes nas fontes.

A implementação da lei 13.935/2019 implica não apenas na sua celebração, mas também na regulamentação e aplicação no contexto escolar. É importante questionar a quem a lei serve e como será utilizada pelas organizações e profissionais envolvidos. Nesse sentido, é necessário garantir que a lei beneficie os alunos que enfrentam dificuldades escolares e contribua para o avanço do seu processo de aprendizagem.

É fundamental entender que o sistema vigente busca reproduzir-se e manter sua hegemonia, buscando o consentimento coletivo. No entanto, ao reproduzir-se, o sistema também reproduz as contradições da realidade. Portanto, é necessário atuar enfatizando a importância da lei 13.935/2019 como uma conquista da psicologia, mesmo ciente das contradições presentes.

A Influência das Emoções, Atitudes e Habilidades na Educação Matemática: uma Perspectiva Psicológica

Como já abordado, o estudo das emoções na literatura de psicologia educacional tem ganhado destaque, especialmente no Brasil, onde já existem muitos trabalhos relacionados a atitudes, crenças e concepções. Além disso, há também estudos sobre a influência da família, do gênero e do tipo de escola na escolha profissional, especialmente em carreiras que envolvem matemática. O comportamento ansioso em relação à escola está diretamente relacionado a essas emoções, assim como as atitudes. Vários pesquisadores da área de psicologia da educação matemática estão desenvolvendo estudos e programas de acompanhamento para reduzir a ansiedade matemática e promover atitudes positivas em relação à matemática.

À medida que os indivíduos avançam na escolaridade, eles desenvolvem crenças, valores e atitudes em relação às diferentes disciplinas, que variam em intensidade. O desenvolvimento das atitudes está relacionado ao afeto, enquanto as crenças e valores estão mais relacionados ao componente cognitivo. No entanto, esses componentes são interdependentes e não há uma demarcação clara entre eles. O componente afetivo da atitude em relação à matemática inclui emoções e sentimentos, como gostar ou não gostar da matemática. O componente cognitivo se refere ao conhecimento que o indivíduo possui sobre a matemática, incluindo avaliações e apreciações baseadas em argumentos racionais. O componente conativo se refere à expressão manifestada do conhecimento e do afeto, enquanto o componente comportamental é a maneira pela qual a atitude é expressa.

Quando um estudante apresenta atitudes negativas em relação à matemática, isso pode levar a comportamentos que vão desde um insucesso temporário até uma aversão extrema à disciplina. O estudo de Brito (2011) retrata sobre o Grupo de Pesquisa em Psicologia e Educação Matemática (PSIEM) que acumulou ao longo de vinte anos mais de dez mil protocolos de estudantes com dados sobre essas dimensões. Foram desenvolvidas escalas de avaliação diferenciadas para estatística, geometria, frações, análise, álgebra, cálculo, entre outros (Brito, 2011).

A habilidade pode ser entendida como descrição ou explicação. Ela descreve o que a pessoa é capaz de fazer e busca explicar por que as pessoas fazem algo. O modelo mental das habilidades humanas refere-se tanto à descrição do que podemos executar quanto ao que nos capacita a realizar determinadas tarefas com sucesso. As habilidades matemáticas incluem, por exemplo, habilidade para pensar logicamente, habilidade para generalizar conceitos matemáticos e habilidade para resumir processos matemáticos (Brito, 2011).

A escola tem a função de desenvolver plenamente o potencial dos estudantes a partir de suas habilidades, levando-os a adquirir as competências necessárias para atuar em um mundo em constante transformação. Além disso, é importante desenvolver habilidades criativas e práticas, além das habilidades analíticas valorizadas pela escola. Os estudantes possuem múltiplas habilidades, mas nem sempre essas habilidades são valorizadas nas avaliações educacionais, que tendem a focar apenas nas habilidades analíticas e na memorização. É necessário desenvolver procedimentos de avaliação dinâmica que forneçam aos educadores informações sobre o desenvolvimento psicológico e educacional dos estudantes.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Portanto, a presença dos psicólogos nas escolas, estabelecida pela Lei nº 13.935/2019, é um passo importante para a valorização da Psicologia Escolar e Educacional e para a promoção de processos educacionais mais inclusivos e adequados às necessidades dos estudantes. No entanto, é necessário um esforço coletivo para garantir que essa presença seja efetiva e contribua de forma significativa para a produção de conhecimento e atuação profissional da psicologia na educação básica. Somente assim poderemos caminhar em direção a uma educação de qualidade, que promova o pleno desenvolvimento dos indivíduos e a construção de uma sociedade mais justa e igualitária.

O impacto positivo da presença de psicólogos nas escolas tem sido cada vez mais evidente, especialmente no contexto da educação matemática. A análise da importância dos psicólogos nessa área revela que eles desempenham um papel fundamental na compreensão das emoções, atitudes e crenças dos estudantes em relação à matemática. Através de estudos e programas de acompanhamento, os psicólogos estão contribuindo para a redução da ansiedade matemática e para o desenvolvimento de atitudes mais positivas em relação a essa disciplina.

A presença de psicólogos nas escolas permite uma abordagem mais abrangente no ensino da matemática, levando em consideração não apenas os aspectos cognitivos, mas também os afetivos e comportamentais. Ao trabalhar com as emoções dos estudantes, os psicólogos ajudam a criar um ambiente mais acolhedor e seguro, onde os alunos se sentem mais motivados e confiantes para enfrentar os desafios matemáticos.

Assim, a presença de psicólogos nas escolas exerce um impacto positivo na educação matemática, permitindo uma abordagem mais abrangente que leva em consideração não apenas os aspectos cognitivos, mas também os afetivos e comportamentais dos estudantes. Esse acompanhamento especializado contribui para a redução da ansiedade matemática, o desenvolvimento de atitudes positivas em relação à matemática e a promoção de um ambiente inclusivo e igualitário.

REFERÊNCIAS

ANTUNES, Mitsuko Aparecida Makino. **Psicologia Escolar e Educacional: história, compromissos e perspectivas**. Psicologia escolar e educacional, v. 12, p. 469-475, 2008.

BERTASSO, Maria Laura Lopes. U**ma análise crítica da Lei nº 13.935/2019 sobre a prestação de serviços de psicologia nas redes públicas de educação básica.** 2022. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade do Oeste Paulista – Unoeste. Presidente Prudente, 2022.

BOSSA, Nádia. **A psicopedagogia no Brasil**. Wak, 2020.

BRASIL. Câmara dos Deputados. **Lei nº 13.935, de 11 de dezembro de 2019. Dispõe sobre a prestação de serviços de psicologia e de serviço social nas redes públicas de Educação Básica**. Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF, p. 7, 11 dez. 2019c.

BRITO, Márcia Regina Ferreira de. **Psicologia da educação matemática: um ponto de vista**. Educar em Revista, n. 1, p. 29-45, 2011.

FACCI, Marilda Gonçalves Dias. **Valorização ou esvaziamento do trabalho do professor?: um estudo crítico-comparativo da teoria do professor reflexivo, do construtivismo e da psicologia Vigotskiana**. Autores Associados, 2023.

MACHADO, Fabiana Lacerda Baptista Abreu. **Sobre a atuação do psicólogo escolar**. 2010. Monografia (Graduação em Psicologia). Faculdade de Ciências da Educação e Saúde – Faces. Brasília, 2010.

SCISLESKI, Andrea. **Psicologia, formação, política e produção em saúde. Edipucrs,** 2010.

Capítulo 08

Ansiedade matemática: fatores cognitivos e afetivos

Joyce Kelly de Jesus Santos

Graduada em Engenharia Mecatrônica e Licenciatura plena em matemática pela Universidade Tiradentes. Especialista no ensino da matemática e física. Lattes: http://lattes.cnpq.br/9793036846395389

Denise Alves de Oliveira França

Graduada em Psicologia pelo Centro Universitário Unirg. Especialista em psicologia educacional e do trabalho. Lattes: http://lattes.cnpq.br/7933113434880891

RESUMO

Alguns estudantes enfrentam baixa autoestima em relação à matemática, frequentemente associando suas dificuldades a falhas pessoais. A ansiedade matemática, uma resposta negativa a situações matemáticas, pode causar desmotivação e evasão, e é distinta de outras formas de ansiedade. Essa condição pode prejudicar a resolução de problemas e é frequentemente confundida com discalculia. O presente estudo tem como objetivo analisar a relação entre fatores cognitivos e afetivos com os níveis de ansiedade matemática. Para entender melhor as discussões sobre ansiedade matemática, foi realizada uma revisão das publicações disponíveis nas bases de dados bibliográficas. Portanto, a ansiedade matemática está fortemente relacionada a fatores cognitivos e afetivos. Essa ansiedade pode resultar de deficiências em habilidades matemáticas, motivação e interações sociais, influenciadas por predisposições genéticas e fatores socioambientais. Intervenções que abordem aspectos emocionais e cognitivos são essenciais para reduzir seus impactos e melhorar o desempenho acadêmico.

Palavras-chave: habilidades matemática; ansiedade; fatores cognitivos.

INTRODUÇÃO

Alguns estudantes enfrentam baixa autoestima em relação à sua capacidade de entender a matemática, acreditando frequentemente que suas dificuldades são resultado de características pessoais ou habilidades individuais. Palavras como “desatento” e “preguiçoso” frequentemente circulam no ambiente escolar e social, mas muitos não percebem que sentimentos de medo, aversão e evasão em relação à matemática podem estar ligados à ansiedade matemática. Esta ansiedade é uma resposta negativa a situações matemáticas, afetando o estado cognitivo, fisiológico e comportamental do aluno (Campos, 2022).

Essas reações de preocupação, ansiedade, desamparo e medo muitas vezes resultam em desmotivação, desinteresse, tédio, abandono

DOI: 10.47573/aya.5379.2.344.8

escolar e evasão de atividades matemáticas. A maior parte das pesquisas sobre ansiedade matemática são de origem internacional e abrangem áreas como Genética, Psicologia e Neurociência (Campos, 2022).

Estudos indicam que a ansiedade matemática pode ocorrer em várias situações, como durante a resolução de problemas, avaliações, ao visualizar equações ou ao ouvir o nome do professor de matemática. A ansiedade matemática é distinta de outros tipos de ansiedade, como a ansiedade generalizada ou social (Campos, 2022).

Essa ansiedade pode prejudicar a resolução de problemas matemáticos, levando a frustração e aversão, o que pode resultar em um déficit cognitivo confundido com discalculia. Alguns pesquisadores estão investigando a relação entre discalculia e ansiedade matemática, com estudos sugerindo que esses distúrbios cognitivos e emocionais podem ser dissociáveis, e que diferentes intervenções podem ser necessárias para cada condição. No entanto, a pesquisa sobre essa relação ainda não fornece conclusões definitivas.

A ansiedade matemática é um fenômeno comum que pode impactar o desempenho acadêmico e a relação com a matemática em diferentes contextos educacionais. Fatores cognitivos, como a capacidade de processamento numérico, e afetivos, como a autoestima e a motivação, parecem estar relacionados ao desenvolvimento e à manutenção da ansiedade matemática. No entanto, a natureza dessa relação ainda não é completamente compreendida.

Fatores cognitivos, como dificuldades em habilidades numéricas básicas, juntamente com fatores afetivos, como baixa autoestima e alta sensibilidade ao fracasso, estão positivamente correlacionados com altos níveis de ansiedade matemática.

O presente estudo tem como objetivo analisar a relação entre fatores cognitivos e afetivos com os níveis de ansiedade matemática. Para entender melhor as discussões sobre ansiedade matemática, foi realizada uma revisão das publicações disponíveis nas bases de dados bibliográficas.

REFERENCIAL TEÓRICO

Ansiedade matemática

De acordo com Simões e Silva (2022), a ansiedade matemática é caracterizada por reações emocionais e/ou fisiológicas negativas que uma pessoa experimenta ao se deparar com situações envolvendo matemática. Essa forma de ansiedade é uma dimensão emocional da experiência matemática, distinta da cognição matemática. Seu impacto pode variar desde um leve desconforto até episódios de pânico.

Como uma forma recorrente de ansiedade, a ansiedade matemática pode ser abordada como um estado ou um traço. Quando considerada um traço, reflete um aspecto estável da personalidade que predispõe o indivíduo a interpretar estímulos matemáticos como ameaçadores. Como estado, afeta o estado emocional, fisiológico e cognitivo, levando a uma reação exagerada que prejudica a capacidade de realizar tarefas matemáticas (Simões; Silva, 2022). Essa ansiedade pode dificultar a concentração durante as aulas, o aprendizado de matemática e o desempenho em tarefas relacionadas à matemática, resultando frequentemente em comportamentos de evasão. Pessoas com alta ansiedade matemática tendem a evitar carreiras acadêmicas ou profissionais que envolvam matemática e a utilizar menos suas habilidades matemáticas no cotidiano.

A ansiedade matemática pode ser vista como uma forma específica de ansiedade de desempenho, focada em um domínio particular. Também é considerada um construto multidimensional, pois engloba respostas emocionais negativas em diversos contextos matemáticos.

Embora tenha semelhanças com outros tipos de ansiedade relacionados a aspectos afetivos no contexto educacional, como a ansiedade a testes, a ansiedade matemática não se limita a situações de avaliação, abrangendo também atividades matemáticas no dia a dia. Em resumo, há um consenso entre os pesquisadores de que, para indivíduos afetados por ansiedade matemática, o enfrentamento de situações relacionadas à matemática gera uma resposta emocional que impacta negativamente seu desempenho.

Causas da ansiedade matemática

De acordo com Simões e Silva (2022), a ansiedade matemática pode se manifestar desde a infância e continuar na vida adulta. Suas origens podem ser atribuídas a três categorias principais: predisposições genéticas, características individuais e fatores socioambientais.

A influência genética na ansiedade matemática é significativa. Estudos como o de Simões e Silva (2022) indicam que cerca de 40% da variabilidade na ansiedade matemática pode ser atribuída a fatores genéticos associados à ansiedade generalizada e às habilidades matemáticas. Os outros 60% são atribuídos a fatores socioambientais que afetam a criança. Apesar disso, a relação entre genética e ansiedade matemática ainda é pouco explorada, com as pesquisas atuais sendo algumas das pioneiras nesse campo.

A ansiedade matemática pode ser parcialmente explicada por deficiências em habilidades matemáticas, como a dificuldade em representação numérica, processamento matemático ou raciocínio abstrato (Campos, 2022). A motivação desempenha um papel fundamental nessa dinâmica, já que ansiedade matemática e motivação para a matemática são dimensões distintas, porém, inter-relacionadas.

A intensidade da ansiedade e o nível de motivação dos alunos influenciam como a ansiedade afeta o desempenho. Em casos de alta motivação e ansiedade moderada, a ansiedade pode até melhorar o desempenho, enquanto em casos de baixa motivação, tende a prejudicar o desempenho. Além disso, as emoções experimentadas durante a aprendizagem influenciam a motivação e a ansiedade matemática. Sentimentos de curiosidade e interesse promovem maior motivação, enquanto medo de fracasso aumenta a ansiedade. A motivação, por sua vez, é moldada pelas experiências e pelo contexto.

De acordo com Simões e Silva (2022), diversos fatores sociais e ambientais contribuem para o desenvolvimento da ansiedade matemática, tanto dentro quanto fora da sala de aula.

Aspectos como uma relação adversa entre alunos e professores, estratégias de ensino inadequadas e pressão dos colegas podem contribuir para a ansiedade matemática. O ambiente escolar, como percebido pelos alunos, afeta seu desempenho, entusiasmo e motivação. Ambientes desafiadores e acolhedores promovem uma maior autoeficácia e melhor desempenho, enquanto ambientes competitivos e com avaliações constantes podem aumentar a ansiedade e reduzir a participação. A ansiedade matemática também está associada ao medo de cometer erros e receber feedback negativo, especialmente na frente de colegas, o que pode resultar em desmotivação e baixa percepção de competência

A interação social também modera a relação entre a ansiedade matemática dos pais e o desempenho dos filhos. Pais ansiosos podem, ao participar das atividades matemáticas com seus filhos, transmitir suas próprias crenças e atitudes negativas, o que pode impactar negativamente a aprendizagem e o desempenho matemático dos filhos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo evidencia que a ansiedade matemática, uma forma específica de ansiedade que afeta o desempenho em atividades matemáticas, está profundamente interligada com fatores cognitivos e afetivos. As reações emocionais negativas e as dificuldades cognitivas associadas a essa ansiedade podem ser atribuídas tanto a predisposições genéticas quanto a fatores socioambientais. A ansiedade matemática pode surgir de deficiências em habilidades matemáticas, motivação e interações sociais, sendo influenciada por aspectos como o ambiente escolar e a percepção das interações com professores e colegas. Intervenções direcionadas, que abordem tanto os aspectos emocionais quanto os cognitivos, são essenciais para mitigar os impactos da ansiedade matemática e melhorar o desempenho acadêmico,

REFERÊNCIAS

CAMPOS, Ana Maria Antunes de**. Ansiedade matemática: Fatores cognitivos e afetivos**. Revista Psicopedagogia, v. 39, n. 119, p. 217-228, 2022.

SIMÕES, Inês; SILVA, José Tomás da. **Ansiedade matemática: Uma visão global acerca da sua origem, impacto e possíveis intervenções**. Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación, v. 9, n. 1, p. 19-38, 2022.

Capítulo

09

Discalculia do desenvolvimento: impactos no aprendizado e desenvolvimento das habilidades matemáticas

Joyce Kelly de Jesus Santos

Graduada em Engenharia Mecatrônica e Licenciatura plena em matemática pela Universidade Tiradentes. Especialista no ensino da matemática e física. Lattes: http://lattes.cnpq.br/9793036846395389.

Denise Alves de Oliveira França

Graduada em Psicologia pelo Centro Universitário Unirg. Especialista em psicologia educacional e do trabalho. Lattes: http://lattes.cnpq.br/7933113434880891

RESUMO

Os Transtornos de Aprendizagem, como a Discalculia do Desenvolvimento (DD), afetam habilidades específicas como matemática e escrita, sem impactar a inteligência geral. Crianças com DD enfrentam desafios com conceitos matemáticos e operações aritméticas. Déficits em memória de trabalho e funções executivas agravam essas dificuldades, e fatores comportamentais também influenciam o aprendizado. O objetivo deste estudo é analisar os impactos da Discalculia do Desenvolvimento no processo de aprendizado e no desenvolvimento das habilidades matemáticas em crianças em idade escolar. Para isso, foi adotado o método da revisão de literatura. Portanto, este estudo mostra que a Discalculia do Desenvolvimento (DD) afeta profundamente o aprendizado e o desenvolvimento matemático em crianças, com desafios cognitivos como déficits na memória de trabalho e habilidades visuoespaciais, além de fatores comportamentais. A variedade das dificuldades exige estratégias pedagógicas personalizadas, como atividades lúdicas e apoio visual.

Palavras-chave: aprendizagem; habilidades matemáticas; desafios cognitivos.

INTRODUÇÃO

Os Transtornos de Aprendizagem são caracterizados por dificuldades específicas em habilidades escolares, sem estarem associados a condições como deficiência intelectual, problemas neurológicos, auditivos ou visuais, ou questões emocionais (Ohlweiler, 2016). Essas dificuldades afetam áreas cognitivas específicas, como a escrita ou a aritmética, sem impactar a inteligência globalmente.

Para Bravo (2011), a dificuldade em matemática é muitas vezes relacionada a um transtorno específico de aprendizagem da aritmética

DOI: 10.47573/aya.5379.2.344.9

AYA Editora©

(CID 10 F81.2) ou à Discalculia do Desenvolvimento (DD). Crianças com DD enfrentam desafios como estimar a magnitude de conjuntos, adquirir o conceito de número, realizar operações matemáticas e usar símbolos adequadamente. Estudos indicam que tanto a DAM quanto a DD são condições heterogêneas, sem um déficit cognitivo único que explique todos os casos (Bravo, 2011).

Bravo (2011) aponta que déficits na memória de trabalho e nas funções executivas prejudicam o armazenamento e recuperação de fatos aritméticos. A hipótese de que um déficit executivo está relacionado à dificuldade de aprendizagem matemática ainda precisa de maior investigação, dada a complexidade das funções executivas, que envolvem diversas áreas cerebrais. Esses déficits afetam não apenas a DAM, mas também outros transtornos do desenvolvimento, como Deficiência Mental e Dislexia. Além disso, crianças com TDAH podem ter dificuldades na aprendizagem de matemática devido à incapacidade de manipular mentalmente informações numéricas, mas o TDAH não é considerado um Transtorno de Aprendizagem, embora seja um fator de risco para tais dificuldades.

Por fim, fatores comportamentais, como falta de motivação e autorregulação, também afetam o aprendizado dessas crianças, dificultando sua concentração e controle comportamental em sala de aula.

O objetivo deste estudo é analisar os impactos da Discalculia do Desenvolvimento no processo de aprendizado e no desenvolvimento das habilidades matemáticas em crianças em idade escolar, identificando os principais desafios cognitivos e comportamentais relacionados ao transtorno, bem como as estratégias pedagógicas e terapêuticas mais eficazes para promover o progresso acadêmico desses alunos.

REFERENCIAL TEÓRICO

O Desenvolvimento da Aprendizagem

A aprendizagem escolar é amplamente estudada em diversas áreas acadêmicas, devido à importância de preparar os indivíduos para a vida educacional e profissional em sociedade (Ohlweiler, 2016). A escola desempenha um papel essencial no desenvolvimento das capacidades sociais e intelectuais. No entanto, dificuldades de aprendizagem, que abrangem um conjunto diverso de desordens conhecidas como Transtornos de Aprendizagem, têm sido foco constante de atenção.

Segundo De Carvalho (2009), os Transtornos de Aprendizagem excluem condições como deficiência mental, problemas neurológicos e sensoriais, perturbações emocionais e desajustes ambientais, embora possam coexistir como comorbidades, agravando o quadro. Esses transtornos não comprometem a inteligência geral, mas estão relacionados a disfunções específicas do Sistema Nervoso Central.

Os principais Transtornos de Aprendizagem incluem Dislexia (dificuldade na leitura), Disgrafia (dificuldade na escrita), Discalculia (dificuldade com matemática) e outros transtornos não especificados (Bravo, 2011).

Aprendizagem da Matemática e a Discalculia do Desenvolvimento

A Discalculia do Desenvolvimento (DD) é um transtorno específico e persistente que afeta a aprendizagem da aritmética, presente em cerca de 3% a 6% das crianças em idade escolar. Estudos recentes sugerem que a DD pode ter causas variadas. Uma possibilidade é que seja uma condição neurogenética, ligada a síndromes como Turner, Velocardiofacial e Williams. Outra teoria propõe que a DD seja resultado de múltiplos fatores, incluindo interações complexas entre genética e ambiente (Bravo, 2011).

As principais dificuldades relacionadas à DD incluem problemas em entender o conceito de números, contar, utilizar símbolos numéricos, realizar operações aritméticas e recuperar fatos matemáticos. O diagnóstico da DD é baseado em critérios de inclusão e exclusão, sendo necessário que a criança apresente dificuldades aritméticas sem que haja comprometimentos sensoriais, motores, intelectuais ou emocionais, nem privação educacional.

A DD difere da acalculia, que é uma incapacidade adquirida de realizar cálculos após lesões cerebrais, como traumas cranianos ou doenças neurológicas. Por outro lado, existem dificuldades de aprendizagem matemática (DAM) que se assemelham à DD, mas que não são consideradas transtornos específicos, apresentando apenas uma variação quantitativa no desempenho aritmético (Bravo, 2011).

Tanto a DAM quanto a DD são condições heterogêneas, afetando diferentes áreas cognitivas e cerebrais, como memória verbal, habilidades visuoespaciais e o conceito numérico não simbólico (intuição numérica). Pesquisas indicam que a área do sulco intraparietal está envolvida na representação de magnitude, embora comorbidades e outros fatores comportamentais possam influenciar o quadro.

Bravo (2011) identificou quatro subtipos de DD:

1. **Déficits verbais**: Dificuldade em representar e recuperar fatos aritméticos simbólicos, semelhante à Dislexia, com disfunções no hemisfério esquerdo (Geary, 1993).
2. **Déficits na função executiva**: Envolvem comprometimentos na memória de trabalho e no controle da atenção, muitas vezes associados ao TDAH (Geary, 1993).
3. **Déficits visuoespaciais**: Afetam o alinhamento numérico e a compreensão de conceitos como o valor posicional, essenciais para o cálculo (Dehaene, 1992).
4. **Déficits no conceito de número**: Problemas no senso numérico e na representação analógica de quantidades, observados tanto em crianças quanto em adultos com DD.

Diversas teorias buscam entender como os processos cognitivos ligados ao processamento numérico e à realização de cálculos influenciam a aprendizagem matemática nas crianças.

Discalculia: como Identificar, Diagnóstico e Tratamento

Segundo Fernandes (2024), os primeiros sinais de discalculia podem ser percebidos quando a criança começa a contar intuitivamente e, depois, passa para a contagem biunívoca, onde associa números a objetos. A autora explica que uma criança pode recitar números até vinte, mas, se não for capaz de correlacioná-los com objetos, pode haver um problema. Se a criança não consegue, por exemplo, associar a contagem de objetos ao número correspondente, isso deve ser investigado.

Fernandes (2024) destaca que a matemática também exige um processo de alfabetização, sendo importante analisar qualquer dificuldade que possa indicar um transtorno de aprendizagem. A discalculia, conforme o consenso internacional, pode ser classificada como primária (quando afeta exclusivamente as habilidades matemáticas, algo mais raro) ou secundária, associada a outros transtornos, como dislexia. Ela observa que, embora dislexia e discalculia compartilhem características como memória de curto prazo e uso de símbolos, uma não implica necessariamente a presença da outra.

A discalculia do desenvolvimento pode ser classificada em diferentes graus, dependendo do tipo e da gravidade da dificuldade: desde dificuldade extrema em comparar números e entender direções até graus mais leves, como problemas com números negativos e variáveis algébricas.

Para ajudar crianças com discalculia, Fernandes (2024) sugere atividades lúdicas que envolvam a manipulação de números, como jogos de tabuleiro e esportes que envolvam pontuação. Ela também destaca a importância da Educação Física para trabalhar noções espaciais e numéricas.

Quando se trata de ensinar uma criança com discalculia, é recomendado usar objetos concretos, reforçar conceitos com leitura em voz alta e evitar situações que possam causar constrangimento, como pedir que resolvam exercícios no quadro. A criança deve ser incentivada a procurar seus próprios erros e corrigir o raciocínio. Elogiar os acertos e permitir que o aluno trabalhe no próprio ritmo também é fundamental para desenvolver autoconfiança.

O diagnóstico da discalculia deve ser feito por um médico, mas uma análise conjunta de profissionais é ideal. A condição é descrita nos manuais médicos como um transtorno específico de aprendizagem, e o tratamento envolve o desenvolvimento de modelos mentais que ajudem a criança a relacionar números com o espaço e o tempo, com o auxílio de um psicólogo ou pedagogo especializado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo revela que a Discalculia do Desenvolvimento (DD) impacta significativamente o aprendizado e o desenvolvimento das habilidades matemáticas em crianças. Os desafios relacionados à DD abrangem dificuldades cognitivas específicas, como déficits na memória de trabalho, habilidades visuoespaciais e a compreensão do conceito de número, além de fatores comportamentais que afetam o desempenho escolar.

A diversidade das manifestações da DD, desde dificuldades extremas com cálculos simples até problemas mais leves com conceitos abstratos, reforça a necessidade de estratégias pedagógicas personalizadas. Intervenções que utilizam atividades lúdicas, apoio visual e práticas pedagógicas voltadas para a promoção da autoconfiança são fundamentais para minimizar os impactos da DD.

O diagnóstico precoce e o tratamento multidisciplinar, envolvendo professores, psicólogos e outros especialistas, são cruciais para oferecer o suporte adequado às crianças afetadas, possibilitando-lhes uma evolução acadêmica mais eficiente e inclusiva. Assim, o entendimento aprofundado dos mecanismos cognitivos e comportamentais envolvidos na DD contribui para o desenvolvimento de estratégias educacionais mais eficazes, favorecendo o progresso dessas crianças em ambiente escolar.

REFERÊNCIAS

OHLWEILER, Lygia. Introdução aos transtornos da aprendizagem. **Transtornos da aprendizagem: abordagem neurobiológica e multidisciplinar**, v. 2, p. 107-111, 2016.

BRAVO, Riviane Borghesi. **Contribuição dos sintomas do transtorno de déficit de tenção/ hiperatividade para as dificuldades de aprendizagem da aritmética**. 2011. Dissertação (Mestrado em ciências da saúde). Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2011.

DE CARVALHO, Maria Imaculada Merlin. **Avaliação neurológica em escolares com dislexia do desenvolvimento**. 2009. Tese de Doutorado. Dissertação (Mestrado em ciências médicas). Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2009.

FERNANDES, Fernanda. **O que é discalculia?** Multirio. Publicado em: 09 ago. 2019. Disponível em: https://multirio.rio.rj.gov.br/index.php/reportagens/15156-o-que-%C3%A9-discalculia#:~:text=A%20discalculia%2C%20ou%20discalculia%20do,adquirir%20e%20desenvolver%20habilidades%20matem%C3%A1ticas. Acesso em: 09 set. 2024.

Capítulo

10

A contribuição da psicologia na educação matemática: um olhar cognitivo e afetivo no ensino e aprendizagem

Joyce Kelly de Jesus Santos

Graduada em Engenharia Mecatrônica e Licenciatura plena em matemática pela Universidade Tiradentes. Especialista no ensino da matemática e física. Lattes: http://lattes.cnpq.br/9793036846395389.

Denise Alves de Oliveira França

Graduada em Psicologia pelo Centro Universitário Unirg. Especialista em psicologia educacional e do trabalho. Lattes: http://lattes.cnpq.br/7933113434880891

RESUMO

A matemática é frequentemente vista como uma disciplina desafiadora, com dificuldades que envolvem não apenas aspectos cognitivos, mas também emocionais, como motivação e autoconfiança. A psicologia educacional, por meio de teorias como o construtivismo e o cognitivismo, oferece ferramentas valiosas para aprimorar o ensino da matemática, integrando o desenvolvimento cognitivo e afetivo dos alunos. Esta pesquisa investiga como esses princípios podem ser aplicados de forma eficaz nas escolas brasileiras, com o objetivo de melhorar o desempenho acadêmico e facilitar a retenção e transposição do conhecimento matemático. A pesquisa utilizará uma revisão bibliográfica com abordagem qualitativa.

Palavras-chave: psicologia; educação matemática; aprendizagem cognitiva.

INTRODUÇÃO

A matemática é frequentemente vista como uma disciplina desafiadora por muitos estudantes, gerando dificuldades que vão além das questões cognitivas e envolvem também fatores emocionais. Diversos estudos destacam que, além das habilidades intelectuais, o sucesso na aprendizagem matemática está fortemente relacionado a aspectos afetivos, como motivação, autoconfiança e superação de bloqueios cognitivos. Nesse contexto, a psicologia educacional, com suas diversas teorias e abordagens, oferece ferramentas valiosas para aprimorar o ensino e a aprendizagem da matemática nas escolas.

Assim, a problemática levantada para a presente pesquisa foi a seguinte: Como os princípios da psicologia educacional, especialmente em relação ao desenvolvimento cognitivo e afetivo dos alunos, podem

AYA Editora©

ser aplicados de maneira eficaz para aprimorar o ensino-aprendizagem da matemática nas escolas brasileiras?

A aplicação de teorias psicológicas, como o construtivismo piagetiano e o cognitivismo anglo-saxônico, no ensino de matemática tem o potencial de melhorar significativamente o desempenho acadêmico dos alunos. Essas abordagens não apenas consideram o desenvolvimento cognitivo, mas também integram fatores afetivos, como a motivação e a autoconfiança, que são cruciais para superar bloqueios cognitivos e aprimorar a capacidade de resolver problemas. O uso de metodologias que respeitam o desenvolvimento psicogenético dos conceitos matemáticos facilita a retenção de conhecimento e sua transposição para novas situações.

O ensino da matemática é comumente percebido como uma área desafiadora para muitos estudantes. Estudos revelam a importância dos fatores cognitivos e emocionais no processo de aprendizagem. No entanto, no Brasil, a psicologia da educação matemática ainda é uma área emergente, carecendo de maior investigação e de uma colaboração mais estreita entre psicólogos, pedagogos e matemáticos. Esta pesquisa justifica-se pela necessidade de compreender melhor como o desenvolvimento psicológico dos alunos pode ser incorporado no planejamento de aulas e estratégias pedagógicas, visando não apenas a melhoria do desempenho acadêmico, mas também o desenvolvimento de habilidades cognitivas e emocionais essenciais.

O objetivo desta pesquisa é investigar como os aspectos psicológicos, cognitivos e afetivos influenciam o processo de ensino e aprendizagem da matemática, além de identificar quais teorias psicológicas são mais eficazes na construção de abordagens pedagógicas voltadas para a melhoria do desempenho dos alunos. A pesquisa será conduzida por meio de uma revisão bibliográfica, utilizando uma abordagem qualitativa para explorar e integrar as contribuições da psicologia educacional no ensino da matemática.

PSICOLOGIA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Referências à psicologia da educação matemática ainda causam estranheza em muitas pessoas hoje em dia. Muitos questionam a razão de existir dessa área e a veem como mais um modismo na formação de professores de matemática. No entanto, a psicologia da educação matemática é reconhecida internacionalmente há décadas como um campo de estudo interdisciplinar que se concentra nos processos psicológicos, cognitivos e afetivos-sociais envolvidos no ensino e na aprendizagem da matemática. É a área de interseção entre a psicologia, a educação e a matemática (Moro, 2002).

A psicologia da educação matemática se originou de raízes científicas importantes, como a psicologia do desenvolvimento, a psicologia da aprendizagem, a psicologia educacional e a didática das matemáticas. Desde a primeira metade do século XX, houve avanços significativos no desenvolvimento cognitivo individual, no processo de aprendizagem de conceitos e princípios, e na importância da aprendizagem escolar no desenvolvimento das funções mentais superiores.

A psicologia educacional tem como objeto de estudo o processo ensino-aprendizagem, especialmente na escola, e sua transformação como disciplina de formação de professores. Ela considera três aspectos inter-relacionados do ensinar/aprender: o aluno e seu processo de elaboração dos conhecimentos, o professor e sua forma de ensinar, e o conteúdo a ser aprendido (Moro, 2002).

A didática das matemáticas, por sua vez, fortaleceu a necessidade de pesquisas na psicologia da educação matemática ao demonstrar como as peculiaridades psicogenéticas dos conceitos matemáticos afetam o processo de ensino-aprendizagem. A criação desse movimento, principalmente na França, contribuiu para a consolidação da psicologia educacional transformada, que se alinhava com as tendências anglo-saxônicas.

As principais correntes teóricas inspiradoras da psicologia da educação matemática são o construtivismo piagetiano, o cognitivismo anglo-saxônico e a escola russa. Através dessas abordagens, são investigados temas como a psicogênese dos conceitos matemáticos, a solução de problemas, as habilidades matemáticas básicas, e o papel dos contextos sociais e culturais nas aprendizagens matemáticas.

No Brasil, a produção em psicologia da educação matemática tem acompanhado a internacional em qualidade e quantidade, embora alguns a considerem incipiente devido ao número restrito de grupos de pesquisa específicos. No entanto, há uma necessidade de maior integração entre pedagogos, psicólogos e matemáticos para aproveitar o conhecimento produzido nessa área e aprimorar o ensino e a aprendizagem matemática (Moro, 2002).

CONTRIBUIÇÃO DA PSICOLOGIA PARA A MATEMÁTICA

Desde sua origem, a psicologia tem explorado tópicos como a maturação, desenvolvimento, aprendizado, ensino e solução de problemas, independentemente da sua orientação teórica. Há uma vasta quantidade de estudos que examinam estas diferenças. Embora não haja um consenso absoluto sobre as definições e processos envolvidos, é possível identificar uma série de elementos comuns que são geralmente aceitos (Brito, 2011).

É necessário ressaltar o valor na distinção entre as teorias implícitas e explícitas. Para simplificar, a primeira se refere ao conhecimento que um indivíduo possui sobre um tema específico, enquanto a segunda baseia-se em evidências que requerem comprovação e aceitação. Se questionássemos várias pessoas sobre o que entendem por aprendizagem, elas responderiam com base em suas próprias vivências. No entanto, isso não necessariamente reflete a resposta reconhecida pela ciência psicológica ou que expressa o significado estabelecido e aceito pelos pesquisadores na área. No campo da psicologia da educação matemática, muitas vezes as definições estão mais alinhadas às teorias implícitas do que às explícitas, requerendo dos pesquisadores cautela ao tratar esses conceitos (Falcão, 2002).

Maturação refere-se a um aumento na capacidade dos indivíduos, que ocorre independentemente de experiências de aprendizagem específicas. Esses eventos podem ser atribuídos a experiências casuais e/ou influências genéticas que impactam a neuroanatomia e a neurofisiologia do comportamento, percepção, memória, e assim por diante (Brito, 2011).

Termos como aprendizagem, desenvolvimento e aquisição de habilidades, importantes para entender situações escolares, apresentam discrepâncias entre diferentes autores. No entanto, quando se trata de aprendizagem, os autores concordam que ela: (a) indica a emergência de algo novo (habilidade, função ou nível), implicando em mudança; (b) engloba procedimentos contínuos e descontínuos; (c) pressupõe uma direção (Brito, 2011).

A aprendizagem é um processo que envolve aspectos cognitivos, afetivos e motores que podem ser deduzidos a partir de modificações relativamente permanentes no comportamento, decorrentes da prática. Essas alterações, entretanto, não devem ser confundidas com mudanças causadas pela maturação biológica ou pela ação de fatores externos como drogas e cansaço.

O modo pelo qual a aprendizagem ocorre (o “momento” em que o indivíduo aprende algo) varia da forma como ele irá integrar esses novos conhecimentos, o que pode resultar em maior ou menor retenção do material aprendido e em maior ou menor transposição do aprendizado para novas situações e usos futuros. Portanto, ‘tipo de aprendizagem’ refere-se aos mecanismos requeridos e disponibilizados por diferentes situações e “formas de aprendizagem” (mecânica e significativa); também refere-se ao modo como os novos elementos aprendidos são mantidos na estrutura cognitiva. Isso implica que, dependendo do que será aprendido, diferentes mecanismos de aprendizagem serão acionados e, dependendo da situação em que a aprendizagem ocorre, o objeto a ser aprendido será processado de maneira diferente, além de ser incorporado e retido na estrutura cognitiva de formas distintas. Aqui, “situação de aprendizagem” deve ser entendida como todos os componentes externos e internos ao aprendiz, em especial as experiências passadas (Brito, 2011).

Além disso, deve-se considerar que existem diferentes tipos de aprendizagem e que nem todas as coisas são aprendidas da mesma maneira. Memorizar um poema é diferente de aprender um algoritmo e ser capaz de aplicar esse algoritmo a problemas semelhantes, transferindo assim a aprendizagem de uma situação para outra.

Podemos considerar que existem os seguintes tipos de aprendizagem que serão disponibilizados de acordo com a tarefa e o material apresentado: aprendizagem de sinais (maioria das reações fisiológicas); aprendizagem de estímulo – resposta; aprendizagem de cadeias motoras e verbais; aprendizagem de discriminações e generalizações; aprendizagem de conceitos e aprendizagem de princípios (Brito, 2011).

A solução de problemas não é considerada um tipo de aprendizagem, mas sim a reorganização dos conceitos e princípios na estrutura cognitiva. Além dos tipos de aprendizagem, Brito (2011) propôs a divisão em domínios de aprendizagem que seriam os seguintes: 1. habilidades motoras; 2. informação verbal; 3. habilidades intelectuais; 4. estratégias cognitivas; e, 5. atitudes. É nessa linha que nossas pesquisas foram e são conduzidas, seguindo principalmente os princípios de ensino centrados no aluno, indicando as diretrizes que os professores deveriam seguir em relação à psicologia.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa sobre a aplicação dos princípios da psicologia educacional no ensino da matemática revela a importância de integrar aspectos cognitivos e afetivos no processo de aprendizagem. Abordagens baseadas em teorias como o construtivismo piagetiano e o cognitivismo anglo-saxônico têm o potencial de melhorar significativamente o desempenho acadêmico dos alunos, ao considerarem não apenas o desenvolvimento intelectual, mas também fatores emocionais como motivação e autoconfiança.

No contexto brasileiro, a psicologia da educação matemática ainda é um campo emergente que requer maior atenção e colaboração entre psicólogos, pedagogos e matemáticos. A incorporação de estratégias pedagógicas que respeitem o desenvolvimento psicogenético dos alunos pode promover não apenas uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos, mas também sua aplicação em novas situações. Dessa forma, a psicologia educacional se mostra uma ferramenta indispensável para enfrentar os desafios no ensino de matemática e para promover o desenvolvimento integral dos alunos, tanto em termos cognitivos quanto emocionais.

Portanto, a continuidade das investigações nessa área é essencial para consolidar uma prática educacional mais eficaz, que compreenda as múltiplas dimensões envolvidas no processo de ensino-aprendizagem da matemática.

REFERÊNCIAS

BRITO, Márcia Regina Ferreira de. **Psicologia da educação matemática: um ponto de vista**. Educar em Revista, n. número especial, p. 29-45, 2011.

FALCÃO, Jorge Tarcísio da Rocha. **Psicologia e educação matemática**. Educação em revista, n. 36, p. 205-221, 2002.

MORO, Maria Lucia Faria. **Psicologia da educação matemática: por quê?** Para quê. Encontro Paranaense de Educação Matemática, v. 12, 2002.

Capítulo

11

Números inteiros: dificuldades e importância

Marcílio Gonçalves da Silva

Discente do curso Matemática

RESUMO

O presente trabalho aborda a importância e as dificuldades relacionadas aos números inteiros, um conceito fundamental da matemática, destacando sua relevância em diversos contextos da vida cotidiana. O objetivo principal é analisar as dificuldades encontradas pelos estudantes no entendimento e na aplicação dos números inteiros, além de apresentar estratégias e materiais que possam auxiliar no processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo. A pesquisa realizada baseou-se em uma abordagem bibliográfica, com revisão da literatura existente sobre o tema, buscando identificar as principais dificuldades enfrentadas pelos alunos e as melhores práticas de ensino adotadas por educadores. Ao longo do estudo, foram identificadas diversas dificuldades enfrentadas pelos alunos no processo de compreensão dos números inteiros, incluindo a falta de familiaridade com os conceitos básicos, a dificuldade em relacionar esses números com situações do cotidiano e a confusão na aplicação das operações matemáticas. Além disso, foi observado que muitos alunos apresentam resistência ao aprendizado desse conteúdo, associando-o a uma matéria difícil e pouco relevante para suas vidas. Para auxiliar os educadores na abordagem dos números inteiros em sala de aula, foram apresentadas diversas estratégias e materiais didáticos, incluindo o uso de jogos matemáticos, o emprego de material concreto e a exploração de situações-problema que estimulem o raciocínio lógico dos alunos. Essas abordagens visam tornar o ensino mais dinâmico e atrativo, possibilitando uma melhor assimilação dos conceitos por parte dos estudantes. Por fim, concluiu-se que o ensino dos números inteiros requer uma abordagem pedagógica diferenciada, que leve em consideração as dificuldades específicas dos alunos e busque formas criativas e inovadoras de transmitir o conhecimento. A utilização de estratégias diversificadas e materiais didáticos adequados pode contribuir significativamente para o sucesso no aprendizado desse conteúdo, tornando-o mais acessível e compreensível para os estudantes. Espera-se que este trabalho possa fornecer subsídios importantes para educadores que buscam aprimorar sua prática pedagógica e facilitar o processo de ensino e aprendizagem dos números inteiros.

Palavras-chave: números inteiros; dificuldades; estratégias; ensino; aprendizagem.

DOI: 10.47573/aya.5379.2.344.11

ABSTRACT

This paper addresses the importance and difficulties related to integers, a fundamental concept in mathematics, highlighting its relevance in various contexts of daily life. The main objective is to analyze the difficulties encountered by students in understanding and applying integers, as well as to present strategies and materials that can assist in the teaching and learning process of this content. The research was based on a bibliographic approach, with a review of existing literature on the subject, seeking to identify the main difficulties faced by students and the best teaching practices adopted by educators. Throughout the study, several difficulties were identified in the process of understanding integers by students, including a lack of familiarity with basic concepts, difficulty in relating these numbers to everyday situations, and confusion in the application of mathematical operations. Additionally, it was observed that many students show resistance to learning this content, associating it with a difficult subject and of little relevance to their lives. To assist educators in addressing integers in the classroom, various strategies and didactic materials were presented, including the use of mathematical games, the use of concrete materials, and the exploration of problem-solving situations that stimulate students' logical reasoning. These approaches aim to make teaching more dynamic and attractive, enabling a better assimilation of concepts by students. Finally, it was concluded that the teaching of integers requires a differentiated pedagogical approach, taking into account the specific difficulties of students and seeking creative and innovative ways to transmit knowledge. The use of diversified strategies and appropriate didactic materials can significantly contribute to the success in learning this content, making it more accessible and understandable for students. It is hoped that this work can provide important support for educators seeking to improve their pedagogical practice and facilitate the teaching and learning process of integers.

Keywords: integers; difficulties; strategies; teaching; learning.

INTRODUÇÃO

O presente Trabalho de Conclusão de Curso aborda a importância e as dificuldades relacionadas aos números inteiros, um tema de relevância no contexto da matemática educacional. A escolha deste tema foi motivada pela necessidade de compreender melhor os obstáculos enfrentados pelos alunos no processo de aprendizagem dos números inteiros e buscar estratégias para superá-los.

A relevância deste estudo reside na importância dos números inteiros como base para o desenvolvimento de competências matemáticas essenciais e na sua aplicação em diversos contextos da vida cotidiana. Compreender as dificuldades enfrentadas pelos alunos neste tema é fundamental para aprimorar as práticas educacionais e promover uma aprendizagem mais eficaz e significativa.

O problema de pesquisa aborda as dificuldades encontradas pelos alunos no entendimento e na aplicação dos números inteiros. Pretende-se responder a questões como: quais são as principais dificuldades enfrentadas pelos alunos ao aprender números inteiros? Como essas dificuldades impactam seu desempenho acadêmico? Quais estratégias e materiais podem auxiliar no ensino e aprendizagem desse conteúdo?

Os objetivos deste trabalho são: (1) Analisar as dificuldades encontradas pelos estudantes no entendimento e na aplicação dos números inteiros; (2) Apresentar estratégias e materiais que possam auxiliar no processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo. Cada objetivo resultará na criação de um capítulo específico do trabalho.

A metodologia utilizada neste estudo baseou-se em uma abordagem bibliográfica, com revisão da literatura existente sobre o tema. Foram consultados diversos autores e pesquisas relacionadas aos números inteiros, suas dificuldades de aprendizagem e estratégias de ensino. A análise e síntese desses materiais permitiram identificar as principais questões a serem abordadas no trabalho e fundamentar as recomendações apresentadas.

MATEMÁTICA COM OS NÚMEROS INTEIROS

A matemática desempenha um papel fundamental em nossas vidas, permeando diversas atividades do cotidiano. No entanto, um ramo específico desse campo, conhecido como números inteiros, muitas vezes apresenta desafios significativos para estudantes e profissionais da área. Nesta breve introdução, vamos explorar a importância da matemática, em particular dos números inteiros, destacando sua relevância em diferentes contextos e sua presença em situações do dia a dia. Abordaremos também a história dos números inteiros, as dificuldades encontradas em sua aplicação e o material que pode ser utilizado para facilitar o entendimento e a prática desse conceito. Ao final, esperamos oferecer uma visão mais clara e abrangente sobre esse tema tão importante e frequentemente desafiador.

Números Inteiros: Breve Histórico

É amplamente reconhecido que os números inteiros desempenham um papel fundamental no cotidiano das pessoas. Eles estão presentes em várias situações, como transações bancárias, previsões meteorológicas e outras áreas da vida moderna (Souza *et al.,* 2014, p. 01).

No entanto, os números inteiros têm uma história que remonta a milhares de anos atrás. De acordo com IFRAH (1985), essa prática surgiu da necessidade de organizar a produção de alimentos e a criação de animais pelas antigas civilizações. Os povos primitivos utilizavam pequenas lascas de pedras, ossos ou gravetos como sinais para identificar objetos ou animais de sua propriedade. Essa prática se desenvolveu ao longo do tempo, e algumas das principais civilizações antigas que se destacaram nesse processo foram o Egito, a Babilônia e a Suméria.

Ao final do dia, os povos primitivos podiam verificar a quantidade de animais que possuíam, garantindo que ninguém havia se apropriado indevidamente de sua propriedade. Esse processo marcou o início de uma evolução na arte de contar. Com o surgimento das feiras, houve uma maior necessidade de organizar as trocas e vendas de mercadorias. Na Baixa Idade Média, período de grandes transformações econômicas e sociais na Europa, o uso dos números positivos e negativos tornou-se ainda mais frequente devido ao crescimento do comércio em grande escala.

A organização da produção levou ao surgimento de registros de estoque, incluindo itens disponíveis e faltantes, o que contribuiu para o uso de números negativos para representar a ideia de ganho e perda. Essa nova matemática permitiu aos matemáticos não apenas indicar quantidades, mas também representar lucros ou prejuízos através de números com sinais positivos ou negativos (Souza *et al.,* 2014, p. 04).

Nesse contexto, os números inteiros surgiram para facilitar a compreensão de quantidades negativas. Inicialmente, foram introduzidos os inteiros positivos e, posteriormente, os inteiros negativos. À medida que o comércio e as ciências se desenvolviam, surgia a necessidade de explicações mais racionais, especialmente para justificar fenômenos naturais. Astronomia e física foram áreas-chave para essas descobertas.

Conforme os séculos passavam e o conhecimento humano evoluía, surgiu a necessidade de compreender e utilizar outros sinais. Foi nesse contexto que os números naturais e, posteriormente, os inteiros, foram desenvolvidos e incorporados às práticas matemáticas. No século XIX, os inteiros foram compreendidos como uma extensão dos números naturais, incorporando muitas das regras da aritmética (Grymuza, 2010, p. 18).

Diophantus, no século III, percebeu que as equações de segundo grau poderiam ter raízes negativas, embora na época essas raízes fossem descartadas. Na Índia, no século VII, já se tinha o conceito de crédito e débito, e os povos dessa região distinguiam facilmente entre quantidades positivas e negativas. Durante o Renascimento, poucos algebristas compreendiam plenamente o conceito de quantidades negativas.

Apesar dos avanços, os métodos matemáticos ainda enfrentam desafios significativos, que têm acompanhado sua história e ainda persistem, causando certa apatia em relação aos conteúdos aplicados em sala de aula. Em primeiro lugar, a matemática envolve raciocínio, e como tal, nem todos os alunos têm a mesma habilidade para assimilar rapidamente o que é solicitado nas questões, dada sua natureza cognitiva. Em segundo lugar, os métodos de ensino-aprendizagem nem sempre são dinâmicos e não refletem a realidade encontrada pelos alunos. Isso cria uma lacuna entre o corpo discente e a matemática, seus conteúdos e questionamentos.

É importante reconhecer que os conteúdos matemáticos nunca estiveram isolados. Eles têm acompanhado a história de diversas civilizações, provocando mudanças em questões econômicas, sociais, políticas e culturais. Ao longo desse processo, outras áreas do conhecimento foram integradas aos conteúdos matemáticos, promovendo interações, críticas, brincadeiras, jogos, informações e explorações geográficas para justificar aspectos como altitude e longitude, e, sobretudo, incorporando tecnologias emergentes.

Números Inteiros

O conjunto dos números naturais, embora fundamental, é expandido para incluir os números negativos, formando o conjunto dos números inteiros. A construção desse conjunto requer a aplicação do axioma do emparelhamento, que permite definir o produto cartesiano de dois conjuntos, resultando no conjunto de pares ordenados (Costa, 2009).

Antes de prosseguir, é necessário introduzir o conceito de relação binária sobre um conjunto. Essa relação compara dois elementos e determina se estão relacionados, como é o caso da relação de ordem e igualdade para números naturais (Silva, 2003). Na teoria dos conjuntos, uma relação binária é representada como um subconjunto do produto cartesiano do conjunto consigo mesmo (Ferreira, 2011).

A relação binária é crucial para estabelecer uma relação de equivalência, possuindo propriedades como reflexividade, simetria e transitividade (Costa, 2009). Essa relação de equivalência permite a formação de classes de equivalência, agrupando elementos equivalentes. O conjunto de todas essas classes constitui o espaço quociente (Pommer, 2012).

As classes de equivalência geradas pela relação binária correspondem aos números inteiros, representados pelo conjunto $\mathbb{Z}$. Notavelmente, quando o primeiro elemento de um par é maior que o segundo, a classe de equivalência se relaciona com o número natural igual à diferença entre ambos. A partir dessa construção, as operações de ordem, adição e multiplicação para números inteiros podem ser definidas (Pasquini, 2007).

É relevante, antes de discutir as operações com números inteiros, revisar os elementos que compõem esse conjunto. O conjunto $\mathbb{Z}$ inclui todos os números positivos, negativos e o zero, sendo expresso como Z = {… -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...} (Maier, 1995).

As operações envolvendo números inteiros estão associadas a soma, subtração, divisão e multiplicação. Nestas operações, o sinal dos números desempenha um papel significativo (Milies; Coelho, 2001).

Na adição de números inteiros, as parcelas são somadas, e a regra do sinal determina o resultado. Sinais iguais resultam em um sinal positivo, enquanto sinais diferentes resultam em um sinal negativo. A multiplicação e a divisão também seguem regras específicas para sinais, onde sinais iguais resultam em um sinal positivo e sinais diferentes em um sinal negativo (Maier, 1995).

A regra geral para a multiplicação e a divisão é que, se ambos os números têm o mesmo sinal, o resultado é positivo, e se têm sinais diferentes, o resultado é negativo (Maier, 1995). Essas operações fundamentais estabelecem as bases para as manipulações matemáticas no conjunto dos números inteiros.

Dificuldades de Aplicação com Números Inteiros

É amplamente reconhecido que os professores enfrentam diversos desafios ao lidar com os alunos em sala de aula, muitos dos quais originados de problemas familiares, falta de estímulo e até mesmo apatia em relação à matemática. O estigma do medo associado a essa disciplina é histórico e notório, dificultando o processo de aprendizagem. Entre os desafios inerentes à realidade do aluno, destacam-se os obstáculos de natureza epistemológica, considerados inevitáveis por alguns matemáticos devido à sua presença na história e essência humana. No entanto, compreender esses obstáculos é fundamental para facilitar a assimilação do conteúdo pelo aluno.

Quando chegam à escola, os alunos trazem consigo conhecimentos adquiridos em seu ambiente familiar e social, muitas vezes diferentes daqueles oferecidos pelo ambiente escolar. Essas diferenças podem gerar conflitos de conceitos e dificultar a compreensão do conteúdo. Além disso, há um estereótipo enraizado de que os conteúdos matemáticos são intrinsecamente difíceis de compreender, o que pode levar à desmotivação e ao recurso a práticas inadequadas, como a cópia de respostas ou a dependência de atividades em grupo para obter notas satisfatórias.

Frequentemente, as atividades em grupo são sugeridas por alunos que têm desempenho acadêmico abaixo da média, na esperança de que alguém com habilidades matemáticas possa beneficiá-los ao final do trabalho. Muitos alunos param por aí, perpetuando um ciclo vicioso em que o estímulo para aprender vai se enfraquecendo. Essas dificuldades persistem ao longo do tempo, deixando de explorar um dos fundamentos essenciais das ciências exatas e gerando preocupação para quem ensina e desinteresse para quem aprende.

A falta de uma compreensão sistemática das regras e cálculos numéricos, combinada com a inexperiência em lidar com diversos tipos de problemas matemáticos, pode ser considerada um obstáculo ao ensino da Matemática. Além disso, embora os alunos tenham conhecimento das quatro operações básicas, muitas vezes não conseguem relacionar adequadamente a questão com a operação matemática correspondente ou agrupar corretamente os números, o que sugere um baixo nível de interpretação.

Concordo com a ideia de Machado (2010) de que os obstáculos enfrentados com os números inteiros positivos e negativos variam de acordo com a realidade cultural de cada aluno, visto que nem todos têm as mesmas características de entendimento ou vivem no mesmo contexto. A diversidade regional e o contexto social de cada aluno podem explicar melhor essas dificuldades no entendimento dos números inteiros.

No 9° ano do ensino fundamental, é comum observar dificuldades em trabalhar com números inteiros, especialmente na identificação e compreensão da distinção entre números positivos e negativos. Essas dificuldades estão intrinsecamente ligadas à dificuldade em aprender as quatro operações básicas da matemática: adição, subtração, multiplicação e divisão. Essas barreiras comprometem a compreensão geral do conteúdo, tornando desafiador ordenar expressões e resolver problemas, o que afeta negativamente o processo de ensino e aprendizagem.

Ao iniciar um novo ano letivo, os professores geralmente têm a expectativa de que os alunos, após cursarem séries anteriores, tenham adquirido um entendimento sólido sobre números inteiros, o que facilitaria seu progresso nas séries seguintes. No entanto, a realidade que encontram em sala de aula é frequentemente diferente e desafiadora. Os problemas enfrentados pelos alunos parecem persistir e até mesmo se intensificar, especialmente quando se trata de expressões com números negativos, onde a confusão no uso dos sinais é evidente. Muitos alunos não dominam a regra básica de troca de sinais, o que dificulta sua capacidade de resolver tais questões.

Além disso, a falta de habilidade de leitura e interpretação é um obstáculo significativo. Muitos alunos têm dificuldade em compreender os enunciados das questões, o que os impede de aplicar o raciocínio necessário para resolvê-las. Quando se deparam com problemas que exigem reflexão e interpretação de textos, é comum ouvir reclamações sobre o tamanho do texto e a complexidade da linguagem.

Diante dessas dificuldades enfrentadas em sala de aula, decidi embasar teoricamente minha pesquisa sobre o perfil dos alunos e suas percepções em relação ao entendimento e aplicação de números inteiros, focando especialmente nas turmas do 9º ano do ensino fundamental de duas escolas públicas estaduais. Através da prática de exercícios avaliativos específicos sobre o tema, buscarei compreender as dificuldades enfrentadas, a percepção dos alunos e seu domínio dos conceitos matemáticos e regras de sinais.

O Material para a Aplicação dos Números Inteiros

Espera-se que o professor atue como um guia capaz de enfrentar os desafios relacionados à disciplina e sua prática educacional. Nesse sentido, é fundamental entender a história e a evolução desse componente curricular ao longo do tempo. O uso de materiais concretos surge como uma alternativa valiosa para aprimorar a compreensão dos conteúdos matemáticos em sala de aula.

Nessa perspectiva, compartilhamos da visão de Morgado (1993, citado por Coelho, 2005, p. 29), que defende que o professor deve estar ciente de que a compreensão oral dos problemas deve preceder a aprendizagem da simbologia escrita. Para isso, é fundamental utilizar materiais concretos sempre que necessário, a fim de facilitar o processo de compreensão por parte dos alunos.

Nesse contexto, a utilização de materiais concretos no ensino desse conteúdo proporciona ao professor meios de diagnosticar as habilidades cognitivas dos alunos em relação aos números positivos e negativos. Essa abordagem, inserida no contexto formal de ensino, oferece noções que fundamentam melhor essa compreensão.

Segundo a interpretação de Castelnuovo (1970, p.82-91), o uso do material concreto deve ter uma dupla finalidade: exercitar as faculdades sintéticas e analíticas da criança. Sintética, no sentido de permitir que o aluno construa o conceito a partir do concreto; e analítica, pois nesse processo a criança deve discernir no objeto aqueles elementos que constituem a globalização. Para isso, o objeto deve ser móvel, capaz de sofrer transformações, de modo que a criança possa identificar a operação subjacente.

Exemplificando essa abordagem, podemos citar o uso do ábaco, que possibilita uma visualização clara das partes positivas e negativas desses elementos. Através dele, o professor pode explorar operações como adição e subtração, a obtenção dos zeros, aspectos que nem sempre são fáceis para os alunos compreenderem, contribuindo assim para sistematizar suas observações e conclusões.

Os jogos matemáticos também desempenham um papel importante no desenvolvimento cognitivo dos alunos, estimulando o raciocínio lógico, a interação em sala de aula e as habilidades psicomotoras. Quando confrontados com desafios propostos pelo jogo, os alunos mobilizam todo o seu potencial para alcançar os objetivos estabelecidos. No entanto, é crucial que o uso de jogos em sala de aula seja planejado cuidadosamente, levando em consideração os objetivos didáticos específicos, a fim de evitar o mau uso desse recurso.

O jogo didático serve como uma ferramenta para fixar ou treinar a aprendizagem. Ele é uma variedade de exercício que intrinsecamente motiva os alunos devido ao seu caráter lúdico. Ao final do jogo, a criança deve ter praticado e aprimorado algumas noções, contribuindo para a melhoria de sua aprendizagem (Albuquerque, 1953, p. 33).

Ao incorporar jogos como um recurso didático, o professor tem a oportunidade de observar as dificuldades dos alunos em relação à interação em sala de aula, à linguagem oral e escrita, e ao raciocínio lógico. Ao planejar uma aula que inclui jogos matemáticos, é necessário analisar a eficácia educativa dos diferentes tipos de jogos e como eles se relacionam com o currículo.

Por exemplo, ao utilizar o jogo "Boliche dos Inteiros" para introduzir o conceito de números inteiros, observamos a compreensão dos alunos sobre esses conceitos. Ao somar e subtrair os pinos que representam números inteiros, os alunos precisam entender a existência da parte negativa e as regras de adição e subtração. Esse método enriquece os conceitos anteriores, incentivando os alunos a construir conhecimento matemático por meio de atividades lúdicas e a desenvolver estratégias para resolver problemas relacionados ao conteúdo.

Outra sugestão é o jogo "Termômetro Maluco", que explora o conceito de números inteiros e pode ser usado para introduzir as operações de adição e subtração nesse campo numérico. O registro das operações permite que os alunos estabeleçam conexões entre os movimentos das peças e a linguagem simbólica matemática.

Diante das dificuldades enfrentadas em sala de aula, tanto pelo professor quanto pelos alunos, buscamos fundamentar teoricamente o perfil do professor no ensino da matemática, considerando a percepção dos alunos do 9º ano sobre o conteúdo de números inteiros. Integrando teoria e prática, nosso objetivo é explorar novas estratégias para abordar esse conteúdo, percebendo o papel do educador como um facilitador na sistematização de ideias e na promoção do aprendizado matemático.

Números Negativos e as Dificuldades

Caraça (1950) discute a importância de considerar grandezas em dois sentidos opostos, especialmente usando a contagem de anos na história da humanidade como referência. É essencial usar referências que possam auxiliar na compreensão do aluno. Por exemplo, para construir a linha do tempo, a humanidade usou o nascimento de Cristo como ponto de referência e começou a contar o tempo em ambas as direções opostas.

Assim, os eventos históricos começaram a ser marcados no tempo a partir de uma origem fixa. Por exemplo: "Sócrates morreu em 399 a.C., Galileu nasceu em 1564 d.C. Referimo-nos a dois eventos perfeitamente localizados ao longo do tempo, dois eventos que estão separados por 1962 anos" (Caraça, 1950, p. 95).

O uso da reta numérica para localizar pontos é crucial desde que haja orientação. Se um ponto móvel estiver na origem e se deslocar uma unidade de comprimento a cada segundo, após 3 segundos, o ponto terá percorrido 3 unidades de comprimento. No entanto, essa indicação não dirá precisamente onde o objeto parou, se no ponto - 3 ou no ponto 3. Caraça (1950) nos diz que se adicionarmos a esse número 3 um sentido indicativo de movimento, saberemos exatamente onde o objeto parou.

Se um objeto se desloca da origem (ponto 0), mantendo uma velocidade constante, percorre uma unidade de comprimento a cada segundo por 3 segundos para a direita da reta. Em seguida, ele para e, durante 5 segundos, se move no sentido oposto. Ao final do percurso, o objeto estaria a 2 unidades à esquerda da origem. No entanto, surge um problema quando o subtraendo (5) é maior que o minuendo (3). Caraça (1950) argumenta que, para resolver problemas como esse, é necessário abandonar a limitação da subtração.

O conceito de número relativo, para Caraça, é bem definido. Ele define a diferença entre dois números a e b como o número relativo, que pode ser positivo, negativo ou nulo, dependendo se $a - b > 0$, $a - b < 0$ ou $a = b$. Caraça (1950) destaca a importância do número negativo no campo dos números relativos e ressalta que novas propriedades são estendidas a partir das necessidades construídas em outros conjuntos numéricos, mantendo as propriedades já herdadas.

As propriedades dos números relativos incluem a comparação de números positivos e negativos, onde o maior é determinado pelo valor absoluto. No entanto, surgem infinitas diferenças que podem representar o mesmo número relativo, desde que não alterem o sinal e o módulo. As operações de adição, subtração, multiplicação e divisão nos números relativos obedecem a propriedades semelhantes às dos números reais.

A história do desenvolvimento dos números negativos foi gradual e teve algumas divergências. Os chineses já utilizavam números negativos em seus cálculos, representando-os com barras vermelhas para coeficientes positivos e pretas para coeficientes negativos. No entanto, não aplicavam essa ideia para solucionar equações. Posteriormente, Brahmagupta sistematizou o número negativo e o zero na Índia. No século XVI, Stifel na Europa introduziu os símbolos “+ e -”, mas relutava em aceitar que um número negativo pudesse ser solução para uma equação de segundo grau. O uso de números negativos para equações cúbicas foi inevitável, e Cardano os chamou de “números fictícios”.

O Irem D´Aquitaine (2008) inicia sua pesquisa contextualizando o desenvolvimento histórico, obstáculos e aceitação dos números relativos pelos principais matemáticos. Destaca-se a enumeração dos obstáculos epistemológicos que cercam o processo de ensino e aprendizagem desses números. O primeiro desafio identificado é atribuir sentido ao número negativo de forma isolada. O segundo é abandonar a escrita dos números a partir do zero, unificando a escrita com o zero entre os números negativos e positivos. O terceiro desafio é a tentativa de conferir significado concreto ou real aos números negativos, enquanto o quarto é a busca por um modelo concreto na adição e multiplicação para o ensino do número negativo.

O estudo do Irem D´Aquitaine (2008) evidencia que o maior problema não reside na definição das operações de soma ou subtração com esses números, pois essa situação está bem estabelecida e o ensino se baseia em um modelo metafórico concreto que ilustra ganhos e dívidas. No entanto, surgem questões quando se trata da multiplicação de números negativos. Por exemplo, como interpretar o produto de uma dívida de R$ 10.000,00 multiplicada por outra de R$ 5.000,00? É fundamental que o professor esclareça aos alunos que esse modelo não pode ser aplicado à multiplicação, pois não faz sentido multiplicar dívidas ou créditos.

Para abordar a introdução dos números relativos, o estudo propõe uma sequência didática com relação à soma. Os exemplos incluem estratégias como escrever um dos números a ser operado juntamente com pontos, destacando a impossibilidade percebida pelos alunos de somar um número com outro menor. Posteriormente, os estudantes são orientados a reescrever as igualdades, compreendendo que os números negativos podem ser produzidos por meio de diferenças. Exercícios com exemplos concretos, como temperaturas e ganhos e perdas, demonstraram ser mais eficazes.

No que diz respeito à multiplicação, o autor sugere contextos e exemplos para sua introdução. Uma abordagem envolve a contagem de somas de números negativos e a percepção de que é mais fácil contar quantas somas ocorrem para determinar o resultado. Outra estratégia explora o uso do número oposto para simplificar o processo de multiplicação e reduzir o produto de números negativos ao caso de adição na regra dos sinais.

Uma dificuldade adicional ressaltada é a confusão que o sinal “-” pode gerar nos estudantes, pois representa simultaneamente o sinal de subtração, um número negativo e um número oposto. O autor enfatiza a importância de esclarecer aos alunos que a compreensão dos números negativos são conceitos abstratos definidos para satisfazer condições dentro da matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em suma, este trabalho permitiu uma análise aprofundada das dificuldades enfrentadas pelos estudantes no processo de aprendizagem dos números inteiros, assim como a apresentação de estratégias e materiais que podem auxiliar no ensino e na compreensão desse conteúdo. As pesquisas realizadas revelaram que as principais dificuldades dos alunos estão relacionadas à falta de familiaridade com os conceitos básicos, à dificuldade em relacionar os números inteiros com situações do cotidiano e à confusão na aplicação das operações matemáticas. Além disso, ficou evidente que muitos alunos apresentam resistência ao aprendizado desse conteúdo, associando-o a uma matéria difícil e pouco relevante para suas vidas.

No que diz respeito aos objetivos propostos, foi possível alcançar resultados significativos. A análise das dificuldades enfrentadas pelos alunos permitiu identificar áreas específicas que necessitam de maior atenção por parte dos educadores. Além disso, as estratégias e materiais apresentados mostraram-se promissores no sentido de tornar o ensino dos números inteiros mais dinâmico e atrativo, possibilitando uma melhor assimilação dos conceitos por parte dos estudantes.

Embora o problema da resistência dos alunos ao aprendizado dos números inteiros não tenha sido completamente resolvido, este trabalho ofereceu importantes subsídios para os educadores lidarem com essa questão de forma mais eficaz. Ao propor abordagens diferenciadas e utilizar materiais didáticos adequados, é possível promover um ambiente de aprendizagem mais estimulante e favorecer o sucesso acadêmico dos alunos nesta área. Em suma, espera-se que este trabalho possa contribuir para o aprimoramento das práticas educacionais no ensino dos números inteiros, tornando-o mais acessível e compreensível para os estudantes.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, Irene de. **Metodologia da Matemática**. Rio de Janeiro: Ed. Conquista, 1953.

BRASIL. **Secretaria de Educação Fundamental.** Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática /Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC /SEF, 1998.148 p.

BRASIL. **Secretaria de Educação Fundamental**. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/ SEF, 2008.

CARAÇA, Bento Jesus. **Fundamentos da Matemática Elementar**, Lisboa, 1950.

CASTELNUOVO, E. **Didática de la Matemática Moderna. México: Ed**. Trillas, 1970, [4, pp.82-1] https://www.cascavel.pr.gov.br:444/arquivos/14062012_curso_47_e_51_atematica_-_emersom_rolkouski_-_texto_1.pdf acesso em: 24 FEV 2024

COELHO, Márcia Paula Fraga. **A multiplicação dos Números Inteiros Relativos no Ábaco dos Inteiros: uma investigação com alunos do 7ºano de escolaridade**/Braga, 2005.Tese (Mestrado)-Universidade do Minho/Instituto de Educação e Psicologia.

COSTA, L. V. O. **Números Reais no Ensino Fundamental: alguns obstáculos epistemológicos**. **Dissertação de Mestrado em Educação.** Universidade de São Paulo. Faculdade de Educação. São Paulo, 2009.

FERREIRA, J. **A Construção dos Números**. 2ª ed. Rio de Janeiro: Editora da Sociedade Brasileira de Matemática, 2011.

GRYMUZA, A. M. G. **Uma análise das concepções os professores e alunos com relação aos Números Inteiros**/ João Pessoa, 2010.49 p.: Il. Monografia (Especialização) – IBRAED/ FAINTVISA.

IREM D´AQUITAINE, **Groupe Didactique des Mathématiques, Enseigner es nombres relatifs au college.** N.73, p. 59-72, 2008.

MACHADO, S. **Educação Matemática: uma (nova) introdução,** 3.ed. São Paulo: Edur, 2010.

MAIER, R. R. **Algebra I. (Algebra Abstrata).** Textos de Aula, 1995.

MILIES, C. P; COELHO, S. P. **Números - Uma Introdução `a Matemática.** 3ª ed. São Paulo: Edusp - Editora da Universidade de São Paulo, 2001.

PASQUINI, R. C. G. **Um Tratamento para os Números Reais via Medição de Segmentos: uma proposta, uma investigação. Tese de Doutorado. Instituto de Geociências e Ciências Exatas.** Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2007.

POMMER, W. M. **A construção de significados dos números irracionais no ensino básico: uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos números reais.** Tese de doutorado. Programa de Pós-graduação em Educação. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2012.

SILVA, A. M. **Sobre a Dinâmica da Produção de Significados para a Matemática**. Tese de Doutorado em Educação Matemática – Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2003.

SOUZA, J.T.D.S.; ALGARENGA, A.M.; SILVEIRA, D.S. **Obstáculos Epistemológicos com Números Inteiros Negativos de Estudantes de 7º Ano do Ensino Fundamental**, Caçapava 2014.

Capítulo

12

Ensino e aprendizagem matemática financeira na EJA

Antônio Edézio Santos de Sousa

RESUMO

O presente estudo tem como objetivo investigar o conhecimento financeiro dos estudantes da educação de jovens e adultos, bem como, as contribuições da calculadora do cidadão para a aprendizagem dos estudantes desta modalidade de ensino. Desse modo, mostraremos a importância da abordagem de matemática financeira na vida escolar, em particular para estudantes da educação de jovens e adultos (EJA), os quais fazem parte da população economicamente ativa. Para tanto, desenvolvemos e aplicamos uma sequência didática contendo problemas contextualizados que simulavam a realidade dos estudantes participantes da referida pesquisa. Ademais, nos debruçamos em livros, artigos e teses relacionadas ao tema para fundamentar as discussões durante a aplicação da tarefa. A presente investigação segue uma abordagem qualitativa, utilizam-se como técnicas de coleta de dados observações, questionários e documentos. Além disso, utilizamos como apoio à resolução dos problemas a calculadora do cidadão. Desse modo, esperamos ter contribuído para a percepção do professores que abordam matemática financeira na EJA, destacando que o aluno dessa modalidade de ensino busca na escola lapidar o conhecimento adquirido a partir das suas vivências. Por fim, foi notória a evolução dos participantes da pesquisa, em particular, no que diz respeito ao planejamento financeiro.

Palavras-chave: matemática financeira; educação de jovens e adultos; calculadora do cidadão.

INTRODUÇÃO

O aumento do custo de vida motiva a busca por formas de administrar melhor os gastos. Em contrapartida, as facilidades que o mercado oferece proporcionam o consumo excessivo dos mais diversos tipos de produtos. Nesse víeis, o planejamento financeiro torna-se um suporte necessário para todas as pessoas.

Assim, é necessário buscar formas de prever o impacto futuro de determinadas decisões. Nessa perspectiva, o conhecimento sobre matemática financeira torna-se imprescindível, uma vez que, podemos aplicá-la em diversas ocasiões do nosso dia a dia. Por outro lado, por vezes, a abordagem desse conteúdo nas escolas se restringe apenas a aplicação de fórmulas prontas e acabadas, o que pode não motivar os alunos.

DOI: 10.47573/aya.5379.2.344.12

AYA Editora©

Em verdade, diariamente somos bombardeados por ofertas. Isso faz com que grande parte da população seja economicamente ativa, em particular os jovens e adultos que acabam gerando um conhecimento prático de matemática financeira. Por isso, buscamos desenvolver essa pesquisa com alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA). Em resumo, nosso objetivo é investigar o conhecimento financeiro destes estudantes, tendo em vista que, utilizam desse conhecimento em diversas atividades do seu cotidiano.

Ademais, o avanço da tecnologia contribuiu para o crescimento da sociedade e diariamente surgem ferramentas que, com o passar do tempo, tornam-se indispensáveis. Desse modo, surge a necessidade de se adequar e assim acompanhar os avanços da nossa sociedade. Nessa perspectiva, utilizamos no decorrer das resoluções dos problemas ferramentas tecnológicas que estão inseridas ou que podem ser adicionadas em seus celulares, tais como a calculadora cientifica, o *Excel* e a calculadora do cidadão.

De acordo com os parâmetros curriculares nacionais (PCNs):

> O impacto da tecnologia na vida de cada indivíduo vai exigir competências que vão além do simples lidar com as máquinas. A velocidade do surgimento e renovação de saberes e de formas de fazer em todas as atividades humanas tornarão rapidamente ultrapassadas a maior parte das competências adquiridas por uma pessoa ao início de sua vida profissional.

Portanto, se adequar as novas tecnologias passa a ser algo necessário para que o sujeito continue exercendo seu papel ativo na sociedade. Nesse seguimento, a partir de questões contextualizadas que simulam a realidade dos alunos, iremos induzi-los a usar ferramentas tecnológicas para resolver os problemas propostos. Assim, apesar de não aplicar em casos reais, mostraremos aos estudantes a importância de se compreender os conceitos de matemática financeira e de saber utilizar ferramentas que estão ao seu alcance. Propomos situações que envolviam, dentre outros assuntos, aplicações, parcelamentos, financiamento e investimentos.

Assim, esse trabalho tem como objetivo geral investigar o conhecimento financeiro dos estudantes da educação de jovens e adultos de uma escola estadual de Jaguaquara - Ba. Para tanto, desenvolvemos aplicamos e analisamos uma sequência didática abordando tópicos de matemática financeira. Além disso, investigamos a partir de questionários quais as contribuições do uso de ferramentas tecnológicas para a aprendizagem dos estudantes.

Outro aspecto importante dessa pesquisa é identificar os processos de resolução utilizados, verificaremos se o conhecimento adquirido fora do ambiente escolar pode auxiliá-los a resolver as questões. Assim, a importância dessa pesquisa para a comunidade cientifica esta pautada no fato de que os professores da EJA precisam considerar toda a bagagem que este aluno traz consigo. Desse modo, é evidente que essa modalidade de ensino não pode ser vista como forma de transmitir todo o conhecimento que o aluno não viu durante o tempo que ficou fora da escola; pois, parte desse conhecimento está inserido neste aluno, cabendo ao professor apenas aperfeiçoá-lo.

Nessa perspectiva, o ensino de matemática financeira, por exemplo, deve ser feito considerando que este aluno já tem parte do conhecimento. Assim, se o ensino se resume a aplicação de fórmulas que não fazem sentido para o aluno podemos estar contribuindo para o insucesso e evasão escolar. Nesse víeis, o professor deve mostrá-los que o conhecimento mais aprofundado do tema supracitado pode auxiliá-los a resolver problemas de forma mais rápida e com mais precisão. Ademais, pode-se resolver problemas que estes consideravam, inclusive, impossíveis de serem resolvidos.

DESENVOLVIMENTO

Neste trabalho discutimos sobre o ensino e aprendizagem de matemática financeira, com foco na educação de jovens e adultos (EJA). Esta modalidade de ensino surge em meados de 1960, quando se intensificaram as campanhas de alfabetização em massa para toda a população, principalmente de jovens, adultos e idosos (Tostes, 2017).

A aprendizagem ao longo da vida deve nortear o planejamento do professor, deve-se pensar nas aulas como um permanente diálogo entre as histórias de vida e de trabalho destes sujeitos, dando ênfase às contribuições da educação popular. Diversos fatores contribuem para a evasão escolar destes alunos, dentre estes, destacam-se as dificuldades econômicas. Nesse seguimento, a única alternativa é abandonar a escola para dedicar-se integralmente ao trabalho.

Em contrapartida, o mercado de trabalho busca cada vez mais mão de obra qualificada, assim prosseguir nos estudos passa a ser uma necessidade para quem busca melhores condições de trabalho e de vida. De fato, quanto maior o nível de escolaridade, melhores são as oportunidades salariais (Teixeira, 2015).

A dificuldade econômica é um dos fatores determinantes para o abandono escolar. Além disso, o aumento do custo de vida intensifica a necessidade de planejamento econômico. Desse modo, abordar na escola o conhecimento de matemática financeira torna-se essencial para a construção de um cidadão mais crítico e reflexivo. Nesse contexto, destaca-se a população jovem e adulta, pois estes são economicamente ativos e precisam organizar seus gastos, economias e investimentos.

METODOLOGIA

Essa pesquisa segue uma abordagem qualitativa que de acordo com Diez e Horn (2013, p. 27):

> Procura explicar o porquê das coisas, inferindo o que convém ser feito, mas não quantificam os valores e as trocas simbólicas nem se submetem à prova de fatos, pois os dados analisados não são métricos, subjetivos e se valem de diferentes abordagens.

De fato, nossa abordagem metodológica não tem por finalidade quantificar erros ou acertos e sim observar e registrar como é desenvolvido o raciocínio dos alunos. Assim, descreveremos de modo reflexivo quais são as estratégias e dificuldades apresentadas pelos alunos durante a resolução dos problemas. Além disso, observaremos quais as possíveis contribuições do uso de ferramentas tecnológicas para a aprendizagem dos participantes.

Nesta direção, nosso trabalho se identifica com uma abordagem qualitativa, pois não pretendemos observar apenas os resultados finais e sim todo o processo no qual passará o aluno. Além disso, o pesquisador foi professor da turma investigada, assim esteve mais próximo da realidade dos estudantes. De acordo com Bogdan e Biklen (1994) os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudo, pois se preocupam com o contexto e entendem que as ações podem ser mais bem compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência.

Para alcançar o nosso objetivo realizamos uma pesquisa de campo com um grupo de 20 alunos que frequentam a Educação de Jovens e Adultos da cidade de Jaguaquara-Ba. Assim, desenvolvemos e aplicamos uma sequência didática com problemas que simulavam a realidade dos participantes. Ademais, em alguns casos, sugerimos aos participantes o uso de ferramentas tecnológicas que poderiam facilitar a compreensão.

A atividade foi desenvolvida em duplas, pois julgamos a interação entre os alunos como um fenômeno que pode enriquecer o ambiente de aprendizagem, possibilitando que haja discussões entre os pares, podendo estimular os participantes a desenvolverem argumentações para justificar seus pontos de vista para o seu par. Nesse sentido, vale ressaltar que tarefas desenvolvidas em pequenos grupos possibilitam o compartilhamento de ideias e as discussões coletivas configuram importantes momentos de aprendizagem. Assim, o ambiente mostra-se mais adequado para a construção coletiva dos conhecimentos, uma vez que é exigida dos alunos uma postura mais crítica e reflexiva.

Para realizar esta pesquisa optamos por uma coleta de dados a partir de observações, que de acordo com Barros e Lehfeld (1990, p.77) significa: “aplicar atentamente os sentidos a um objeto para dele adquirir um conhecimento claro e preciso”. A observação torna-se uma técnica cientifica quando sofre uma sistematização, planejamento e se for submetida a controle de objetividades. Além disso, nossa observação caracteriza-se como observação participativa, que é quando o observador se incorpora natural ou artificialmente ao grupo ou comunidade pesquisados (Barros; Lehfeld 1990).

A coleta de dados foi realizada em quatro encontros de 100 minutos, com alunos do tempo formativo VII de uma escola de Jaguaquara – BA, no período de agosto a outubro de 2021. Em suma, coube aos participantes resolver os problemas contextualizados a partir de um roteiro de atividades produzido e aplicado pelo investigador. Além das soluções, os estudantes envolvidos na pesquisa deveriam justificar oralmente suas conclusões. Vale ressaltar que as justificativas orais, bem como os diálogos realizados entre os pares, foram gravados em áudio com o consentimento dos participantes.

Dessa forma, as observações, os registros das atividades e os áudios gravados puderam nortear a análise dos dados, donde foi possível captar eficientemente os sentimentos dos alunos, suas motivações e realizações didáticas. Todo este aparato serviu como instrumento para análise minuciosa das respostas dos alunos. Na próxima seção apresentamos e discutimos alguns dos dados coletados na pesquisa.

RESULTADOS

A fim de analisar os dados coletados, buscamos observar os principais padrões que surgiam das questões investigativas (Bogdan e Biklen, 2013), podendo assim confrontar as informações e relacioná-las com o referencial teórico levantado neste estudo. Nesse sentido, Ludke e André (1986, p. 45), ressalta que: “analisar os dados qualitativos significa ‘trabalhar’ todo o material obtido durante a pesquisa, ou seja, os relatos de observação, as transcrições de entrevista, as análises de documentos e as demais informações disponíveis”.

Inicialmente pedimos aos alunos que respondessem um questionário sobre o perfil de cada participante. Assim constatamos que 35% tinham entre 20 e 30 anos, 50% tinham entre 31 e 40 anos e 15% tinham mais de 50 anos. Destes participantes 70% eram do sexo masculino e 30% do sexo feminino. A pergunta inicial que fizemos foi em relação à quantidade de dinheiro que os participantes conseguiam economizar. O gráfico abaixo mostra o resultado.

Figura 1 - Gráfico sobre economia.

Fonte: autoria própria

De modo geral, a maior parte dos alunos disse que não consegue economizar. Nosso objetivo com esse primeiro questionamento era de motivar os participantes, evidenciando a necessidade de traçar estratégias no que diz respeito ao planejamento financeiro. Por seguinte, propomos alguns problemas sobre cálculo de porcentagem, parte fundamental na abordagem de matemática financeira. O problema 1 consistia em analisar o preço a ser pago em um produto que custava R$ 820,00 e à vista tinha um desconto de 15%.

A dupla 4 calculou inicialmente 10% de 820, obtendo 82 e depois dividiu esse valor por 2 para encontrar 5%, por fim somaram os valores para obter o valor do desconto. Enquanto que a dupla 8, formado por dois alunos mais velhos fez a conta por partes, dividindo o valor total em uma soma de parcelas de R$100,00 e parcelas de R$10,00. A partir do áudio gravado pôde-se compreender o raciocínio.

Antônio: 15% de 100 dá 15 reais.

Maria: Mas aqui é 820 reais.

Antônio: Então, basta a gente pegar os 15 reais e multiplicar por 8, ai dá os 15% de 800 reais.

Maria: E os 20 que não entrou na conta?

Antônio: Se 15% de 100 dá 15 reais então de 10 reais tem que ser 1,50. Ai fica 3 reais, por que aqui é 20.

Maria: Entendi, agora é só somar tudo que fica 123 reais de desconto.

Analisando o raciocínio dessas duas duplas e das demais nos outros problemas semelhantes, notamos que os participantes mostraram uma certa facilidade para resolver problemas cujas porcentagens são múltiplos de 5. Essa facilidade certamente está relacionada ao fato de que no mercado consumidor são as mais utilizadas. Algumas duplas sabiam fazer conta mentalmente, mas não conseguiam descrever seu raciocínio.

No problema 2 propomos uma tabela de gastos realizados por uma família e cabia aos participantes analisar a parcela do salário foi consumido com esses gastos, consideramos o salário como R$ 1.200,00. Com o apoio do professor todos os participantes conseguiram realizar os cálculos, e viram que foi gasto 104% do salário, ou seja, essa família além de gastar todo o seu salário ainda ficou devendo R$ 48,00.

No problema seguinte questionamos os participantes se sempre era melhor comprar à vista. Todos os participantes disseram que sim, pois a prazo sempre sairia mais caro. Desse modo, solicitamos que os participantes pensassem no seguinte problema:

Problema 3: Um fogão é vendido à vista por R$ 490,00 e à prazo em 10 vezes de R$ 50,00. Considere que você possui o dinheiro completo para pagar à vista, isto é, você tem R$ 490,00. Além disso, você possui uma aplicação em que seu dinheiro investido lhe rende 10% ao mês. Complete a tabela abaixo considerando que você comprou a prazo e investiu o restante nessa aplicação.

Quadro 1.

Parcela	Valor pago	Dinheiro investido	Juro que rendeu
Mês 1	50,00	440,00	4,40
Mês 2	50,00	390,00	3,90
Mês 3	50,00	340,00	3,40
Mês 4	50,00	290,00	2,90
Mês 5	50,00	240,00	2,40
Mês 6	50,00	190,00	1,90
Mês 7	50,00	140,00	1,40
Mês 8	50,00	90,00	0,90
Mês 9	50,00	40,00	0,40
Mês 10	50,00	0,00	0,00

Fonte: autoria própria.

Questionamos os alunos para que pudessem por si só chegar à conclusão de que dessa forma, apesar de pagarmos R$ 10,00 a mais na compra a prazo o dinheiro restante rendeu um total de R$ 21,60, ou seja, pagando a prazo teríamos uma economia de R$ 11,60 em relação ao pagamento à vista. Destacamos que o valor de rendimento de 10% dificilmente ocorrerá em aplicações bancárias e que o exemplo serve para mostrar que antes de uma decisão precisamos refletir.

Nos dois encontros seguintes abordamos problemas com, juros simples e juros compostos. Iniciamos com um situação em que uma pessoa toma emprestado um valor de R$ 2.000,00 durante 4 meses a uma taxa de 10% ao mês, enquanto o devedor achava que devolveria R$ 2800,00 o banco esperava receber R$ 2.928,20. Questionamos os alunos sobre qual dos dois cálculos estava correto, a maioria concordou com o cálculo do devedor. Apenas duas duplas observaram que a conta feita era de juros sobre juros, ou seja, juros compostos. Solicitamos então que esta dupla explicasse o raciocínio para o restante da sala e assim o fizeram.

Posteriormente, solicitamos que os participantes baixassem o aplicativo de calculadora do cidadão, nos seus celulares. O professor explicou como utilizá-la e as principais ferramentas presentes no aplicativo. Em seguida, propomos alguns problemas para serem resolvidos com suporte dessa calculadora. O problema 5 consistia em calcular o valor final de uma poupança em que era depositado mensalmente um valor de 200 reais durante 60 meses com rendimento de 0,5% ao mês. De modo geral todas as duplas responderam corretamente a questão proposta, alguns tentaram fazer sem utilizar a calculadora do cidadão, mas desistiram por ser vários meses.

Nos problemas seguintes tínhamos como objetivo comparar as vantagens e desvantagens de fazer uma poupança e fazer um financiamento. O problema inicial consistia em determinar a quantidade de meses que uma pessoa deve esperar para comprar uma motocicleta guardando mensalmente R$ 300,00 na poupança. Utilizando o aplicativo chega-se a resposta de 15 meses. Por outro lado, para efetuar a mesma compra por meio de um financiamento era preciso pagar o mesmo valor durante 22 meses.

Figura 2 - Comparando financiamento e aplicação.

Fonte: autoria própria.

Analisando as duas respostas discutimos sobre a real necessidade de se obter um determinado bem, ou seja, é preciso sempre planejar com antecedência e verificar os pontos positivos e negativos de determinadas decisões. Por fim, foi notória a curiosidade dos participantes em relação aos tópicos abordados. Desse modo, a participação, o diálogo e a utilização dos recursos tecnológicos auxiliaram na compreensão dos estudantes.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscamos neste trabalho abordar a importância da matemática financeira no cotidiano de estudantes da Educação de Jovens e Adultos. Nessa perspectiva demos ênfase ao uso de juros simples e compostos em diversas situações problemas que simulavam a realidade dos participantes da pesquisa. A abordagem do planejamento do orçamento doméstico mostrou aos alunos que tão importante como ganhar dinheiro é saber como gastá-lo de modo consciente.

É consenso entre os professores de Matemática que dentre as dificuldades para lecionar a disciplina, a que se destaca é a falta de motivação dos alunos. Nesse sentido, buscamos desenvolver uma sequência didática para abordar tópicos de matemática financeira na qual utilizamos problemas que simulam a realidade, mostrando aos estudantes que podemos utilizar os conteúdos de matemática também fora do ambiente escolar. Além disso, buscamos propor tarefas em duplas, o que pôde contribuir para aprendizagem, uma vez que, os participantes veem a necessidade de defender seus pontos de vista, e para isso precisavam lançar mão de maior reflexão e argumentação matemática.

Outro ponto importante, no que diz respeito à motivação dos estudantes, foi a possibilidade de usar recursos tecnológicos para resolver os problemas propostos durante o desenvolvimento das tarefas. Vale destacar que os recursos tecnológicos, em particular a calculadora, o computador e o celular, estão inseridos no cotidiano dos alunos, portanto levá-lo para a sala de aula pode transformar as aulas em momentos mais enriquecedores e proveitosos para todos.

Esperamos que os professores interessados em trabalhar com matemática financeira no ambiente da EJA com apoio de recursos tecnológicos possam encontrar, em nossa proposta, uma alternativa viável às suas realidades e objetivos. Por fim, esperamos que este estudo possa contribuir para melhorar um pouco a realidade do ensino e aprendizagem de matemática. Bem como, auxiliar os participantes da pesquisa em suas tarefas diárias ressaltando a importância do planejamento financeiro.

REFERÊNCIAS

BARROS, A. J. P.; LEHFELD, A. S. **Projeto de pesquisa: propostas metodológicas.** 8. ed. Petrópolis: Vozes, 1990.

BOGDAN, R; BIKLEN, S. 1994. **Investigação qualitativa em educação.** Lisboa: Porto. Editora, 2013.

BRASIL. MEC. SEF. **Parâmetros Curriculares para o Ensino médio**. Brasília, 1998.

DIAS, Claudio Mendes. **Educação financeira no proeja: construção de conhecimento a partir de atividades no cotidiano do corpo discente**. Rio de Janeiro, 2015

DIEZ, Carmem Lúcia Fornari; HORN, Geraldo Bauduino. **Orientações para elaboração de projetos e monografias.** Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.

FILHO, Osmando Barbosa Caldas. **Matemática financeira no cotidiano - um estudo de caso**. Salvador, 2016.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em educação**: Abordagens Qualitativas. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária Ltda, 1986.

SILVA, Joanilson Moreira. **O ensino de educação financeira por meio do planejamento do orçamento doméstico.** Castanhal, 2021.

TEIXEIRA, Paula Penko. **O impacto da escolaridade da população sobre a pobreza e a desigualde de renda no Brasil.** Ribeirão Preto: Editora, 2015.

TOZONI-REIS, Marília Freitas de Campos. / Metodologia da Pesquisa. / Marília Freitas de Campos Tozoni-Reis. 2.ed. – Curitiba: IESDE Brasil S.A., 2010.

TOSTES, Joelma Eliani Ferreira. **O uso das novas tecnologias na educação de jovens e adultos**. Maringá – PR, 2017.

Capítulo

13

A proof of the Collatz conjecture

Sandoval Amui

ABSTRACT

The Collatz Conjecture is an unproven conjecture, which has defied experts for almost a century. Math texts refers to it under different names, including 3n+1 problem, Syracuse algorithm and others. That conjecture refers to certain sequences of numbers generated by starting with any integer and following just two simple arithmetic rules: If the number is even, divide it by two, and if it is odd, triple it and add one. Once started, whatever the initial number, the sequences may go up and down, sometimes following a great number of steps, but eventually they end up in a loop "1, 4, 2, 1". Experiments with the use of modern computers have indicated the conjecture is a true statement for a significant quantity of numbers, without finding any counter-example yet. However, that is not enough in terms of mathematics. Some people say the sequences have a chaotic and unpredictable nature and is beyond current math capability. It is fair to say that if we accept Collatz Conjecture as a valid question under the present state-of-the-art mathematics, we have to accept the same standards to handle and solve the problem. That is the approach in this paper. Thinking outside the box, I propose a proof of that puzzle with the sole help of sound arithmetic fundamentals, and I say that the sequences under the Collatz Conjecture are not random arrangements of numbers of chaotic and unpredictable nature. In fact, the two arithmetic operations ruling the puzzle imply an arithmetic mechanism that leads to an arrangement of numbers, which comprises an infinite number of independent sequences moving separately from infinity until each one meets a different odd number, what makes said independent sequences to share paths and flow all together from "16" to "1".

Keywords: conjecture; Collatz; syracuse; sequence; infinity.

INTRODUCTION

The Collatz Conjecture is an unproven conjecture, which has defied experts for almost a century (the "Conjecture"). Math texts refers to it under different names, as 3n+1 problem, Syracuse algorithm and many others. That Conjecture states that any sequence of numbers, starting from any integer and following just two simple arithmetic operations, will end up in a loop "1, 4, 2, 1". Once started, whatever the initial number, the numbers may go up and down, sometimes through many steps, but eventually the sequence ends up in that final loop. The two arithmetic operations: if the starting number or any subsequent number is even, divide it by two ("n/2"), and if it is odd, triple it and add one (3n+1"). That is the reason the Conjecture is also called the "3n+1" problem.

DOI: 10.47573/aya.5379.2.344.13

The two arithmetic operations ruling the Conjecture may cause a succession of even and odd numbers of an apparent chaotic and unpredictable nature. An even number may yield another even number or an odd number. An odd number only originates an even number. The Conjecture states that any possible sequence ends in number “1”, what also means that no loop occurs, other than the final one, “1, 4, 2, 1”.

We see the Conjecture deals with infinity. Infinity is simply a concept of something very large or distant, beyond our present understanding. It means that any problem involving an infinite sequence of terms takes us to a situation beyond our traditional way of thinking applied math.

The Conjecture faces this difficulty, and some experts say we cannot solve it with current mathematics. Since the concept of infinity is of a difficult comprehension, some other people say it is an impossible puzzle.

If the Conjecture is an unproven truth, in a manner that whatever the starting number we may choose, any sequence formed under the Conjecture ends up in number “1”, there must be an arithmetic command ruling the Sequences.

That is the reasoning line adopted in this paper.

INFINITY

Under the present state-of-the-art mathematics, we understand infinity as an endless approximation of an abstract instance, which we will never reach. As a matter of fact, dealing with numbers (as in the case of the Conjecture), we have to accept the Idea of near-infinity numbers. We may refer to huge numbers, perhaps beyond our imagination, but still numbers. Arithmetic consistency requires it.

Otherwise, the Conjecture is not a valid problem.

That is the only way to analyze the Conjecture as a valid mathematical question, because it implies the application of elementary arithmetic operations to numbers. It means that whenever we mention the word infinity, we need to keep in mind that we actually mean numbers as large as we can imagine, but still numbers, here referred as near-infinity numbers.

In near-infinity, whatever the size of a number we consider there will always be numbers even larger than that number.

Let us emphasize that the Conjecture states that, whatever the starting number, any sequence will end up in the loop “1, 4, 2, 1”. That is the statement to prove. We do not need to prove the existence or the non-existence of a sequence that goes to infinity. We only need to prove that, if said sequence indeed exists, it will end up in the referred loop “1, 4, 2, 1”, as required by the Conjecture.

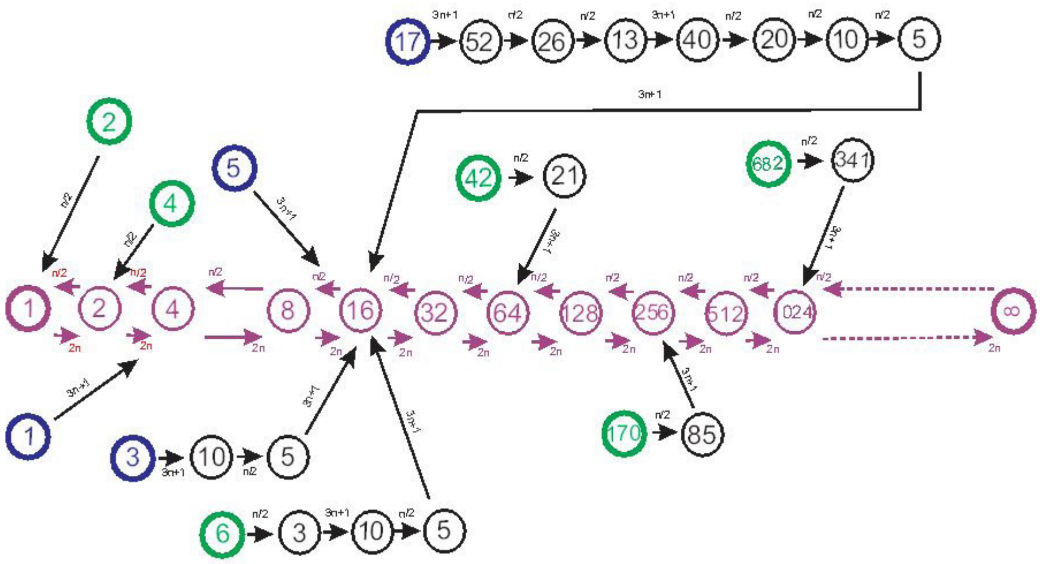
It will also be necessary to prove that there will be no occurrence of an intermediate loop in between infinity and the referred final loop “1, 4, 2, 1”, which would prevent a sequence to comply with the Conjecture.

Clearly, the difficulty inherent to the Conjecture resides in our limitation to deal with or at least to understand the meaning of “infinity”. That is why some experts say this Conjecture is a problem beyond current mathematics.

SEQUENCES UNDER THE CONJECTURE

I will refer to the sequences built under the Conjecture rules (“n/2” and “3n+1”) as “Sequences”, whatever the starting number. Figure 1 illustrates some Sequences for certain initial numbers (even numbers in green, odd numbers in blue), which satisfy the Conjecture.

Figure 1 - Sequences.



These Sequences (and many others), whatever the starting number, at a certain stage they will reach a number in a peculiar Sequence (numbers in purple) and comply with the Conjecture. However, only odd numbers connect the Sequences to that peculiar Sequence. I will refer to this peculiar sequence as the “Main Sequence”, because it goes from “1” to infinity if we simply double each previous number, but it also satisfy the “n/2” rule of the Conjecture (whatever the starting number, including infinity or near-infinity numbers).

If we admit that the Main Sequence can reach or approach infinity by following an elementary arithmetic operation (each number is the double of the previous number), we have to admit that the inverse operation works backwards. Then, if we keep dividing the numbers in that Main Sequence by “2” (including infinity or near-infinity numbers), we will return to number “1”. Under those arithmetic rules, the return from a number in infinity to number “1” will take as many steps as it takes number “1” to reach that number in infinity. Arithmetic consistency requires it.

The use of the inverses of the two arithmetic operations imposed by the Conjecture allows us to build a number arrangement taking the Main Sequence as a reference, which reveals that the Conjecture rules force all Sequences to converge to number “1”.

MAIN SEQUENCE

All numbers in the Main Sequence we see in Figure 1 comply with the Conjecture by following the arithmetic operation “n/2”. With the exception of number “1”, all of them are even numbers. We may say we have a general Sequence, when the initial number is a number in infinity (or other number as close to infinity as we can imagine), as well as an infinite quantity of Sub-sequences, when the initial number is any number in that Main Sequence below infinity. In fact, a whole family of Sequences. It is obvious that all Sub-sequences are particular cases of the referred general Sequence. For practical purposes, we may say there exists a unique Sequence in the Main Sequence, which comes from infinity (or near-infinity) to number “1”, since all others are sub-cases, when the starting number is any number below infinity.

Considering that all Sub-sequences follow the same pattern the respective general Sequence does, we may ignore Sub-sequences in our analysis.

We see from practical examples that before reaching number “1”, all Sequences get a ride on the Main Sequence through an odd number. That is the prospective line to pursue to prove the Conjecture. In addition to that, clearly, the arithmetic rule “n/2”, which applies to even numbers, cannot perform the role to connect any other Sequence to the Main Sequence. Every number in the Main Sequence is the half of the subsequent number. It is obvious that only odd numbers, under the arithmetic rule “3n+1”, can connect any other Sequence to the Main Sequence. I will show that there exists a direct connection between certain even numbers “N” in the Main Sequence and the corresponding odd numbers “n” in other Sequences.

THE ARITHMETIC MECHANISM (MAIN GATES AND SECONDARY GATES)

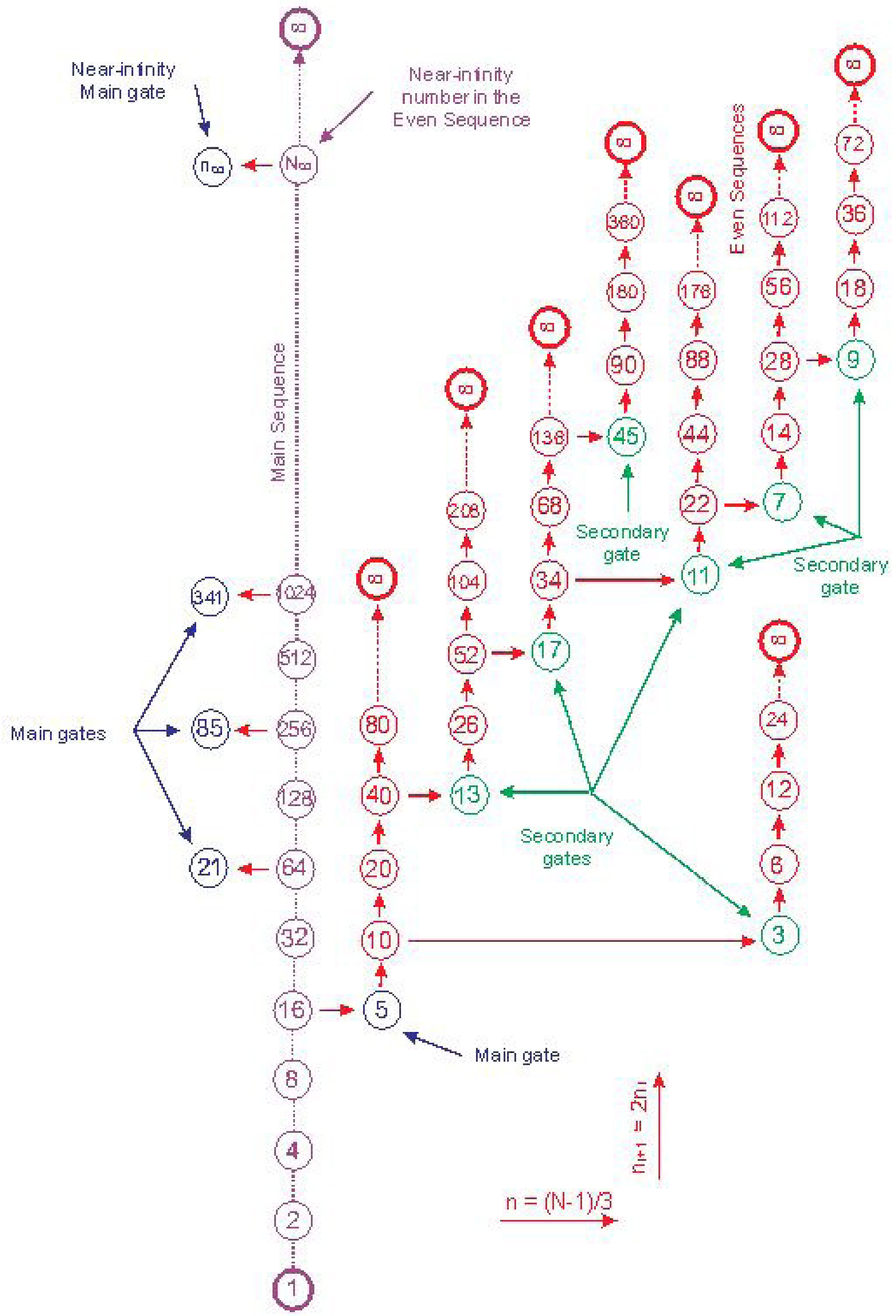
The Conjecture holds for any integer because its two arithmetic operations imply an arithmetic mechanism illustrated by an arrangement of numbers, which contains an infinite quantity of independent growing sequences of even numbers. The arrangement contains all even and all odd numbers from “1” to “∞”, and results when we apply the inverses of the referred arithmetic operations to certain numbers in the Main Sequence. As we see in Figure 2, this arithmetic mechanism shows that the Conjectures rules perform as a command to force the Sequences to end up in number “1”.

Certain even numbers “N” in the Main Sequence yield corresponding odd numbers “n”, when we apply the inverse arithmetic operation “(N-1)/3 = n”. There exists a direct connection between “N” and “n” (a path shortcut). That is why I refer to any “n” as a “main gate” (numbers in blue in Figure 2). These pairs of even and odd numbers follow the relationships below:

$$N = 4m \qquad n = (N-1)/3$$

,

Figure 2 - The arithmetic mechanism (main gates and secondary gates).



In the math expressions, "n" is an odd integer, "N" is an even integer, and "m" is a whole number (from "1" to infinity). Numbers "1" and "4" have a particular relationship under the Conjecture rules. Number "1" originates number "4" with the operation "3n+1", while number "4" originates number "1" under the other operation "n/2".

Table 1 shows that many even numbers originates odd integers under the inverse operation '(N-1)/3". In the Main Sequence, however, only the powers of "4" originate odd integers under that same inverse operation (as number “$4^1=4$” yields number “1”, number “$4^2=16$” yields number “5”, number “$4^3=64$” yields number “21” and many others until infinity).

Besides, each one of these particular odd numbers “n” yields an infinite number of growing sequences of even numbers when we apply the arithmetic operation “2n”, the inverse of the arithmetic operation “n/2” imposed by the Conjecture (numbers in red in Figure 2). In building these growing sequences of even numbers, we followed the same formation rule used to build the Main Sequence.

Some of the even numbers yielded by those peculiar odd numbers “n” may yield other odd numbers, and form indirect connections with the Main Sequence. These other odd numbers, here referred as “secondary gates” (numbers in green), again generate other infinite number of growing sequences of even numbers when we apply again the inverse arithmetic operation “2n” (numbers also in red). As the Main Sequence, all growing sequences of even numbers go to infinity.

Table 1 illustrates these pairs of numbers for main gates (in blue) and the Main Sequence (in purple), as well as for secondary gates (in green) and the other Sequences (in red).

Table 1 - Gates and Sequences.

ODD NUMBERS		EVEN NUMBERS	
Main gates (n = (N-1)/3)	Secondary gates (n = (N-1)/3)	Main Sequence (N = 3n+1)=(4^m)	Other Sequences (N = 3n+1)
1	---	$4 = 4^1$	---
---	3	---	10
5	---	$16 = 4^2$	---
---	7	---	22
---	9	---	28
---	11	---	34
---	---	---	---
---	---	---	---
21		$64 = 4^3$	---
---	23	---	70
---	---	---	---
---	---	---	---
85	---	$256 = 4^4$	---
---	87	---	262
---	---	---	---
n_∞	---	N_∞	---
---	n_∞	---	N_∞

Main gates (odd numbers) originate growing sequences of even numbers. Even numbers originate secondary gates (odd numbers), which originate different growing sequences of even numbers in an endless process.

Main gates and secondary gates gather all existing odd numbers without repetition of numbers, what prevents the occurrence of any loop other than the final loop “1, 4, 2, 1”, and implies that all Sequences will join the Sequence of the Main Sequence and comply with the Conjecture under the referred command of the two Conjecture rules.

This arithmetic mechanism allows us to generate the arrangement of all even and all odd numbers, all of them directly or indirectly connected to the Main Sequence. All numbers generated by that arithmetic mechanism may form Sequences under the Conjecture rules, which comply with the Conjecture. Figure 2 illustrates some results produced by the arithmetic mechanism when we start with number “N=16” in the Main Sequence and find “n=5” as a main gate.

We see that said arithmetic mechanism generates secondary gates (numbers in green) by the inverse rule “(N-1)/3” (as “7”, “11”, “17” and “13”), and each secondary gate generates a growing sequence of even numbers by the inverse operation “2n” without repetition of numbers (numbers in red). As the Main Sequence goes from “1” to infinity, the other sequences of even numbers grow from each odd number to infinity. The example in Figure 2 only shows some growing sequences for the main gate “n=5”.

Obviously, If we take any number in the arrangement generated by said arithmetic mechanism, as number “56”, and apply the arithmetic rules of the Conjecture (“n/2” and “3n+1”), we will see a Sequence (in fact, a Sub-sequence, because it starts with a number below infinity), which complies with the Conjecture. Said Sub-sequence passes through the secondary gates “7”, “11”, “17” and “13”, and reaches the number “16” in the Main Sequence through the main gate “5”.

Under the arithmetic operation “3n+1”, main gates (numbers in blue in Figure 2) work as direct passages for Sequences to the Main Sequence. Similarly, secondary gates (numbers in green in Figure 2), under the same arithmetic operation “3n+1”, work as indirect connections between the Sequences and the Main Sequence. Figure 2 illustrates that effect for “N=16”.

All Sequences, under the Conjecture operation “3n+1” applied to an odd number (secondary gate), can freely move from a growing sequence of even numbers to a different growing sequence of even numbers, no matter how many steps it takes. It means that all Sequences will reach the Main Sequence through one of the main gates “5”, “21”, “85”, “341” and many others.

We simply follow the mechanism backwards as an arithmetic command. It is clear that the Sequence created as from number “56” is a particular case, a Sub-sequence of a general Sequence that comes from infinity to the odd number “7”. It is also clear that said Sub-sequence joins but does not interfere with other Sub-sequences created from other integers, as “44”, “68”, “52”, “80” or any other. It simply shares with each one of them the same sequence of numbers without losing its individuality.

A Sequence may start with a number in the Main Sequence and directly reach number “1”. It may start with a number directly connected to a main gate and join the Main Sequence through that main gate. Finally, a Sequence may follow a more complex pattern and reach some secondary gates before reaching a main gate in order to comply with the Conjecture.

While the Main Sequence progresses in its endless approximation to infinity, an infinite number of main gates and an infinite number of secondary gates will appear, and any Sequence, whatever the number of steps it takes, will mandatorily get a ride on the Sequences of the Main Sequence, and comply with the Conjecture.

All sequences of growing even numbers are mere ramifications of the Main Sequence. The Conjecture pattern is similar to a hydrographic basin of a main river and its tributaries and sub-tributaries. The Main Sequence works for the Sequences as a main river works for the coming water strings.

Like a situation when a tributary of a main river receives a sub-tributary and both rivers progress as a unique water string, when a Sequence joins another Sequence through a secondary gate the two Sequences move ahead as a single Sequence. The incoming Sequence does not interfere with the pattern of the host Sequence, since they are independent Sequences. It just get a ride on that host Sequence.

A Sequence from a specific growing sequence of even numbers may share certain common sequences of numbers with other Sequences, but it flows regardless of the existence of these other Sequences. Each Sequence from a given growing sequence of even numbers has its own individual unstoppable path until number “1”.

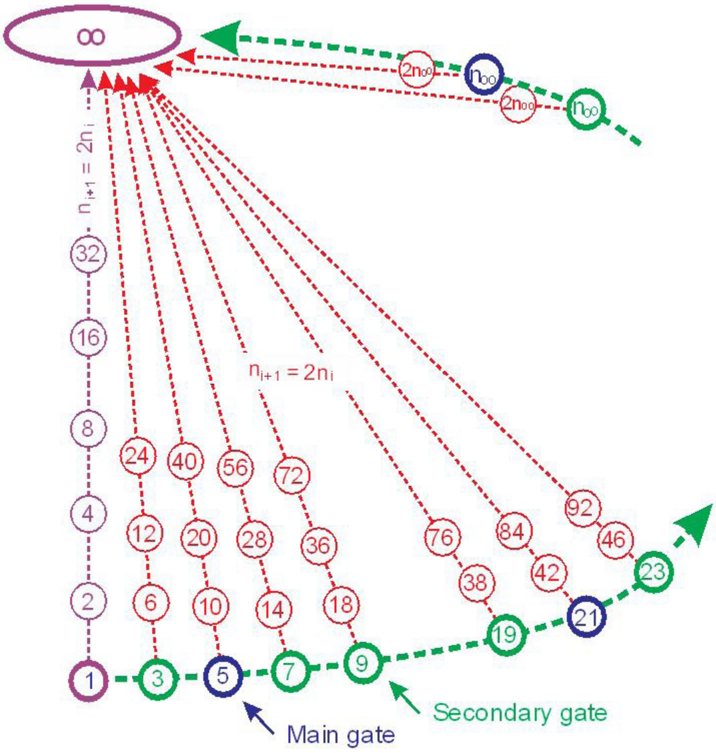
THE ARRANGEMENT

The reasoning above suggests a construction of a more complete arrangement of numbers (the “Arrangement”), assuming the Main Sequence as a model, as in Figure 3. The Arrangement contains all odd and all even numbers. We built the Arrangement in growing sequences of even numbers (the “Even Sequences”, numbers in red) as from a growing sequence of odd numbers (the “Odd Sequence”, numbers in green and blue). Each odd number originates an Even Sequence in a manner that each number is twice the previous number (the inverse of the Conjecture rule “n/2”), and no repetition of numbers will occur. The Main Sequence is a peculiar Even Sequence (in purple), used as a model to build the other Even Sequences (in red).

The Odd Sequence followed the rule “n_{i+1} = ni + 2”, while the Even Sequences followed the rule “n_{i+1} = 2ni” (the inverse of the Conjecture rule “n_{i+1} = n/2”). We built the Odd Sequence from “1” to infinity, and the Even Sequences from each original odd number to infinity without repetition of numbers. That is why the arrows go from numbers to infinity in Figure 3.

Figure 3 illustrates why main gates and secondary gates encompass all odd numbers from “1” to infinity, and guarantee that all Sequences reach the Main Sequence to comply with the Conjecture. We see, whatever the starting number, and no matter how many steps it takes, that a Sequence may freely move through secondary gates until it meets a main gate and joins the Main Sequence.

Figure 3 - The Arrangement.



The way we built the arithmetic mechanism, going from the Main Sequence to the other Even Sequences by using the inverses of the two arithmetic operations imposed by the Conjecture, shows that a Sequence from a specific Even Sequence cannot return to any Even Sequence it has already gone. This condition prevents the occurrence of any loop other than the final loop "1, 4, 2, 1", and indicates there is no means to block a Sequence in its movement to join the Main Sequence.

For a Sequence to comply with the Conjecture is a matter of "when", not "if".

With the purpose to create an Arrangement of numbers that includes all even and all odd numbers, we only need to consider the Even Sequences that start with odd numbers similarly to the Main Sequence, which starts with number "1". The sequences then created comprise all existing even and odd numbers, as we see in Figure 3.

We simply used the Main Sequence, which starts with number "1" and follows the rule "ni+1 = 2ni", as a model to build the other Even Sequences with the remaining odd numbers ("3", "5", "7", … "∞"), in a manner to include all even and all odd numbers from "1" to "∞" in the Arrangement.

It is interesting to observe that when we divide any even number in an Even Sequence by "2" we only obtain another even number (with the sole exception of the one relating to the secondary gate of said Even Sequence).

This condition explains why we can use the alternative expression "n/2m", to skip intermediate even numbers in a same Even Sequence, and find a reduced Sequence that alternates odd and even numbers from infinity to number "1". It also explains why the main gates generated by the powers of number "4" in the Main Sequence receive all Sequences built upon the Conjecture rules.

Each odd number creates an independent Even Sequence, which goes from said odd number to infinity (containing even numbers multiples of “2”, only). That odd number is the secondary gate for the Sequences created within the respective Even Sequence (an independent general Sequence and its Sub-sequences), which works as an exit and forces these Sequences to jump to a different Even Sequence under the arithmetic rule “3n+1”.

THE ARITHMETIC COMMAND

The arithmetic mechanism explains that the two Conjecture rules work as an arithmetic command guiding the Sequences from infinity to number “1”. If we start a Sequence with an odd integer “n_1”, the next number will be the even integer “N_1”, as follows:

$N_1 = 3n_1 + 1$

This is one of the Conjecture rules. Example, consider the odd number “45”:

$n_1 = 45$; $N_1 = 3(45) + 1 = 136$

The resulting even integer “$N_1 = 136$” (or if we start a Sequence with that even number) generates the next odd integer “n_2” under the following formula:

$n_2 = N_1/2^{mi}$, where “m_i” is an integer from “1” to “∞”.

This is a variation (a shortcut) of the other Conjecture rule “n/2”, if we jump the intermediate even numbers in a same Even Sequence. Besides being an odd number, the next number “n_2” must also be an integer, what defines the value of “m” as follows:

$n_2 = 136/2^3 = 17$

This odd integer “17” is the secondary gate used to build the Even Sequence, which contains the first even number “136”.

Since the arithmetic mechanism does not contemplate repetition of numbers, when we repeat that simple process, we will find a main gate, which connects the Sequence to an even number that belongs to the Main Sequence. Following with the example, we have:

$N_2 = 3(17) + 1 = 52$

$n_2 = 52/2^2 = 13$

$N_3 = 3(13) + 1 = 40$

$n_3 = 40/2^3 = 5$

Number “5” is a main gate, which leads the Sequence to an even number in the Main Sequence.

$N_4 = 3(5) + 1 = 16$

Number “16” belongs to the Main Sequence and leads the Sequence directly to number “1”.

$n_4 = 16/2^4 = 1$

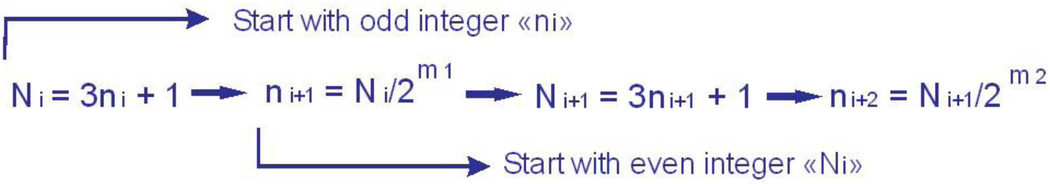
The Sequence becomes a simple series, which alternates odd and even numbers, as follows:

45 136 17 52 13 40 5 16 1

This approach reduces the number of steps, because the Sequence jumps over the intermediate even numbers in each Even Sequence. Besides, it avoids the final loop, since all Sequences after reaching a number in the Main Sequence go directly to “1”.

The relevant aspect of the present approach is the fact that any Sequence under the Conjecture rules obeys an arithmetic command to end up in number “1”, as required by the arithmetic mechanism.

In summary, the Sequences do not have a chaotic and unpredictable nature. The two Conjecture rules impose an arithmetic command to all Sequences, as follows:



n_i = an odd integer

N_i = an even integer

m_i = an integer, from “1” to “∞”

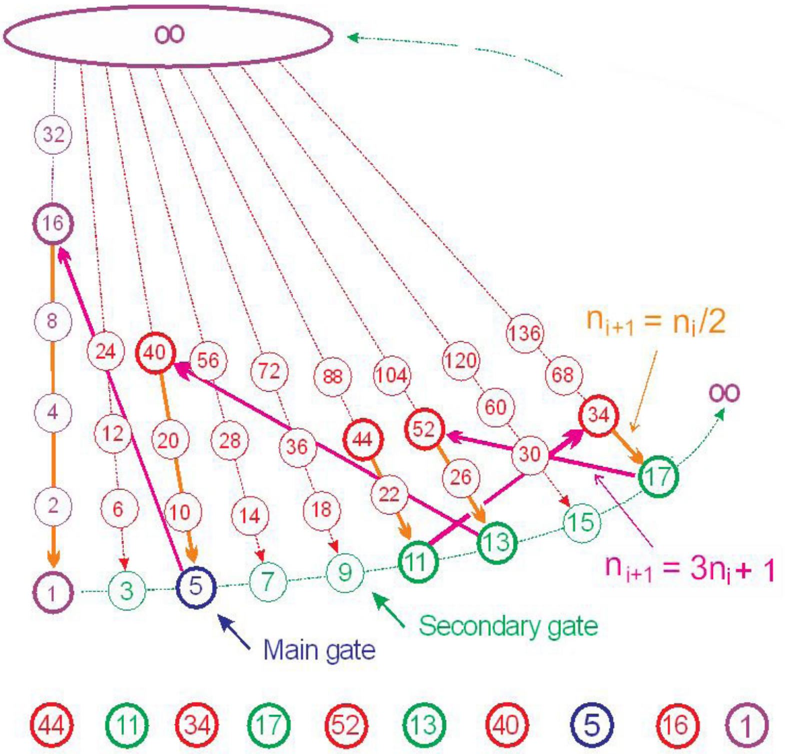
If we start a Sequence with number “2,688”, it would take “7” steps to reach the odd number ruling the corresponding Even Sequence. Since we look for an odd integer, we may go directly to that odd number by using the alternative expression:

$n = N/2^{mi} = 2{,}688/2^7 = 21$

THE ARRANGEMENT AND THE SEQUENCES

In order to see how the arithmetic command works, the Arrangement of Figure 4 shows that each Even Sequence originates an independent general Sequence that comes alone from infinity to its original secondary gate (numbers in green and blue in Figure 4). Each independent general Sequence follows the “n/2” rule until it reaches that secondary gate without being disturbed. That is why the arrows come from infinity to numbers. After reaching its secondary gate, that Sequence, under the rule “3n+1”, joins another Independent general Sequence, but the moving Sequence does not interfere with the pattern of the host Sequence and stays under the control of the host Sequence until the host Sequence reaches its own secondary gate.

Figure 4 - Sequences in the Arrangement.



Since no repetition of numbers occurs, each independent general Sequence moves from the secondary gate of its corresponding Even Sequence to a different Even Sequence without any restriction, and eventually it will join an independent general Sequence that encompasses a main gate (numbers in blue). It means no Sequence will face a loop other than the final loop “1, 4, 2, 1”. Consistency requires the arithmetic mechanism to work back and forth.

Moreover, the odd number that gives access to a specific Even Sequence under the rule “3n+1” is the secondary gate of a different and independent Even Sequence. It means that when an independent general Sequence of an Even Sequence freely moves from its Even Sequence to a different Even Sequence, it stays under the control of the independent general Sequence of the different Sequence until the secondary gate of said different Even Sequence. At the end of the process, all independent general Sequences (and all of their Sub-sequences) get together, reach the Main Sequence and stay under the control of the independent general Sequence of the Main Sequence, until they reach number “1”.

When we elect a finite even number to start a Sequence (as “K”), we know we have a Sub-sequence that belongs to the independent general Sequence ruled by the odd number “k” (k = K/2m), which is the main gate or the secondary gate of the referred independent general Sequence. As an example, consider a Sub-sequence from number “480”:

K = 480 $\quad$ $k = K/2^5$ $\quad$ k = 15 (secondary gate)

This secondary gate “15”, under the operation “3n+1”, also defines to which independent general Sequence that Sub-sequence will jump. In the example, it leads to the even number “46”, which is a number in the independent general Sequence ruled by the odd number “46/21 = 23” (its secondary gate). The first independent general Sequence (and its Sub-sequences) remains under the control of the second independent general Sequence until the latter reaches its own secondary gate (“23”).

At the end of the process, all Sequences will follow the command of the independent general Sequence of the Main Sequence ruled by the odd number “1”.

As we see in Figure 4, if we initiate a Sub-sequence with number “44”, the Sub-sequence moves within certain Even Sequences under the rule “n/2” (orange arrows), and from an Even Sequence to another Even Sequence under the rule “3n+1” (pink arrows) until it joins the independent general Sequence of the Main Sequence:

44 22 11 34 17 52 26 13 40 20 10 5 16 8 4 2 1

In its reduced form, as a series that only alternates odd and even numbers, we have:

44 11 34 17 52 13 40 5 16 1

MAIN GATES SUFFIENCY

Contrarily to the prevailing understand, that an even number randomly generates an odd number or another even number, the Arrangement shows that, while in a same Even Sequence, an even number only generates another even number. An odd number only occurs when the Sequence reaches the secondary gate of the Even Sequence it belongs, and jumps to a different Even Sequence. The Arrangement comprises all even and odd numbers, and contains an infinite number of independent general Sequences. Indeed, the two arithmetic operations alternate even and odd numbers in a continuous process.

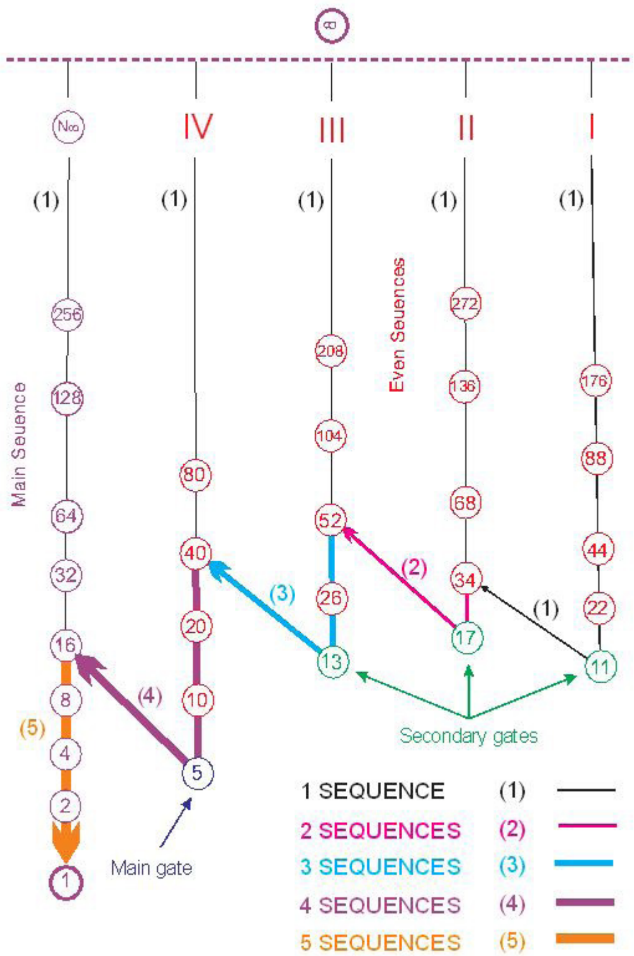
Each independent general Sequence and all of its Sub-sequences can freely move from one Even Sequence to another Even Sequence until they reach a main gate, no matter how many steps they may face. The odd numbers operating as main gates connect all Sequences to the independent general Sequence of the Main Sequence and the remaining odd numbers operating as secondary gates yield even numbers, which exist in the Sequences directly connected to said main gates (as “3” and “113”) or in Sequences connected to these Sequences (as “9” and “151”).

Table 1 shows the even numbers produced by some of these remaining odd numbers, and Figure 7 illustrates how they relate to the main gates through common even numbers. The main gates have the sufficiency to guarantee that all Sequences reach the independent general Sequence of the Main Sequence and go to number “1”.

INDEPENDENCE OF SEQUENCES

Although sharing common sequences of numbers in their paths, each Independent general Sequence keeps its individuality from “∞” to “1”, as illustrated in Figures 2 and 5. As in the case of the Main Sequence, all Even Sequences follow the rule “$n_{i+1} = 2n_i$”, what means that only odd numbers, under the rule “3n+1”, can force a Sequence to move from an Even Sequence to another Even Sequence.

Figure 5 - Confluence of Sequences.



a) The Even Sequence I contains one independent general Sequence, which comes alone from infinity to the original odd number (its secondary gate in green) of said Even Sequence I (“11”). That independent general Sequence encompasses an infinite number of Sub-sequences, as particular cases, with starting numbers below infinity;

b) When that independent general Sequence, under the operation “n/2”, reaches its secondary gate (“11”), it moves to a different even number in the Even Sequence II under the operation “3n+1”, and join the independent general Sequence of the Even Sequence II;

c) The independent general Sequence of the Even Sequence I joins but does not interfere with the pattern of the independent general Sequence of the Even Sequence II;

d) The two Independent general Sequences move on together as a single Sequence under the operation “n/2” until they reach the secondary gate of the Even Sequence II (“17”), when under the operation ”3n+1” they move to a different even number in the Even Sequence III, where they join the independent general Sequence of the Even Sequence III;

e) The two Independent general Sequences join the independent general Sequence of the Even Sequence III, but do not interfere with its pattern. The three independent general Sequences move on together under the operation “n/2” as a single Sequence until they meet the secondary gate of the Even Sequence III (“13”);

f) This standard pattern progresses until the resulting Sequence from all previous independent general Sequences gathered as a single Sequence meets an Even Sequence formed as from a main gate, and gets a ride on the Independent general Sequence of the Main Sequence. In the example, four independent general Sequences reached the main gate “5” in the Even Sequence IV, and join the independent general Sequence of the Main Sequence. We started with one independent general Sequence in each Even Sequence, but five independent general Sequences move together from “16” to 1” (including the general Sequence in the Main Sequence). Obviously, each independent general Sequence comprises an infinite number of Sub-sequences. Indeed, all Independent general Sequences and their Sub-sequences share the final path “16” to “1”.

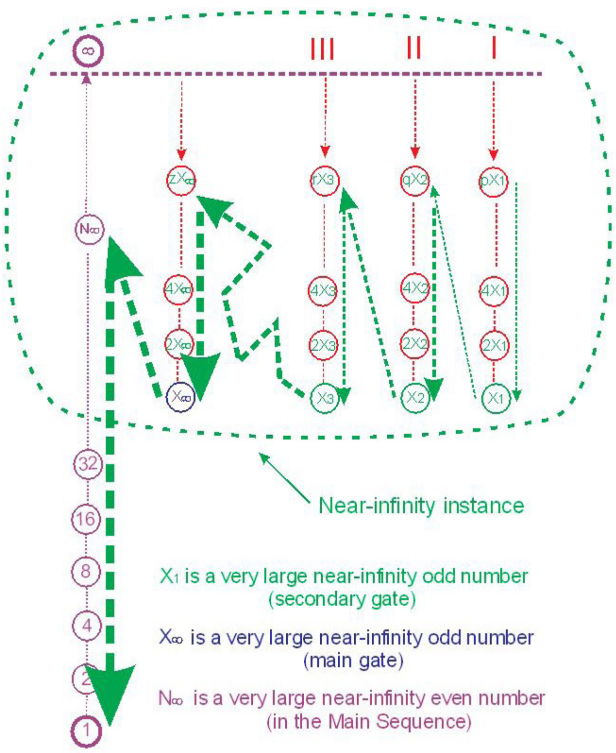
As we see in Figure 4, the Conjecture implies the existence of an infinite number of independent general Sequences (and their respective Sub-sequences), which begin separately in infinity (or near-infinity) and remain isolated until they meet a first odd number, when they start sharing paths. At the end, all of them together reach a common path in the Main Sequence.

Since the Arrangement does not contemplate repetition of numbers, clearly, the Sequences will not face any restriction when moving from one Even Sequence to another different Even Sequence. Inexorably, all Sequences will reach a main gate in order to comply with the Conjecture.

NEAR-INFINITY NUMBERS

When dealing with numbers significantly large we reach an abstract field, in which the validity of arithmetic concepts becomes questionable. Nevertheless, a valid proof must be unconditionally general, what means the Conjecture will have to work for all numbers, including near-infinity numbers. Let us consider Figure 6, in which we see numbers as close to infinity as we can imagine.

Figure 6 - Near-infinity instance.



Let "X_1" be a near-infinity very large odd number. Said number originates an Even Sequence similar to the Main Sequence with numbers "$2X_1$", "$4X_1$", "$8X_1$" … 'pX_1", where "p" is a multiple of "2". There will be an independent general Sequence (and many Sub-sequences) from infinity to that secondary gate "X_1" under the Conjecture operation "n/2".

After reaching its secondary gate "X_1", said independent general Sequence moves to a different even number in a different Even Sequence when following the Conjecture operation "3n+1", in which "X^2" is the secondary gate of that different Even Sequence. The independent general Sequence of "X_1" joins the independent general Sequence of "X_2", without interfering with the path of the host Sequence until it reaches "X_2". "X_2" is a number, which can be lower or greater than, but not equal to "X_1".

This process goes on until the resulting sequence (the confluence of all previous independent general Sequences) meets an even number in an Even Sequence formed as from a main gate as "Xꚙ" and jumps to "Nꚙ", with the purpose to move along with the independent general Sequence of the Main Sequence. To be consistent, and since we deal with numbers, we have to admit the arithmetic concepts remain valid, and the arithmetic mechanism also performs properly when we deal with near-infinity numbers, what makes our proof unconditionally general.

It does not matter what number starts a Sequence or how far a Sequence may go. The Main Sequence and the main gates will be present to receive said Sequence and bring it to number "1".

No Sequence will diverge to infinity, but Sequences may start in infinity.

In practice, we stay within finite numbers (Sub-sequences) far away from infinity, because a sequence from infinity will converge to number "1", but it will require an infinite number of steps to accomplish the task. Arithmetic consistency supports this reasoning approach.

FINAL COMMENTS

We understand infinity as an endless approximation to an abstract target, which we will never reach. If we accept that we never reach infinity (due to an endless approximation), we have to be consistent and handle puzzles as the Collatz Conjecture under the same concepts, what challenges ingenuity and requires a non-conventional approach.

In line with this reasoning, we may reach valid conclusions with the consistent use of sound arithmetic principles currently acceptable, as I did in this paper. If we build a growing sequence of numbers by multiplying each new number by "2", no matter how far we go, we will end up with a number. This implies that if we successively divide each number by "2" we will return to the starting number.

With the sole help of current rules of elementary arithmetic it was possible to identify an arithmetic mechanism and build an Arrangement of numbers, which demonstrated that the Conjecture rules imply the existence of an infinite number of independent general Sequences flowing from infinity to the final loop “1, 4, 2, 1”.

As we see in Figure 7, each odd number, from “1” to “∞” (as a main gate or as a secondary gate), commands a specific independent general Sequence. Each independent general Sequence comprises an infinite number of Sub-sequences when the starting number is a number in between infinity and the odd number, which commands the referred independent general Sequence. An independent general Sequence may join another independent general Sequence (and share a common sequence of numbers), but all of them remain as independent Sequences from “∞” to “1”.

When we choose any finite number to test the Conjecture, we deal with a Sub-sequence, a particular case of an Independent general Sequence. The first odd number that Sub-sequence encounters is the main gate or the secondary gate that commands the referred independent general Sequence. As an example, see the Sub-sequence with number “44” in Figure 4. The secondary gate “11” commands the independent general Sequence that encompasses the chosen Sub-sequence with number “44” (and many others Sub-sequences). This is the reason I stated we could ignore the Sub-sequences in the analysis of the Conjecture.

Figure 2 shows that when we move from the Main Sequence to the numbers following the inverses of the arithmetic operations, we have many options to reach numbers and infinity. From any main gate or secondary gate we may apply the rule “$n_i+1 = 2n_i$” and go to infinity in the same Even Sequence, or apply the rule “$n_i+1 = (n_i - 1)/3$” to certain numbers in any Even Sequence and jump to a different Even Sequence. Differently, when we move from any number we may choose under the Conjecture rules there is no option, but obey the arithmetic command. As we see in Figures 2 and 7, the chosen number starts a Sequence, which converges to number “1” in the Main Sequence, no matter how many steps it takes.

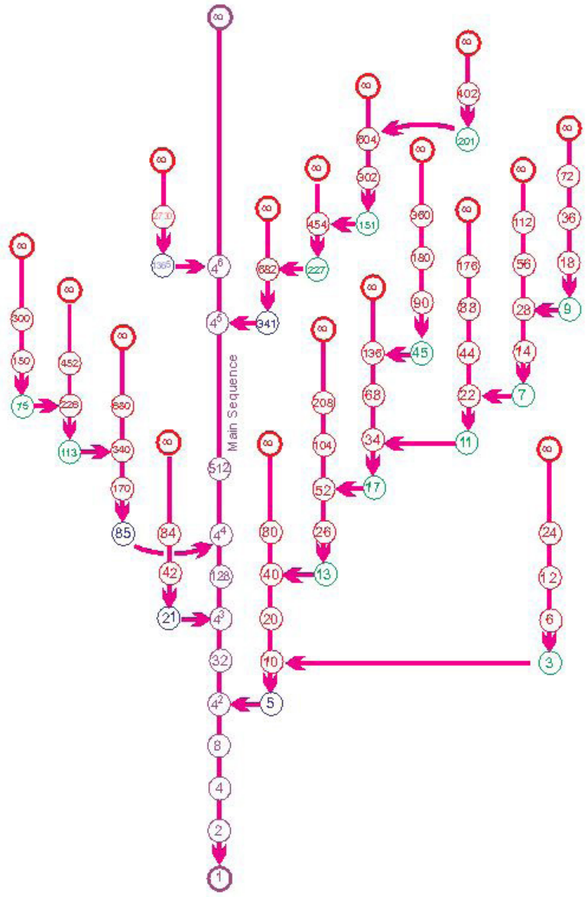
It is my belief that people always attempted to prove the Conjecture reasoning from starting numbers to the final path “4” to “1”, as if the Sequences were random arrangements of numbers of a chaotic and unpredictable nature. In this paper, I adopted the opposite approach, by assuming that the Sequences obey an arithmetic mechanism determined by the inverse of the two arithmetic operations, which rule the Conjecture, as illustrated in the partial Arrangement of Figure 7. The illustration clearly shows the relevance of the main gates (in blue) and of the secondary gates (in green) in their roles to connect all Sequences to the Main Sequence.

The arithmetic mechanism and the Arrangement tell us the Sequences will not diverge to infinity, and will not face any loop other than the final loop “1, 4, 2, 1”, because they freely move from an Even Sequence to another Even Sequence, and converge to 1”. In case a Sequence starts in infinity, it nevertheless will reach number “1”. However, for a number in infinity to reach a main gate and get a ride on the Main Sequence under the Conjecture rules, it would take as many steps as that odd number in the main gate would take to reach that same initial number in infinity under the inverses of the referred rules. The Conjecture works for any number, but for practical purposes, we must restrict its application to finite numbers.

We may say that, under the present state-of-the-art mathematics, the Collatz

Conjecture is a theorem. The Collatz Conjecture imply an arithmetic command, which forces all Sequences built under the Conjecture rules to end up in number “1”. In its reduced form, each sequence contemplates a series, which alternates odd and even numbers.

Figure 7 - Independent general Sequences.



THE AUTHOR

SANDOVAL AMUI

Mr. AMUI graduated in civil engineering from the University of Brazil, in Rio de Janeiro, got a M.Sc. degree in petroleum engineering from Louisiana State University, and attended other graduate courses in offshore engineering offered by The University of Texas at Austin. He is also an attorney, and retired in 2020, after many years of work with international oil companies and law firms. During his long lasting carrier, he published articles and books on technical and legal subjects, as well as essays, tales and books on several subjects of general literature. Recently he has devoted his time to other personal enjoyable activities, including writing papers and books on mathematics and geometry, areas of the human knowledge he has never had as his professional field of endeavor. In dealing with these subjects, under the principles of simplicity, logic and consistency, he allowed himself to adopt an approach of a complete freedom of reasoning, not tied to any of the prevailing math fundamentals.

Capítulo 14

Novos fundamentos da matemática

Remo Mannarino

RESUMO

Tenho consciência do caráter disruptivo das proposições encerradas neste trabalho que ora apresento, mas, ao publicá-lo, minha intenção, para não dizer ambição, é vê-lo questionado e discutido. Pois não aceito mais os fundamentos tradicionais da matemática. No estudo da matemática, nos tempos colegiais, nunca consegui entender a necessidade dos números negativos, como também não alcancei nenhuma explicação para o resultado positivo obtido na multiplicação de dois fatores negativos. Assoberbava-me também a questão dos números "imaginários", não postulados a priori, mas gerados nas operações com números negativos, ou seja, uma entidade que mal entendo gerando outra que entendo menos ainda! Não sou matemático, longe disso, mas decidi revisitar essas questões há pouco mais de cinco anos, dedicando meu tempo de octogenário ocioso à pesquisa dos fundamentos da matemática. A palavra "número" traz consigo a conotação de quantidade, mas o que seria uma quantidade negativa? Na busca exaustiva da resposta para essa questão, acabei concluindo que o que se chama de número negativo é o resultado de uma soma algébrica, nos casos em que esta resulta negativa! Mas soma algébrica de quê? Resposta: soma algébrica de contagens. Os números são neutros! Não há números positivos, nem números negativos, muito menos números imaginários. O que há são contagens positivas e contagens negativas. Os cálculos devem ser feitos com contagens, ou seja, com seus números e suas unidades! O passo subsequente foi estudar as somas algébricas, o que me permitiu saber que há multiplicações proibidas na matemática, motivo pelo qual as equações, um assunto da aritmética, organizadas com contagens de módulos, são sempre do primeiro grau. Os polinômios, um assunto da geometria, são construídos com passos e unidades derivadas dos mesmos e só podem ser do primeiro, do segundo e terceiro graus. É despropositado considerar como equação um polinômio igualado a zero. É importante observar que não há multiplicadores negativos, o que permite, a um só tempo, refutar *in limine* a existência de números imaginários e explicar por que é positivo o resultado da multiplicação de dois fatores negativos. O artigo que ora apresento me parece acessível e descomplicado, mas sua leitura exige com certeza um pouco de atenção e paciência. Achei necessário iniciá-lo com algumas definições, até mesmo a de número, e apresentar os diversos tipos de contagens. Também foi conveniente introduzir alguns conceitos que me ajudaram nas explicações ao longo do texto, como "módulo", "passo", 'equações ou polinômios que importam ou prestantes" "equações ou polinômios lúdicos", "número de vezes", e outros. O Apêndice I trata do trinômio do segundo grau e da fórmula de Baskhara. O Apêndice II trata da chamada equação do segundo grau, que na verdade é uma equação lúdica do primeiro grau com duas versões imbricadas como consequência de uma simetria gerada por uma propriedade da multiplicação. O Apêndice III mostra com recursos geomé-

DOI: 10.47573/aya.5379.2.344.14

tricos por que razão é positivo o produto de dois fatores negativos. Termino esta introdução com uma justificativa, quase um pedido de desculpas. Este artigo não está acompanhado de bibliografia, nem mesmo de alguma referência ou citação, pois não logrei alcançar nenhuma fonte tratando das questões nele discutidas.

Palavras-chave: número neutro; expressões numéricas; multiplicações proibidas.

INTRODUÇÃO

Este estudo propõe uma reformulação nos fundamentos da matemática, com fulcro no entendimento de que os cálculos matemáticos devem ser feitos com expressões numéricas de contagens, de medidas, de quantidades físicas ou de contagens abstratas, não com números isoladamente considerados.

A reformulação inicia-se admitindo que os números são neutros, descartando a existência de números positivos, negativos ou imaginários.

E, mais, não existem multiplicadores negativos, sendo certo que, tratando-se de contagens de módulos, só há uma ordem dos fatores, o fator multiplicador seguido do fator a ser multiplicado.

Ver, ainda, que, na matemática relevante, só as contagens de passos e as quantidades físicas podem ser elevadas ao quadrado, como, de resto, a qualquer outra potência.

Equações relevantes são expressas em módulos e polinômios relevantes são expressos em passos e unidades derivadas dos mesmos. Observar também que só existem equações matematicamente relevantes que sejam do primeiro grau e polinômios matematicamente relevantes que sejam do primeiro, do segundo ou do terceiro graus.

E a equação do segundo grau, tão presente em todos os currículos? A resposta é simples: a chamada equação do segundo grau é na verdade uma equação do primeiro grau com duas versões imbricadas, de caráter lúdico, cujas soluções podem ser obtidas aritmeticamente. Considerar como equação do segundo grau o trinômio da parábola igualado a zero é um entendimento que contribui para tumultuar a matemática e atravancar o seu progresso.

TERMINOLOGIA

Este artigo adota arbitrariamente os seguintes termos e expressões:

1. **“módulo”**, para designar um elemento ou membro de um conjunto.
2. **“passo”,** para designar uma unidade de distância adotada para fazer um estudo geométrico.
3. **“contagem”**, para designar o resultado de uma aferição ou de uma verificação de ordem ou posicionamento. Há quatro tipos de contagens:

- "contagens de módulos", que servem às equações do primeiro grau;

- "contagens de passos", que servem aos polinômios do primeiro, do segundo e do terceiro graus.

- "contagens abstratas", que servem para aferir ordens e posições, definindo um "número vinculado".

- "contagens de "número de vezes", que definem multiplicadores.

As contagens abstratas e as contagens de "número de vezes" são definidas por um número "vinculado" a essas contagens, mas as contagens de módulos e de passos são expressas por um número e uma unidade alusiva.

4. **"quantidade física"**, para designar o resultado, expresso por um número e uma unidade, de uma aferição relacionada com um estado físico ou um fenômeno físico. As quantidades físicas diferem das contagens anteriormente definidas por não resultarem de somas algébricas e são usadas de acordo com o estabelecido nas fórmulas e leis científicas.
5. **"números isolados"** - para designar números que apenas expressam uma quantidade e não se relacionam a nenhuma contagem ou quantidade física.
6. **"equações ou polinômios de caráter lúdico"** – equações ou polinômios construídos com números isolados.
7. **"equações que importam, prestantes ou relevantes"** – são aquelas construídas com contagens de módulos.
8. **"polinômios que importam, prestantes ou relevantes"** – são aqueles construídos com contagens de passos e de seus derivados.

DESENVOLVIMENTO

Números e Contagens

O número é um indicador, múltiplo até o infinito, usado para expressar a magnitude de uma contagem ou de uma quantidade física.

O número é neutro, um indicador sem sinal.

Os sinais de mais (+) e de menos (-) são na verdade atributos de contagens. De fato, a contagem de módulos e a contagem de passos resultam de uma sucessão de adições e subtrações de contagens parciais, configurando uma soma algébrica, que pode resultar positiva ou negativa. A contagem resultante é sempre referida a um virtual ponto zero. Desse modo, uma expressão numérica negativa é, relativamente ao ponto zero, a imagem de uma contagem, sendo esta, por sua vez, a imagem da sua própria imagem.

Contagens de Módulos

A contagem de módulos é uma soma algébrica de "coisas" ou "elementos" iguais ou assim considerados para fins de aferição; por exemplo, 100 laranjas, 100 móveis, 100 alunos. As contagens de módulos são utilizadas na aritmética, em especial na resolução de problemas por meio de equações prestantes, todas do primeiro grau.

Contagens de Passos

As contagens de passos são utilizadas na geometria, para estudar linhas, figuras e sólidos. Uma unidade básica, *o* ***passo***, é usada para aferir comprimentos ou posições. Uma segunda unidade, *o* ***passo²***, quadrado da unidade básica, é usada para quantificar áreas. Uma terceira, o ***passo³***, cubo da unidade básica, é usada para quantificar volumes.

O passo pode ser uma unidade adotada por convenção, como o metro, tendo o metro quadrado e o metro cúbico como unidades derivadas. As três unidades são a base das expressões numéricas da geometria, respectivamente, comprimentos, áreas e volumes.

Também pode ser o passo o lado de uma quadrícula ao acaso em uma folha de desenho (caso em que essa unidade fica subentendida, tanto quanto *o passo*^{2}, a unidade dela derivada). O quadrado da quadrícula, que exprime o passo^2, pode, no desenho, ser aumentado ou reduzido discricionariamente nos termos de alguma escala arbitrária.

É importante observar que a expressão numérica da contagem de passos em nenhuma hipótese pode ser elevada a uma potência maior que três, nem a alguma potência fracionária, pois essas operações implicariam dimensões que não existem.

Contagens Abstratas

Uma contagem abstrata (que poderíamos chamar de "número vinculado") é a expressão numérica de uma posição ou de uma ordem. A expressão numérica de uma contagem abstrata não tem unidade explícita, sendo representada apenas por um número. Por exemplo, o sexto cliente de uma fila ou a oitava economia do mundo.

Contagens de "Número de Vezes"

Neste texto a expressão "número de vezes" será tomada como equivalente a "multiplicador". Deve-se observar, não obstante, que o multiplicador pode ser um número fracionário. Trata-se de uma contagem que não aceita subtrações e nunca pode ser negativa. Não há, com efeito, multiplicadores negativos!

Quantidades Físicas

Seus números e unidades são usados em fórmulas da maneira estabelecida em uma teoria científica. As quantidades físicas em geral não são aferidas mediante somas algébricas, mas de acordo com processos científicos especiais.

As Unidades Envolvem-se nos Cálculos

As unidades, se presentes nas contagens, devem, igualmente, estar presentes nos cálculos, dos quais podem resultar novas unidades, o que se observa nos dois exemplos abaixo:

1. No cálculo do volume de um sólido, um exercício geométrico, os números são dados em metros e a resposta é obtida em metros cúbicos.
2. No cálculo da força que atua sobre um corpo, que é um exercício da física, a massa é dada em quilogramas, a aceleração, em metros por segundo ao quadrado, sendo a resposta obtida em newtons.

Os cálculos são feitos com números, sob a égide das expressões numéricas, o que significa saber, por exemplo, se é possível ou não fazer multiplicações ou como expressar o resultado da operação. Tudo feito com o cuidado de observar o que acontece com as unidades.

Em outras palavras, devemos respeitar as regras do jogo.

Entendendo a Multiplicação

A multiplicação é, numa soma algébrica, um mecanismo que permite adicionar, como única parcela, a mesma contagem um "número de vezes" a que se chama de multiplicador. Trata-se de uma contagem abstrata de caráter auxiliar.

Neste artigo a expressão "número de vezes" e a palavra "multiplicador" têm igual significado. Como já referido, o multiplicador pode ser inteiro ou fracionário.

O multiplicador ou "número de vezes" é sempre neutro. Em outras palavras, não existe "número de vezes" ou multiplicador negativo!

Por outro lado, nenhuma outra contagem pode multiplicar um multiplicador! Um multiplicador só pode ser multiplicado por outro multiplicador. Eis que nos cálculos com contagens de módulos a ordem dos fatores altera o produto! Três salas de aula de (= três vezes) vinte alunos totalizam sessenta alunos. Mas vinte alunos em três salas não perfazem sessenta salas!

Ver, portanto, que uma contagem de módulos nunca multiplica outra contagem de módulos! Não faz sentido multiplicar um lucro no balanço pela área de um terreno ou elevar uma dívida bancária ao quadrado. Até parece um truísmo, mas, nada obstante e como veremos, um entendimento fundamental na matemática!

Contagens Multiplicadoras e Contagens Multiplicadas

Vamos verificar como se comporta cada contagem em relação à multiplicação:

- Contagem de "número de vezes": um "número de vezes" pode multiplicar as outras contagens, até mesmo outro "número de vezes", tanto quanto multiplicar números isolados. Uma contagem multiplicada por um "número de vezes" dá lugar a outra contagem de mesma unidade: 5 vezes 10 = 50; 5 vezes 10 laranjas = 50 laranjas;

5 vezes 10 metros = 50 metros; 5 vezes 10 quilos = 50 quilos; (5 vezes) vezes (5 vezes) = 25 vezes.

- Contagem de módulos: uma contagem de módulos pode ser multiplicada por “um número de vezes”, mas não pode ser usada como multiplicador de outra contagem de módulos ou de qualquer outra contagem. A consequência é que as equações que importam, ou seja, aquelas que envolvem módulos, são sempre do primeiro grau.

- Contagens de passos: as contagens de passos podem ser multiplicadas por um “número de vezes”, mas também podem se multiplicar, neste caso obtendo uma área, com unidade ao quadrado, e multiplicar uma área, obtendo um volume, com unidade ao cubo. Como consequência, os polinômios relevantes podem ser de primeiro, segundo e terceiro graus. As contagens de passos estão relacionadas à geometria, ou seja, ao estudo da forma, tamanho e posição relativa de linhas, figuras e sólidos. Uma unidade básica serve para expressar comprimentos. Uma segunda unidade, que corresponde ao quadrado da unidade básica, é usada para quantificar áreas. Uma terceira, o cubo da unidade básica, é usada para quantificar volumes.

- Quantidades físicas: as quantidades físicas, de acordo com fórmulas impostas pela física, e a elas atendendo, podem ser multiplicadas por um “número de vezes”, multiplicar-se ou multiplicar qualquer outra quantidade física, sempre com participação das unidades envolvidas.

Imagens de Contagens e Imagens de Imagens

Podemos imaginar que uma contagem de módulos, assim como uma contagem de passos, esteja linearmente representada no eixo das abscissas, partindo de um ponto zero. Como somas algébricas, essas contagens podem ser positivas ou negativas.

As contagens positivas correspondem metaforicamente aos chamados “números positivos”, enquanto as contagens negativas correspondem metaforicamente aos chamados “números negativos”.

Uma contagem negativa (“um número negativo”) é a imagem de uma contagem positiva (“um número positivo”) de igual magnitude e vice-versa:

(- a) = imagem da contagem “+ a” = - (+ a)

(+ a) = imagem da sua própria imagem = - (- a)

Subtrair Contagens ou Subtrair Imagens de Contagens

Subtração de (+ b)

A subtração de uma contagem corresponde à soma da sua imagem, como a seguir:

(a) - (+ b) = (a) + (- b)

Subtração de (- b)

A subtração da imagem de uma contagem corresponde, por seu turno, à soma da própria contagem (pois uma contagem é a imagem da sua imagem*):*

(a) - (- b) = (a) + (+ b)

Produtos com Fatores Negativos

Uma multiplicação com dois fatores negativos não implica admitir multiplicador negativo, conforme se pode ver nos dois casos a seguir.

Primeiro caso: Multiplicação de (x - a) por (x - b)

A multiplicação com dois fatores negativos é consequência de um acidente matemático que ocorre dentro das operações algébricas, mas nunca em eventos da vida real. Por exemplo, a multiplicação algébrica de (x - a) por (x - b) dá lugar à seguinte soma algébrica:

x^2 - ax – bx + **(- a) x (- b)**

Última parcela da soma algébrica acima, "**(- a) x (- b**)" é, portanto, uma ocorrência no interior de uma operação matemática, cabendo lembrar que estamos multiplicando (x - a) por (x - b), e não (- a) por (- b).

O que significa e qual o resultado P dessa multiplicação incidental com dois fatores negativos?

Resposta: partindo do pressuposto de que o multiplicador é sempre positivo, um dos sinais negativos indica que o produto é negativo e o outro, que tal produto negativo é uma imagem. O resultado é, portanto, a imagem da imagem de uma contagem, ou seja, a própria contagem, positivamente considerada. Do seguinte modo:

P = (- a) x (- b) = - (a) x (- b) = - (- a) x (b) = - (-ab) = + ab

Ver, no Apêndice 3, uma demonstração da igualdade acima com recursos da geometria.

O raciocínio, válido para contagens de passos, vale também em caso de fatores com números isoladamente considerados, isto é, números não vinculados a contagens.

A multiplicação com dois fatores negativos não ocorre no nosso quotidiano, pelo fato de que não há "número de vezes" negativo; ninguém pode cobrar de outrem uma dívida de "menos cinco vezes" o aluguel devido ou receber "menos três vezes" uma dúzia de maçãs.

Segundo Caso: Multiplicação Dentro de uma Equação

Seja o caso de efetuar a multiplicação

P = - 5 (7 - x),

Que ocorra num desenvolvimento algébrico (no interior de uma equação, por exemplo). É evidente que x é uma contagem de passos ou de módulos, ou mesmo uma quantidade física, tanto quanto 7. Ou então 5, x e 7 são números isolados de uma equação lúdica. Em qualquer dos casos, 5 é o multiplicador, que não pode ser negativo. Logo, o que se quer calcular é a imagem de 5 (7 - x).

P = - (5 (7 - x)) =

imagem de (5 (7 - x)) =

imagem de (35 – 5x) =

5x - 35

Um "Número Negativo" Elevado à Potência "n"

A imagem de uma contagem (isto é, um "número negativo") não pode ser a base de nenhuma potência, dado que não pode atuar como multiplicador. Ou seja, não é possível elevar um "número negativo" ao quadrado, ao cubo etc.

Como então interpretar e proceder, se numa operação algébrica com polinômios surgir uma expressão como $(-a)^n$? Resposta: **$(-a)^n$** é igual a **(-a)** multiplicado por **$(a)^{(n-1)}$**, com resultado positivo, se "n" for 2, e resultado negativo, se "n" for 3. De fato, uma multiplicação de caráter acidental, somente possível com contagens de passos, relevante na geometria, no trato com polinômios do segundo e do terceiro graus. Ou com números isolados, nos polinômios de caráter lúdico.

Seja calcular x^2, para x = - 11, e x^3, para x = - 5:

$x^2 = (-11)^2 = -(11) \times (-11) = -(-121) = +121$

$x^3 = (-5)^3 = --(5)^2 \times (-5) = --(25) \times (-5) = -125$

Observação

Um "número negativo" nunca resulta de uma raiz quadrada porque "números negativos" (imagens) não têm quadrado.

Equações

É importante o entendimento de que "equação" é o confronto de duas somas algébricas de contagens construídas para serem iguais, uma das quais, ou ambas, contendo uma contagem desconhecida, que se quer conhecer, designada pela letra "x" e denominada "incógnita".

É um mecanismo desenvolvido caso a caso para a resolução de problemas aritméticos.

As equações que envolvem contagens de módulos são as "equações que importam" ou "prestantes" e as que envolvem números isolados são as "equações lúdicas". No caso geral, sejam "equações que importam" ou "lúdicas", existe um único "x", desconhecido, que se pretende descobrir. Ressalve-se o caso da chamada equação do segundo grau, que é na verdade uma equação ambígua do primeiro grau, lúdica, com duas possibilidades e duas soluções interligadas. Ver Apêndice II.

Uma equação que importa, a de contagens de módulos, sempre tem de incluir duas contagens: uma incógnita x e um termo independente de x. Não existe equação sem termo independente de x.

As equações de contagens de módulos são relevantes em matemática, enquanto as de números isolados são apenas lúdicas. Por que lúdicas? Porque a princípio despertam interesse restrito, meramente recreativo, sem aplicação na vida real. Qual a utilidade, que não lúdica, de encontrar números isolados e sem nenhuma conexão com a realidade, ou seja, números que nada significam? Podemos, por exemplo, construir uma equação e descobrir que os três "números" consecutivos que somam 141 são 46; 47; e 48, mas não há nenhuma utilidade, que não recreacional, nessa resposta.

A equação envolvendo números isolados pode ser de qualquer grau, desde que resulte de uma igualdade imposta a duas somas algébricas a partir de um problema proposto. No entanto, não é fácil construir equações de grau maior que um. Se, não obstante, puderem ser construídas, outro problema será resolvê-las.

A única equação de grau superior que se conhece é a equação lúdica, do segundo grau, necessária para encontrar "dois números de soma S e produto P". Um caso excepcional de equação com duas incógnitas, que, não obstante, corresponde na verdade a uma equação do primeiro grau abrigando duas versões imbricadas por uma questão de simetria.

Seja agora comentar sobre a dica de multiplicar "(x - a)" por "(x - b)" por "(x - c)" etc., "n" vezes, e igualar o resultado a zero para obter uma "equação" de grau "n", com "n" "raízes". Trata-se de uma equação falsa, pois não foi erigida impondo igualdade a duas somas algébricas de contagens. O polinômio lúdico obtido é certamente igual a zero para x = a, para x = b, para x = c, e assim por diante, mas encontrar essas "raízes" é exercício tedioso, certamente inútil, de enxugamento de gelo.

Ressalte-se, ainda uma vez, que a equação é uma igualdade imposta a duas somas algébricas de contagens, nas quais existe um termo desconhecido, designado pela letra "x" e denominado "incógnita". Se a incógnita for uma contagem de módulos, a equação é necessariamente do primeiro grau porque uma contagem de módulos não pode ser multiplicada por outra contagem de módulos ou elevada a qualquer potência.

Polinômios

Assim como a contagem de módulos serve à aritmética, a contagem de passos serve à geometria, da qual um dos instrumentos é o polinômio, uma espécie de fórmula para estudar linhas, figuras, sólidos e suas relações.

Os"polinômios que importam" operam com contagens de passos e suas duas unidades derivadas (passo, passo^2 e passo^3) e podem ser de primeiro, segundo e terceiro graus.

Se o polinômio for do primeiro grau, é uma contagem de passos; se do segundo grau, uma área; se do terceiro grau, um volume. Todos os polinômios de grau acima de três são lúdicos.

O polinômio é uma fórmula, não um confronto de somas algébricas de contagens, e nesta condição o seu valor pode corresponder a todo e qualquer valor de "x", arbitrariamente escolhido. Diversamente, o "x" de uma equação é único e responde a um problema proposto. Igualado um polinômio a zero, a igualdade resultante corresponde aos pontos nos quais ele se anula, não dando surgimento a uma equação.

Matemática na Ciência

A ciência tem regras especiais para a matemática e impõe caso a caso suas fórmulas e unidades. A física indica, por alguma fórmula, se a expressão numérica de uma propriedade física pode ser multiplicada por si ou pela expressão numérica de outra propriedade física. Por exemplo, números e unidades estão envolvidos na fórmula da lei da gravidade, na qual a expressão numérica de uma força, em newtons, resulta de cálculos com expressões numéricas em metros e quilogramas:

$F = G.\ m_1.m_2 / r^2$

F = força gravitacional, em "newtons", n

m_1 e m_2 = massas, em "quilogramas", k

r = distância, em "metros", m

G = constante de gravitação universal, em "($n.m^2 / k^2$)", unidade gerada pela fórmula.

Outro ponto de interesse é que a física é livre para elevar suas propriedades a qualquer potência. Por exemplo, a lei de Stefan-Boltzmann estabelece que a potência emissiva (e) do corpo negro é proporcional à quarta potência de sua temperatura absoluta (T):

$e= c.T^4$

e = potência emissiva, em "$watt/m^2$"

T = a temperatura absoluta, em "graus Kelvin."

c = constante de proporcionalidade, em unidades derivadas da fórmula.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As operações matemáticas relativas a equações e polinômios devem ser feitas com expressões numéricas de contagens, envolvendo nos cálculos os números e as unidades das contagens. O número é neutro. Não existem números positivos, negativos ou imaginários.

As expressões numéricas que resultam de somas algébricas (as contagens de módulos e as contagens de passos), estas sim, podem ser positivas ou negativas.

Uma contagem negativa corresponde à sua imagem; uma contagem (positiva) é a imagem da sua imagem. Subtrair uma contagem é adicionar sua imagem à soma algébrica; subtrair a imagem de uma contagem é adicioná-la à soma algébrica.

A multiplicação é, numa soma algébrica, um mecanismo que permite adicionar, como única parcela, a mesma contagem um “número de vezes” a que se chama de multiplicador. O entendimento do que seja uma multiplicação e de suas limitações é fundamental nas decisões e nos processos matemáticos.

Não há multiplicação com multiplicadores negativos. Dois fatores negativos são um acidente algébrico no âmbito de operações algébricas, ensejando resultado positivo, como imagem de um produto negativo. A imagem de uma contagem não pode ser potenciada, pois não há multiplicador negativo. Não existe, pois, raiz quadrada de “número negativo”. Tampouco existem “números imaginários”.

As equações são uma ferramenta da aritmética. As “equações que importam”, construídas necessariamente com contagens de módulos, são sempre do primeiro grau. As equações com números isolados são lúdicas e, se possível construí-las, podem ser de qualquer grau. Os polinômios são uma ferramenta da geometria; os “polinômios que importam”, construídos com contagens de passos, podem ser de primeiro, segundo e terceiro graus.

A “fórmula” de Bhaskara é a junção de duas fórmulas que podem ser demonstradas pela geometria e serve para extrair as raízes de um trinômio do segundo grau. Essas raízes são passos, como todos os pontos do trinômio.

A equação do “segundo grau” é na verdade uma equação do primeiro grau com duas versões, cada uma com uma incógnita numericamente igual a seu multiplicador. Esse entendimento teria evitado muita confusão na matemática; um exemplo foi a insólita criação dos números imaginários

APÊNDICE I

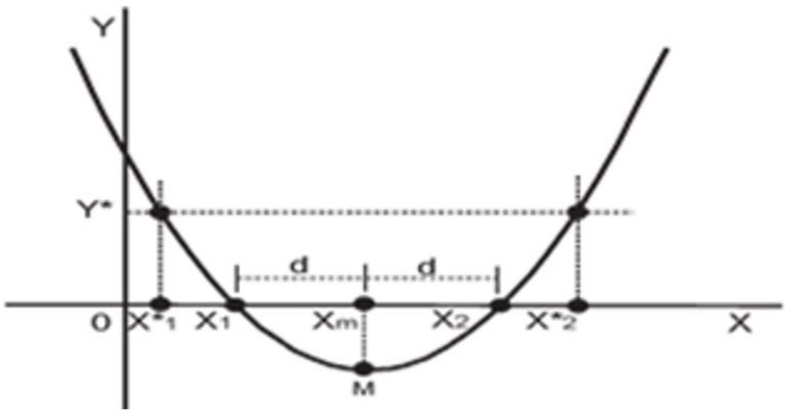
O Trinômio do Segundo Grau

O trinômio do segundo grau é a fórmula geométrica da parábola

$y = ax^2 + bx + c$

Ver, na figura 1, que cada ordenada y* corresponde a dois pontos simétricos da parábola, cujas abscissas são x^*_1 e x^*_2.

Figura 1



As raízes da parábola (x_1 e $x_{2)}$ podem ser calculadas usando a fórmula de Bhaskara, x_1 e $x_2 = (- b \pm \sqrt{(b^2- 4ac)}) /2a$, que assim se pode demonstrar:

$y = ax^2 + bx + c$

$y' = 2ax + b$ (derivada primeira). O ponto M, de ordenada mínima (que corresponde a $y' = 0$) e abscissa x_m, é a referência para a simetria da parábola.

$x_m = - b/2a$

x_m dista "d" das raízes x_1 e x_2.

$x_1 = x_m – d = - (b + 2ad) /2a$

$x_2 = x_m + d = - (b - 2ad) /2a$

Cálculo de x_1

$ax_1^2 + bx_1 + c = 0$

Substituindo, na equação acima,

x_1 por $- (b + 2ad) / 2a$ e desenvolvendo, temos

$x_1 = (- b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}) /2a$ (1)

Cálculo de x_2

$x_2^2 + bx_1 + c = 0$

Substituindo, n\a equação acima,

x_2 por - (b + 2ad) / 2a e desenvolvendo, temos

$x_2 = (- b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}) /2a$

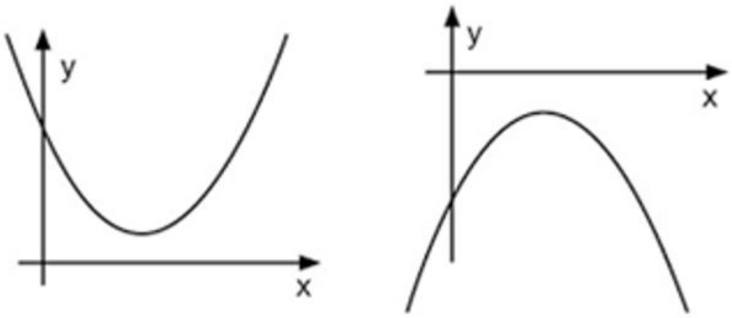
$x_2 = (- b + \sqrt{b^2 - 4ac}) /2a$ (2)

Englobando (1) e (2), temos a fórmula de Baskhara

$(= (- b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) /2a$

Observação importante: a ocorrência de (b^2 - 4ac) menor que zero implica raiz quadrada impossível, indicando que a parábola não possui raízes, por estar totalmente acima ou totalmente abaixo do eixo dos "x", como nas duas representações da Figura 2.

Figura 2



APÊNDICE II

A Equação de Segundo Grau

O trinômio $y = x^2 - 5x + 6$, se igualado a zero, permite calcular os pontos em que se anula a parábola que lhe corresponde, ou seja, suas raízes são 2 e 3, como vimos no Apêndice I. Esse cálculo pode ser feito com o recurso geométrico da fórmula de Baskhara.

Vejamos, por outro lado, o que acontece quando tentamos resolver a seguinte questão: calcular dois números, x_1 e x_2, de soma 5 e produto 6. A qual nos leva a multiplicar "x" por (5-x) e igualar o resultado a 6, ou seja, construir a equação lúdica: $x^2 - 5x + 6 = 0$, construída, portanto, com números isolados.

A igualdade $x^2 - 5x + 6 = 0$ é, desse modo:

- Na geometria: uma equação do segundo grau falsa, que resulta de um polinômio igualado a zero. Os valores envolvidos são contagens de passos ou de seus quadrados.

- Na aritmética: uma equação do segundo grau lúdica, mas real, que resulta de da combinação de dois confrontos de informações para resolver um problema proposto. Não se trata propriamente de uma equação a exprimir um único confronto, mas de uma fusão de duas equações, a saber, $x_1 + x_2 = 5$ e $x_1 . x_2 = 6$.

É possível encontrar x_1 e + x_2 com recursos aritméticos. São dois números isolados cuja soma é 5 e o produto é 6. Calculando x_1, teremos $x_2 = 5 - x_1$.

Para calcular x_1, façamos $x_1 = j + k$, com $j \neq 0$ e $k \neq 0$

$x_1^2 - 5x_1 + 6 = 0$ (1)

Se $x_1 = j + k$, então

$x_1^2 = (j + k)^2 = j^2 + 2jk + k^2$ e

$- 5x_1 = - 5j - 5k$,

de modo que, substituindo em (1), temos

$j^2 + 2jk + k^2 - 5j - 5k + 6 = 0$

Rearranjando

$(2jk - 5k) + (j^2 + k^{2-} - 5j + 6) = 0$

Para garantir a nulidade acima, basta que

$(2jk - 5k) = 0$ (primeira parcela)

e

$(j^2 + k^{2-} - 5j + 6) = 0$ (segunda parcela)

Primeira parcela calcula j

$(2jk - 5k) = 0$

$k \neq o$

$k (2j - 5) = 0$

$j = 5/2 = 2,5$

Segunda parcela calcula k

$(j^2 + k^2 - 5j + 6) = 0$

$(j^2 + k^2 - 5j + 6) = 0$

$j = 2,5$

$(2,5)2 + k^2 - 5 \times 2,5 + 6 = 0$

$k = ½$

Valor de x_1

$x_1 = j + k = 5/2 + ½ = 3$

Valor de x_2

$x_2 = 5 – x_1 = 2$

Obtivemos desse modo os valores de x_1 e x_2 com recursos aritméticos, sem recorrer à formula de Bhaskara.

Elucubração Final sobre a Equação do Segundo Grau

A equação do "segundo grau" é na verdade uma equação do primeiro grau que abriga duas versões diferentes, cada uma com uma incógnita numericamente igual ao seu multiplicador.

Com efeito, consideremos a equação $ax^2 + bx + c = 0$. A equação parece do segundo grau, mas é na verdade do primeiro grau porque nela x^2 é o produto de um "número de vezes" x* por um número isolado x, ou seja, um número isolado multiplicada por um número de vezes de igual valor quantitativo. Não se trata, de fato, de um quadrado. A fusão das duas equações ($x_1 + x_2 = 5$ e $x_1.x_2 = 6$) resultou numa equação do primeiro grau que serve à obtenção de duas incógnitas e nesse mister utiliza em ambas as versões sua soma S e seu produto P.

$x^*_1.\ x_1 - Sx_1 + P = 0,$

$x^*_2.\ x_2 - Sx_2 + P = 0,$

Primeira versão da equação do primeiro grau presente na equação x^2 - 5x + 6 = 0

$2x_1 - 5x_1 + 6 = 0$ $\qquad\qquad x_1 = 2$

Segunda versão da equação do primeiro grau presente na equação x^2 - 5x + 6 = 0

$3x_2 - 5x_2 + 6 = 0$ $\qquad\qquad x_2 = 3$

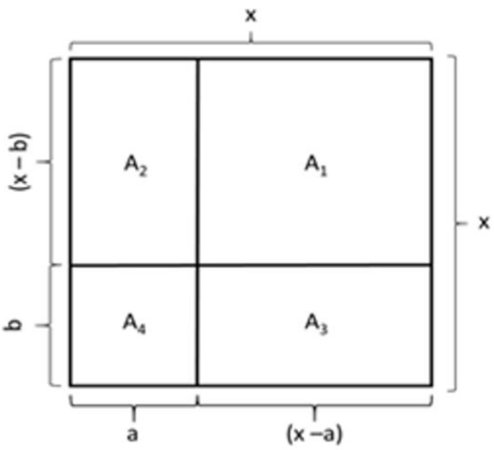
APÊNDICE III

O objetivo aqui é mostrar geometricamente por que é positivo o produto de dois fatores negativos. Assumindo, por exemplo, que (x - a) e (x - b) sejam os lados do retângulo A_1, o cálculo de sua área, (x - a) versus (x - b), desdobra-se numa soma algébrica em que uma das parcelas é o produto (-a) x (-b), como abaixo:

$A_1 = (x - a) \times (x - b) = x^2 - ax - bx + \mathbf{(- a) \times (- b)}$ $\qquad$ (Relação I)

Seja o quadrado de lado "x" e área A, figura 3. Dividamos o lado inferior desse quadrado nas parcelas "a" e "(x - a)", e o lado adjacente esquerdo, nas parcelas "b" e (x – b)" e (x – b).

Figura 3



O quadrado de área A fica assim repartido em quatro retângulos, com áreas A_1, A_2, A_3 e A_4, de forma que:

$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

(A = área do quadrado externo)

$A_1 = A - A_2 - A_3 - A_4$ (“produto”)

Ver que:

A_1 = área do retângulo considerado inicialmente = (x - a) x (x - b)).

$A = + x^2$

$A_2 = + ax - A_4$

$A3 = + bx - A_4$

$A_4 = + ab$

Ao substituir no “produto” os valores, como acima, de A, $A_{2,}$ A_3 e A_4,

obtemos

$A_1 = + x^2 - (+ ax - ab) - (+ bx - ab) - ab$

$A_1 = x^2 - ax - bx +$ **ab** (Relação II)

A_1 (Relação I) = A_1 (Relação II), resultando:

(-a) x (-b) = + ab

Ou seja, **(-a) x (-b)** iguala-se a **+ab** em decorrência e como resultado de uma sucessão de operações necessárias para recuperar uma contagem que de outro modo seria indevidamente subtraída do produto (x - a) x (x - b).

Assim se explica como o produto dos dois fatores negativos resultou positivo e ajuda a entender por que “menos multiplicado por menos dá mais”, em linha com o entendimento de que a multiplicação com dois fatores negativos, (- a) e (- b), gera a imagem de um produto negativo, (- (- ab)), isto é, um resultado positivo (+ ab).

Nunca será demais lembrar que a multiplicação com dois fatores negativos é uma consequência no âmbito de operações algébricas, mas nunca em eventos da vida real. Cabe a observação de que, no exemplo acima, estamos na verdade multiplicando (x - a) por (x - b), e não (- a) por (- b).

Organizador

Paulo Marcos Ferreira Andrade

Mestre em Ensino de Ciências e Matemática Pela UNEMAT. Licenciado em pedagogia pela UNEMAT. Licenciado em Letras:Português/espanhol pela UFMT. Esp. em coordenação pedagógica pela UFMT. Esp. em gestão escolar pela UFMT. Esp. em educação do campo pela AFIRMATIVO. Atua como professor na educação Básica desde de 1999, e atualmente é coordenador pedagógico na Extensão Municipal SOS Criança.

Índice Remissivo

A

abordagem qualitativa 85, 86
adultos 88, 100, 120, 121, 122, 128
alunos 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 51, 52, 58, 59, 60, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 81, 82, 83, 84, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 93, 99, 150, 151
ambiente 12, 14, 15, 16, 17, 20, 23, 24, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 41, 44, 46, 48, 52, 58, 59, 68, 71, 73, 74, 75, 77
ambientes 85
ansiedade 66, 71, 73, 76, 91, 93, 94, 95, 96, 97
aprendizagem 11, 12, 13, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 26, 27, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 40, 41, 49, 50, 51, 58, 59, 60, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 81, 82, 83, 84, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 120, 121, 122, 123, 127
atividades 13, 14, 15, 16, 17, 21, 22, 23, 24, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 40, 41, 42, 44, 46, 48, 49, 52, 58, 59, 60
autismo 26, 28, 29, 30, 31, 34
autoestima 94, 95

B

básica 41, 42, 49, 51

C

calculadora 42, 120, 121, 126, 127
cálculos 13, 38, 47, 58, 147, 148, 151, 156
cidadão 40, 41, 42, 120, 121, 122, 126
colaboração 12, 15, 16, 17, 24
colaborativo 12, 15, 16, 23, 46, 48, 74
conhecimento 13, 15, 16, 19, 23, 24, 28, 34, 35, 40, 44, 46, 58, 59, 64, 65, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 76
conhecimentos 13, 15, 16, 18, 19, 21, 24, 35, 44, 69, 70, 72, 73, 75, 77
consumidor 125

contextualização 41, 43, 66, 67, 68, 72, 73, 77
crítica 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 47, 49

D

deficiência mental 99
desenvolvimento 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 23, 24, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 39, 41, 42, 44, 49, 52, 58, 59, 60, 68, 69, 71, 72, 73, 74, 75, 77, 78, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 91, 92, 93, 98, 99, 101, 102, 153
desenvolvimento cognitivo 80, 81, 82, 84
desmotivação 66, 76, 94, 97
diagnóstico 100, 101, 102
dificuldades 27, 28, 30, 44, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 76, 77, 78, 81, 84, 88, 89, 91, 94, 95, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 108, 109, 110, 113, 114, 115, 117, 122, 127
dinheiro 124, 125, 127
discalculia 94, 95, 101, 102
diversidade 16, 17, 19, 27, 30, 32, 33, 35, 36, 41, 52, 54, 57

E

educação 11, 12, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 40, 41, 42, 44, 49, 50, 58, 67, 75, 76, 77, 78, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 103, 104, 105, 107, 120, 121, 122, 127, 128
educação matemática 80, 81, 83, 84, 85, 86, 91, 92, 93
educativas 12, 14, 16, 18, 22, 23, 36, 37
educativo 15, 71
ensino 6, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 58, 49, 50, 51, 52, 57, 58, 59, 64, 65, 66, 67, 68, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 80, 81, 86, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 89, 90, 93, 94, 106, 98, 103, 104, 105, 107, 108, 109, 110, 111, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 120, 121, 122, 127, 128

escolar 79, 80, 81, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 93, 98, 99, 100, 101, 102
espaço 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24
especiais 12, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 27, 150, 156
especial 12, 19, 21
estratégias 6, 11, 15, 16, 18, 20, 26, 27, 40, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 39, 42, 66, 71, 72, 73, 74, 76, 77, 81, 97, 98, 99, 102, 104, 106, 107, 108, 109, 110, 115, 117, 122, 124
estudantes 14, 15, 16, 24, 26, 32, 35, 44, 50, 60, 66, 67, 68, 70, 72, 78, 80, 85, 86, 87, 92, 93, 94, 103, 104, 108, 110, 117, 120, 121, 123, 126, 127
estudos em psicologia 88
etnomatemática 38, 39
evasão escolar 121, 122
expressões 148, 150, 151, 156

F

fatores cognitivos 94, 95, 97, 104
feira 12, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24
ferramentas tecnológicas 121, 122, 123
financeira 11, 38, 39, 42, 43, 44, 47, 50, 120, 121, 122, 124, 126, 127, 128
financiamento 121, 126
formativo 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 23, 24
fundamental 14, 15, 17, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 46, 47
fundamentos 147, 148

G

gama 20, 29, 51, 52
gamão 51, 52, 53, 54, 55, 56, 60

H

habilidades 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 26, 29, 31, 32, 35, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 45, 47, 48, 49, 51, 54, 58, 59, 60, 64, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 80, 81, 83, 84, 85, 92, 94, 95, 96, 97, 98, 99,

100, 101, 103, 104, 105, 106
habilidades matemática 94
história 17, 24, 51, 52, 64

I

inclusão 12, 14, 16, 17, 18, 21, 22, 23, 24
inclusiva 12, 16, 17, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 40
inclusivos 85, 86, 92
inteiros 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 117

J

jogos 51
jovens 120, 121, 122, 128

L

lúdicas 14, 15, 24, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 58, 154, 155, 157

M

matemática 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 42, 43, 44, 49, 50, 51, 59, 64, 65, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 78, 80, 81, 83, 84, 85, 86, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 103, 104, 105, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 115, 117, 120, 121, 122, 124, 126, 127, 147, 148, 151, 153, 155, 156, 157
matemáticas 14, 15, 18, 20, 34, 35, 38, 40, 48, 49, 66, 69, 73, 74, 77, 80, 81, 83, 84
matemático 13, 15, 22, 44, 51, 60
matemáticos 13, 14, 17, 18, 19, 20, 22, 30, 31, 33, 34, 37, 40, 43, 44, 45, 48, 49, 51, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 76, 77, 78, 83, 84, 92, 93, 98, 100
mercado 120, 122, 125
método 80, 85, 86, 98

multiplicações 62, 147, 148, 151

N

necessidades 12, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 46, 49, 60, 74
neurológicos 98, 99
neutro 148, 149, 151, 156
numéricas 148, 150, 151, 156
número 27, 49, 57, 61, 62, 64, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 156, 157, 161
números 41, 43, 65, 100, 101, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 159, 160

O

oportunidades 16, 17, 20, 24, 36, 58, 77

P

pedagogia 26
pedagógicas 15, 18, 19, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 34, 35, 39, 40, 41, 43, 44, 49, 66, 72, 73, 74, 75, 76, 77
pensamento lógico 80, 82, 84
práticas 12, 14, 15, 18, 19, 23, 26, 27, 28, 30, 33, 34, 36, 37, 40, 41, 42, 43, 44, 46, 48, 49, 66, 67, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 80, 81, 83, 84
problemas 14, 15, 17, 18, 20, 23, 24, 34, 40, 42, 44, 48, 49, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 76, 77, 78
processo 13, 14, 15, 19, 20, 27, 28, 31, 32, 35, 36, 40, 44, 47, 49, 58, 69, 71, 72, 73, 74, 75, 76
processos 67, 82, 85, 86, 92, 100
processos educacionais 85, 86, 92
professores 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 40, 41, 43, 51, 52, 58, 64, 65, 66, 67, 68, 71, 72, 74, 75, 76, 77, 78, 79
proibidas 147, 148
psicologia 80, 81, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94
psicologia escolar 80, 85
psicologia na escola 85

psicólogos 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93

Q

questões 15, 39, 41, 42, 43, 44, 48, 49, 62, 63, 64, 66

R

raciocínio 83, 96, 101, 108, 111, 113, 114, 115, 122, 124, 125, 126
redes públicas 85, 86, 87, 89, 90, 93
resolução 14, 15, 24, 34, 40, 42, 44, 61, 63, 65, 66, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 76, 77, 78

S

sistema 6
sociedade 75, 87, 92, 99, 121
socioambientais 94, 96, 97

T

tecnologias 66, 72, 73, 76, 77, 111, 121, 128
tecnológicos 126, 127
teorias 80, 81, 82

AYA EDITORA
2024