

Jomar Berton Junior



# ANÁLISE DINÂMICA DE MÁQUINAS ROTATIVAS

# **Análise dinâmica de máquinas rotativas**

Jomar Berton Junior

## **Direção Editorial**

Prof.º Dr. Adriano Mesquita Soares

## **Autor**

Jomar Berton Junior

## **Capa**

AYA Editora

## **Revisão**

O Autor

## **Executiva de Negócios**

Ana Lucia Ribeiro Soares

## **Produção Editorial**

AYA Editora

## **Imagens de Capa**

br.freepik.com

## **Área do Conhecimento**

Engenharias

# **Conselho Editorial**

Prof.º Dr. Adilson Tadeu Basquerote Silva

*Universidade para o Desenvolvimento do Alto Vale do Itajaí*

Prof.º Dr. Aknaton Toczec Souza

*Centro Universitário Santa Amélia*

Prof.ª Dr.ª Andréa Haddad Barbosa

*Universidade Estadual de Londrina*

Prof.ª Dr.ª Andreia Antunes da Luz

*Faculdade Sagrada Família*

Prof.º Dr. Argemiro Midonês Bastos

*Instituto Federal do Amapá*

Prof.º Dr. Carlos López Noriega

*Universidade São Judas Tadeu e Lab. Biomecatrônica - Poli - USP*

Prof.º Me. Clécio Danilo Dias da Silva

*Centro Universitário FACEX*

Prof.ª Dr.ª Daiane Maria De Genaro Chirolí

*Universidade Tecnológica Federal do Paraná*

Prof.ª Dr.ª Danyelle Andrade Mota

*Universidade Federal de Sergipe*

Prof.ª Dr.ª Déborah Aparecida Souza dos Reis

*Universidade do Estado de Minas Gerais*

Prof.ª Ma. Denise Pereira

*Faculdade Sudoeste – FASU*

Prof.ª Dr.ª Eliana Leal Ferreira Hellvig

*Universidade Federal do Paraná*

Prof.º Dr. Emerson Monteiro dos Santos

*Universidade Federal do Amapá*

Prof.º Dr. Fabio José Antonio da Silva

*Universidade Estadual de Londrina*

Prof.º Dr. Gilberto Zammar

*Universidade Tecnológica Federal do Paraná*

Prof.ª Dr.ª Helenadja Santos Mota

*Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Baiano, IF Baiano - Campus Valença*

Prof.ª Dr.ª Heloísa Thaís Rodrigues de Souza

*Universidade Federal de Sergipe*

Prof.ª Dr.ª Ingridi Vargas Bortolaso

*Universidade de Santa Cruz do Sul*

Prof.ª Ma. Jaqueline Fonseca Rodrigues

*Faculdade Sagrada Família*

Prof.ª Dr.ª Jéssyka Maria Nunes Galvão

*Faculdade Santa Helena*

Prof.º Dr. João Luiz Kovaleski

*Universidade Tecnológica Federal do Paraná*

Prof.º Dr. João Paulo Roberti Junior

*Universidade Federal de Roraima*

Prof.º Me. Jorge Soistak

*Faculdade Sagrada Família*

Prof.º Dr. José Enildo Elias Bezerra

*Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará, Campus Ubajara*

Prof.ª Dr.ª Karen Fernanda Bortoloti

*Universidade Federal do Paraná*

Prof.ª Dr.ª Leozenir Mendes Betim

*Faculdade Sagrada Família e Centro de Ensino Superior dos Campos Gerais*

Prof.ª Ma. Lucimara Glap

*Faculdade Santana*

Prof.º Dr. Luiz Flávio Arreguy Maia-Filho

*Universidade Federal Rural de Pernambuco*

Prof.º Me. Luiz Henrique Domingues  
*Universidade Norte do Paraná*

Prof.º Dr. Milson dos Santos Barbosa  
*Instituto de Tecnologia e Pesquisa, ITP*

Prof.º Dr. Myller Augusto Santos Gomes  
*Universidade Estadual do Centro-Oeste*

Prof.ª Dr.ª Pauline Balabuch  
*Faculdade Sagrada Família*

Prof.º Dr. Pedro Fauth Manhães Miranda  
*Universidade Estadual de Ponta Grossa*

Prof.º Dr. Rafael da Silva Fernandes  
*Universidade Federal Rural da Amazônia, Campus  
Pauapebas*

Prof.ª Dr.ª Regina Negri Pagani  
*Universidade Tecnológica Federal do Paraná*

Prof.º Dr. Ricardo dos Santos Pereira  
*Instituto Federal do Acre*

Prof.ª Ma. Rosângela de França Bail  
*Centro de Ensino Superior dos Campos Gerais*

Prof.º Dr. Rudy de Barros Ahrens  
*Faculdade Sagrada Família*

Prof.º Dr. Saulo Cerqueira de Aguiar Soares  
*Universidade Federal do Piauí*

Prof.ª Dr.ª Silvia Aparecida Medeiros  
Rodrigues  
*Faculdade Sagrada Família*

Prof.ª Dr.ª Silvia Gaia  
*Universidade Tecnológica Federal do Paraná*

Prof.ª Dr.ª Sueli de Fátima de Oliveira Miranda  
Santos  
*Universidade Tecnológica Federal do Paraná*

Prof.ª Dr.ª Thaisa Rodrigues  
*Instituto Federal de Santa Catarina*

© 2023 - AYA Editora - O conteúdo deste Livro foi enviado pelo autor para publicação de acesso aberto, sob os termos e condições da Licença de Atribuição *Creative Commons* 4.0 Internacional (CC BY 4.0). As ilustrações e demais informações contidas neste Livro, bem como as opiniões nele emitidas são de inteira responsabilidade de seu autor e não representam necessariamente a opinião desta editora.

---

B547 Berton Junior, Jomar

Análise dinâmica de máquinas rotativas [recurso eletrônico]. / Jomar Berton Junior -- Ponta Grossa: Aya, 2023. 62 p.

Inclui biografia

Inclui índice

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

ISBN: 978-65-5379-231-9

DOI: 10.47573/aya.5379.1.129

1. Máquinas - Vibração. 2. Máquinas - Defeitos. 3. Máquinas - Manutenção e reparos. I. Título

CDD: 621.8

---

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Bruna Cristina Bonini - CRB 9/1347

**International Scientific Journals Publicações  
de Periódicos e Editora LTDA**

**AYA Editora©**

**CNPJ:** 36.140.631/0001-53

**Fone:** +55 42 3086-3131

**E-mail:** contato@ayaeditora.com.br

**Site:** <https://ayaeditora.com.br>

**Endereço:** Rua João Rabello Coutinho, 557  
Ponta Grossa - Paraná - Brasil  
84.071-150

# SUMÁRIO

<b>APRESENTAÇÃO .....</b>	<b>8</b>
<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>9</b>
Objetivos .....	11
Objetivo geral .....	11
Objetivo específico.....	11
<b>REFERENCIAL TEÓRICO .....</b>	<b>12</b>
Vibração .....	12
Lei de Hooke .....	12
Sistema massa-mola .....	13
Modelagem de rotores .....	15
Sistema de coordenadas .....	15
Efeito giroscópio .....	16
Rotor rígido sobre suporte flexível com dois graus de liberdade .....	16
Rotor rígido sobre suporte flexível com quatro graus de liberdade .....	18
Negligenciando os efeitos giroscópios e o efeito elástico do acoplamento .....	20
Incluindo o efeito elástico do acoplamento .....	22
Incluindo o efeito giroscópico.....	23
Coordenadas complexas .....	27
Rotor rígido sobre suportes flexíveis anisotrópicos .....	28
Mapas de frequências naturais .....	29
Efeito do amortecimento nos suportes .....	30
Rotor rígido com suporte isotrópico e amortecido .....	31

Rotor rígido em suporte com amortecimento anisotrópico.....	33
Balanceamento de rotores.....	34
Balanceamento de rotores rígidos .....	36
Balanceamento em um plano .....	37
Balanceamento em dois planos.....	38
<b>EXEMPLOS NUMÉRICOS .....</b>	<b>43</b>
Caso 1 .....	43
Caso 2 .....	45
Caso 3.....	47
Caso 4.....	49
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>53</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>55</b>
<b>SOBRE O AUTOR .....</b>	<b>57</b>
<b>ÍNDICE REMISSIVO .....</b>	<b>58</b>

# Apresentação

---

Caro leitor(a),

A presente pesquisa consiste no estudo do comportamento de máquinas rotativas, bem como seu comportamento dinâmico, tendo em vista a grande utilização atual destas máquinas em indústrias e a alta tecnologia necessária para o desenvolvimento de alternativas viáveis.

Realizou-se um estudo detalhado sobre rotores rígidos e balanceamento de máquinas, promovendo análises e comparações do comportamento dinâmico de estruturas rotativas, bem como as reações às alterações variadas de propriedades do sistema; além da elaboração de rotinas computacionais que possam ser usadas no auxílio da aprendizagem.

Assim, este trabalho apresenta de forma didática e de fácil entendimento os resultados obtidos, visando à melhoria do aprendizado para leigos e também para pessoas que possuam certo entendimento sobre o assunto, buscando assim a ampliação do conhecimento em uma área que ainda tem muito a desenvolver.

Boa leitura!

*Jomar Berton Junior*

## INTRODUÇÃO

Atualmente, com o grande crescimento tecnológico mundial se observou inúmeras modificações e aperfeiçoamentos em projetos antigos, além da constante criação de novas máquinas e ferramentas de alta performance, pode-se ver um grande horizonte para as já seculares máquinas rotativas. Através deste crescimento as empresas vêm investindo na modernização de máquinas através de sistemas mecânicos rotativos, os quais são de análise bastante complexa.

Quando se pensa em máquinas rotativas, logo se imagina alguns projetos simples, sem muito para ser complementado, porém temos uma enormidade de novos equipamentos de alto desempenho e um grande campo em que se podem introduzir conceitos básicos a fim de economizar recursos naturais, financeiros, etc.

Como exemplos de áreas de aplicação dos conceitos sobre máquinas rotativas em aplicações de alto desempenho pode-se citar as turbomáquinas, ultracentrífugas, máquinas de usinagem de alta precisão, aplicações aeroespaciais, dentre outros. Um grande exemplo que mostra essas aplicações é o turbo do motor principal dos ônibus espaciais da NASA, a qual descarrega energia a taxas de 1 GW (1.341.000 HP), sendo que seu peso é aproximadamente o mesmo de um carro moderno (VANCE; ZEIDAN; MURPHY, 2010).

O estudo de máquinas rotativas começou em 1869 quando Rankine desenvolveu um modelo massa mola para prever o comportamento de máquinas submetidas a uma rotação. Este estudo foi de extrema importância para os dias atuais, porém, Rankine observou que o eixo não era adequado e por isso não poderia atingir velocidades supercríticas (RAMALHO, 2010).

Quando se estuda este tipo de máquina, bem como o seu comportamento dinâmico, observamos vários fenômenos importantes em qualquer projeto ou mesmo estudo sobre máquinas de grande porte, máquinas de grande precisão, alto desempenho, entre outros. Alguns destes fenômenos devem ser levados em conta durante o projeto ou operação deste tipo de máquina, entre eles pode citar frequência

natural, efeito giroscópio, velocidades críticas, desbalanceamento, entre outros.

Para analisar adequadamente o comportamento dinâmico dos rotores, são empregadas diversas etapas, tais como: determinação das velocidades críticas dos rotores; estudo de modificações de projeto do rotor visando afastar sua velocidade de operação de suas velocidades críticas; determinação da resposta desbalanceada de rotores e cálculo das massas de correção do desbalanceamento e seleção adequada do sistema de suporte de rotores e análise da influência dos coeficientes dinâmicos dos mancais sobre a resposta dinâmica de máquinas rotativas (COTA, 2008).

Um ponto crucial quando se fala em máquinas rotativas é em relação à vibração. Todo sistema rotativo vai apresentar vibração, porém em alguns casos a mesma deve ser mínima de modo a se obter resultados desejados, como em um torno onde se deseja uma alta precisão e ótimo acabamento, quanto maior a precisão e o nível de acabamento desejados, menor deverão ser os níveis de vibração.

Vibrações em muitos casos causam falhas em projetos mecânicos. “Sempre que a frequência natural de vibração de uma máquina ou estrutura coincidir com a frequência de excitação externa, ocorre um fenômeno conhecido como ressonância, que resulta em deflexões excessivas e falha” (RAO, c2009).

Vibração excessiva em sistemas rotativos pode ser causada por muitos fatores, entre eles pode-se citar: desbalanceamento, desalinhamento, folgas mecânicas, suporte inadequado, operação em condições de ressonância, forças externas atuando sobre o sistema, entre outros. Dessa maneira entendendo bem o funcionamento deste tipo de sistema é possível encontrar maneiras de minimizar esse tipo de problema. Estes fenômenos devem ser levados em conta durante o projeto de novas máquinas, e principalmente na área de manutenção, pois é recorrente o fato das máquinas, com o passar do tempo, começarem a se desgastar e assim aumentarem seus níveis de vibração. Neste último caso entra o trabalho do responsável pela manutenção, onde se deve intervir com ações corretivas para que este alto nível de vibração não cause maiores desgastes para a máquina em questão.

O conhecimento preciso das características dinâmicas de máquinas rotativas

permite prever a resposta vibratória em distintos pontos deste tipo de sistema sujeito a diferentes excitações (SILVA, 2004).

As análises sobre este assunto são de difícil solução analítica, desta forma trabalhou-se com ferramentas computacionais para o auxílio no desenvolvimento do trabalho. Uma destas ferramentas é o software Matlab. Este é um programa desenvolvido para computadores que é voltado para o cálculo numérico.

A utilização de uma ferramenta computacional como o Matlab se justifica pelo fato de agilizar os processos de análise. Com isso, é possível investigar os efeitos das variações de parâmetros sobre o comportamento dinâmico dos sistemas.

## **Objetivos**

### ***Objetivo geral***

Estudar o comportamento dinâmico de máquinas rotativas, além de elaborar rotinas computacionais que possam ser usadas no auxílio da aprendizagem do tema em questão.

### ***Objetivo específico***

Investigar o comportamento dinâmico de sistemas rotativos com rotores rígidos. Para tanto, serão empregadas rotinas computacionais desenvolvidas em ambiente Matlab para a simulação numérica.

Essas rotinas computacionais poderão ser utilizadas didaticamente no auxílio da aprendizagem do tema em questão, facilitando o entendimento de fenômenos que ocorrem de maneira não muito visível.

## REFERENCIAL TEÓRICO

Em primeiro lugar, é bastante oportuno definir os componentes fundamentais de uma máquina rotativa. De acordo com Friswell *et al.* (2010), toda máquina rotativa é formada por três componentes principais: o rotor, os mancais e a estrutura de suporte.

Os rotores podem ser classificados em dois grupos: rotores rígidos e rotores flexíveis. Rotores rígidos são formados por eixos curtos com diâmetros largos, tornando o eixo mais rígido que os mancais e fundações no qual é suportado. Desse modo, em rotores rígidos as deformações elásticas não afetam seu comportamento dinâmico. Enquanto rotores flexíveis são formados por eixos longos suportados por mancais e fundações rígidas, desse modo seu suporte é mais duro que o eixo. Assim deformações elásticas afetam seu comportamento dinâmico (FRISWELL *et al.*, 2010).

Grande parte do estudo de uma máquina rotativa está no estudo da vibração, e dos modos com que a mesma se movimenta durante o movimento decorrente da vibração.

### Vibração

De acordo com Taylor (2003), pode-se definir a vibração como sendo o movimento físico ou o deslocamento de uma máquina rotativa ou equipamento. Em geral, pode-se classificar a vibração em dois tipos: livre e forçada, que podem ser amortecidas ou não. Entretanto na natureza, tanto as forças dissipadoras internas quanto as externas estão sempre presentes, fazendo com que o movimento de vibração de qualquer corpo seja sempre amortecido.

Todas as máquinas rotativas reais apresentam vibração, sendo causada por diversos fatores, tais como: desbalanceamentos, desalinhamentos, entre outros.

### Lei de Hooke

É uma das principais leis da física e relaciona uma deformação à respectiva força exercida em um corpo elástico. Tem-se que a força aplicada é diretamente

proporcional ao deslocamento causado no corpo conforme a seguinte equação:

$$F = k\Delta l \quad (1)$$

Onde:

F: força aplicada

K: constante elástica do corpo

$\Delta l$ : deformação causada pela força

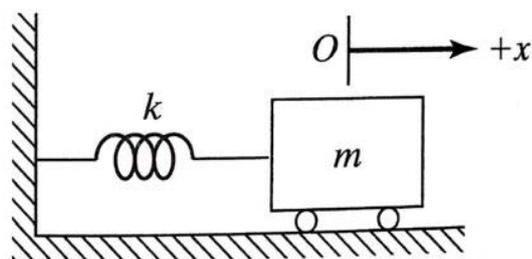
Esta lei da física será um dos pilares para o estudo do comportamento dinâmico de rotores rígidos apoiados sobre suportes flexíveis, o qual é o foco deste trabalho.

## Sistema massa-mola

É o modelo mais simples de um sistema vibratório. Consiste em um sistema com um grau de liberdade (movimenta-se em apenas uma direção – 1 grau de liberdade), formado por uma massa  $m$ , uma mola de constante elástica  $k$  e um amortecedor com constante de amortecimento  $c$ .

Para um melhor entendimento, neste momento será utilizado um sistema em vibração livre não amortecida, ou seja, onde não há forças externas atuando sobre o sistema, nem amortecimento. Conforme pode ser visto na Figura 1.

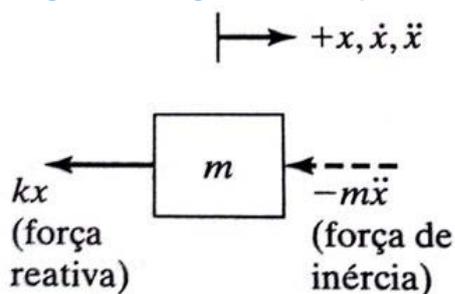
Figura 1 - Sistema massa-mola



Fonte: Rao (c2009)

O movimento da massa pode ser obtido analisando o diagrama de corpo livre mostrado na Figura 2, e aplicando a segunda lei de Newton.

Figura 2 - Diagrama de corpo livre.



(b) Diagrama de corpo livre

Fonte: Rao (c2009)

Aplicando a segunda lei de Newton obtêm-se:

$$F = -kx = m\ddot{x} = 0 \quad (2)$$

Rearranjando a equação (2) e dividindo pela massa encontra-se

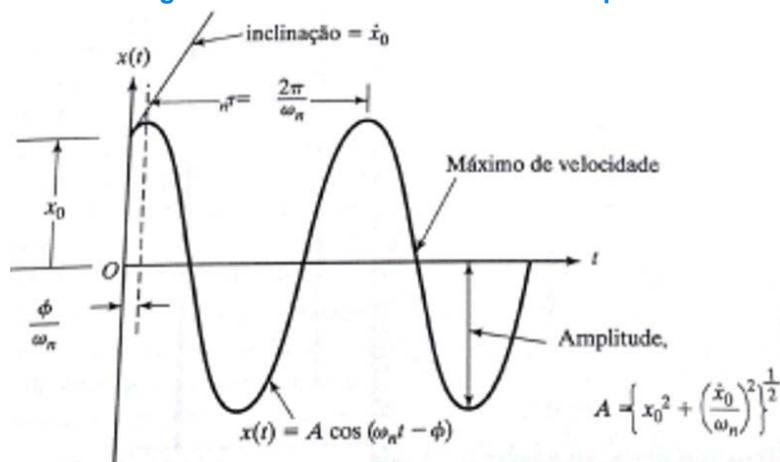
$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (3)$$

Onde  $\omega_n$  é a frequência angular natural e pode ser escrita como

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4)$$

Ao se observar a representação gráfica do deslocamento observa-se um movimento harmônico simples, como pode ser visto na Figura 3.

Figura 3 - Movimento harmônico simples



Fonte: Rao (c2009)

Dessa maneira, a solução para o deslocamento  $x$ , pode ser definida como:

$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \phi) \quad (5)$$

Onde  $A$  é a amplitude do sistema, e  $\phi$  é o ângulo de fase, que podem ser determinados pelas condições iniciais do sistema.

Quando um corpo ou sistema de corpos interligados sofre um deslocamento inicial a partir de sua posição de equilíbrio e, então é abandonado, ele passa a vibrar

com sua frequência natural. Desse modo pode-se determinar a frequência natural do sistema:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (6)$$

## Modelagem de rotores

Nesta seção, serão abordadas formas de se elaborar um modelo adequado de um sistema rotativo simples, com um número reduzido de graus de liberdade. O próximo passo é analisar e determinar as características dinâmicas do sistema, tais como: frequências naturais, modos de vibração e a resposta do sistema livre (FRISWELL *et al.*, 2010).

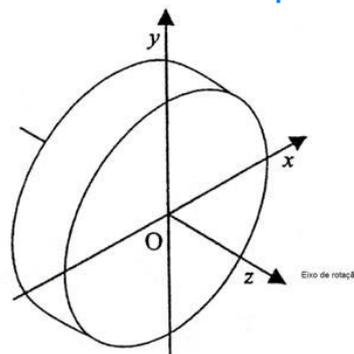
Serão apresentados modelos matemáticos com a finalidade de prever de forma satisfatória o comportamento de rotores rígidos.

### Sistema de coordenadas

Primeiramente, é imprescindível definir um sistema de coordenadas padrão para elaborar equações. Desta forma, o primeiro passo é definir se um sistema de coordenadas deve ser fixo ou móvel. Neste trabalho, será empregado um sistema de coordenadas fixo, localizado no centro de massa do rotor em repouso. Com isso, facilita-se a tanto as análises quanto a compreensão dos fenômenos físicos envolvidos, pois serão investigados apenas sistemas com eixos simétricos.

Na Figura 4, apresenta-se o sistema de coordenadas a ser empregado nas análises.

**Figura 4 - Sistema de coordenada usado para análise de um rotor**



Fonte: Friswell (2010)

O centro de massa do rotor pode se movimentar ao longo dos eixos  $O_x$ ,  $O_y$  e  $O_z$  através dos deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$ , respectivamente. Além disso, o rotor pode rotacionar em torno dos eixos  $O_x$  e  $O_y$  através de  $\theta$  e  $\psi$  respectivamente. Valores positivos de rotação significam rotações no sentido horário (FRISWELL *et al.*, 2010).

O rotor gira no sentido horário ao redor de  $O_z$  com um deslocamento angular e velocidade angular  $\phi$  e  $\Omega$ , respectivamente. Os valores positivos destes movimentos são dados pela regra da mão direita, quando se avança ao longo do eixo  $O_z$ . Os vetores de rotação serão indicados por uma seta dupla (FRISWELL *et al.*, 2010).

### **Efeito giroscópico**

É um fenômeno muito importante na análise dinâmica de rotores. O efeito giroscópico surge pela conservação do momento angular em um sistema, estes momentos são perpendiculares ao eixo de giro (FRISWELL *et al.*, 2010). Desta forma, o momento angular pode ser considerado na determinação do momento giroscópico.

De acordo com Vance, Zeidan e Murphy (2010), o efeito giroscópico é mais pronunciado em rotores em balanço.

### **Rotor rígido sobre suporte flexível com dois graus de liberdade**

Segundo Vance, Zeidan e Murphy (2010), o modelo mais simples para este tipo de análise é uma massa rígida sobre duas molas lineares, assim com um grau de liberdade cada; onde a primeira velocidade crítica do sistema pode ser aproximada pela frequência natural deste modelo em rotações por minutos, segundo a Equação (7):

$$N_1 = 60 / 2\pi \sqrt{k/m} \quad (7)$$

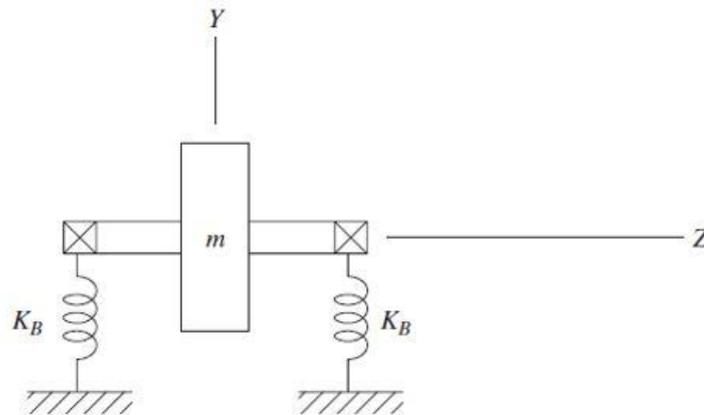
Onde:

k: rigidez

m: a massa do sistema.

Quando se trata de rotor rígido (Figura 5) a rigidez efetiva no sistema será  $2k_B$ , por estarem em paralelo.

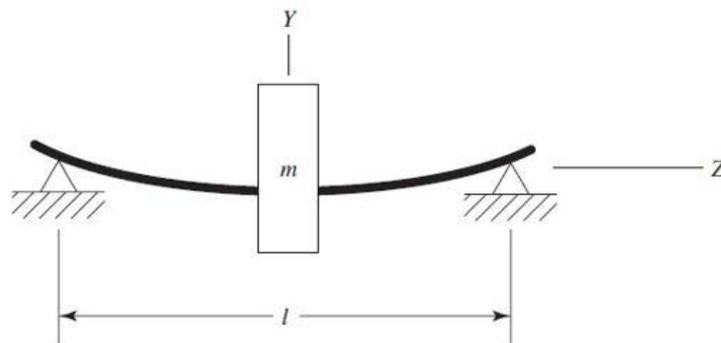
**Figura 5 – Rotor rígido visto como um sistema massa mola.**



**Fonte: Vance (2010)**

Já quando se lida com rotores flexíveis essa análise com apenas dois graus de liberdade não é adequada, já que o mesmo terá um grau de liberdade a mais dada à sua flexibilidade, conforme pode ser notado na Figura 6.

**Figura 6 – Rotor flexível.**



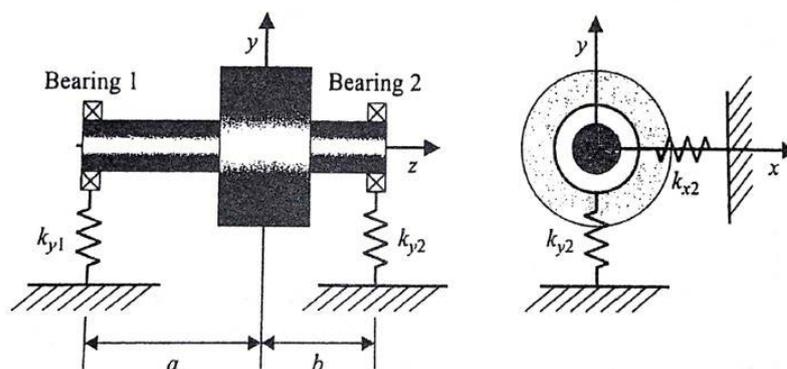
**Fonte: Vance (2010)**

Este é um método simples, que apesar de poder representar movimentos orbitais, não pode representar realisticamente os desbalanceamentos de massa presentes no rotor. Logo, este modelo é válido apenas para descobrir a primeira velocidade crítica do sistema. Deste modo deve-se partir para a elaboração de modelos mais complexos, mas mantendo o foco de tentar utilizar modelos com menos graus de liberdade que possam fornecer as informações desejadas (VANCE; ZEIDAN; MURPHY, 2010).

## Rotor rígido sobre suporte flexível com quatro graus de liberdade

A seguir, será apresentado um modelo simples, mas bastante interessante para a análise dinâmica de sistemas. O modelo será o de um rotor circular, rígido, apoiado sobre suportes flexíveis feitos de material isotrópico, como mostrado na Figura 7.

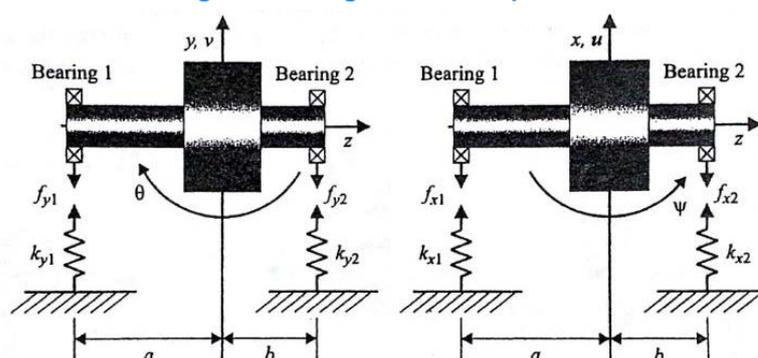
Figura 7 - Esquema de um rotor rígido com suporte flexível.



Fonte: Friswell (2010)

Este modelo possui quatro graus de liberdade, sendo duas translações nas direções  $O_x$  e  $O_y$  e dois ângulos de rotação, em torno desses mesmos eixos, conforme apresentado na Figura 8.

Figura 8 - Diagrama de corpo livre.



Fonte: Friswell (2010)

Na Figura 8 pode-se observar um diagrama de corpo livre com as forças e momentos que estão agindo sobre o sistema. Em um primeiro momento, será desconsiderado o efeito giroscópico que atua sobre o sistema. Assim, aplicando-se a segunda lei de Newton, obtém-se:

$$\text{Balanço de forças em } x: -f_{x1} - f_{x2} = m\ddot{u} \quad (8)$$

$$\text{Balanço de forças em } y: -f_{y1} - f_{y2} = m\ddot{v} \quad (9)$$

$$\text{Balanço de momentos em } \theta: -af_{y1} + bf_{y2} = I_d\ddot{\theta} + I_p\Omega\dot{\psi} \quad (10)$$

$$\text{Balanço de momentos em } \psi: af_{x1} - bf_{x2} = I_d\ddot{\psi} - I_p\Omega\dot{\theta} \quad (11)$$

Onde:

$m$ : massa do rotor

$\ddot{u}$ : aceleração em  $x$

$\ddot{v}$ : aceleração em  $y$

$I_p$ : momento polar de inércia do rotor

$I_d$ : momento de inércia em relação à  $O_x$  e  $O_y$

$\dot{\theta}$ : velocidade angular ao redor de  $O_x$

$\ddot{\theta}$ : aceleração angular ao redor de  $O_x$

$\dot{\psi}$ : velocidade angular ao redor de  $O_y$

$\ddot{\psi}$ : aceleração angular ao redor de  $O_y$

Para melhorar estas equações será aplicada a lei de Hooke para se obter as forças  $f_{x1}$ ,  $f_{x2}$ ,  $f_{y1}$  e  $f_{y2}$ :

$$f_{x1} = k_{x1}(u - a \sin\psi) \approx k_{x1}(u - a\psi) \quad (12)$$

Como serão considerados pequenos deslocamentos, é possível empregar fazer a seguinte aproximação:  $a \sin\psi \approx a\psi$  com a finalidade de simplificar a análise.

Analogamente a equação (12) tem-se:

$$f_{x1} = k_{x1}(u - a\psi) \quad (13)$$

$$f_{x2} = k_{x2}(u + b\psi) \quad (14)$$

$$f_{y1} = k_{y1}(v + a\theta) \quad (15)$$

$$f_{y2} = k_{y2}(v - b\theta) \quad (16)$$

Observando a isotropia do material do suporte, é possível fazer as seguintes relações:

$$k_T = k_{x1} + k_{x2} = k_{y1} + k_{y2} \quad (17)$$

$$k_C = -ak_{x1} + bk_{x2} = -ak_{y1} + bk_{y2} \quad (18)$$

$$k_R = a^2k_{x1} + b^2k_{x2} = a^2k_{y1} + b^2k_{y2} \quad (19)$$

Substituindo as equações (13), (14), (15), (16), (17), (18) e (19) nas equações (8), (9), (10) e (11) obtém-se as seguintes relações:

$$m\ddot{u} + k_T u + k_C \psi = 0 \quad (20)$$

$$m\ddot{v} + k_T v + k_C \theta = 0 \quad (21)$$

$$I_d \ddot{\theta} + I_p \Omega \dot{\psi} - k_C v + k_R \theta = 0 \quad (22)$$

$$I_d \ddot{\psi} - I_p \Omega \dot{\theta} + k_C u + k_R \psi = 0 \quad (23)$$

A partir desta abordagem, pode-se chegar a casos mais abrangentes, tais como: suporte anisotrópico, inclusão do efeito giroscópico, amortecimento, entre outros. Desta forma, é possível obter-se resultados bastante interessantes na análise do comportamento dinâmico de máquinas rotativas.

### **Negligenciando os efeitos giroscópios e o efeito elástico do acoplamento**

Para solucionar as equações (20), (21), (22) e (23), primeiramente será desconsiderado o efeito giroscópico, o que pode ser realizado quando a velocidade de rotação é baixa ou o momento polar de inércia é pequeno. Dessa forma, tem-se que  $I_p \Omega = 0$ . Outra consideração é  $k_C = 0$ , e isso acontece quando o disco é centralizado no eixo e a rigidez dos mancais são iguais em cada extremidade do eixo de rotação (FRISWELL *et al.*, 2010). Agora, substituindo essas considerações nas equações acima, encontra-se:

$$m\ddot{u} + k_T u = 0 \quad (24)$$

$$m\ddot{v} + k_T v = 0 \quad (25)$$

$$I_d \ddot{\theta} + k_R \theta = 0 \quad (26)$$

$$I_d \ddot{\psi} + k_R \psi = 0 \quad (27)$$

Estas equações são independentes umas das outras, ou seja, são desacopladas. Além disso, a sua solução é da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 e^{st}, & v(t) &= v_0 e^{st}, \\ \theta(t) &= \theta_0 e^{st} & \text{e} & \psi(t) = \psi_0 e^{st} \end{aligned} \quad (28)$$

Onde  $u_0, v_0, \theta_0, \psi_0$  são constantes complexas, dessa maneira se tem que  $\ddot{u} = u_0 s^2 e^{st}$  e assim por diante. Substituindo estas relações nas equações (24), (25), (26) e (27) encontra-se:

$$(ms^2 + k_T)u_0 = 0 \quad (29)$$

$$(ms^2 + k_T)v_0 = 0 \quad (30)$$

$$(I_d s^2 + k_R)\theta_0 = 0 \quad (31)$$

$$(I_d s^2 + k_R)\psi_0 = 0 \quad (32)$$

As soluções das equações são:

$$s_1 = s_2 = J\sqrt{\frac{k_T}{m}}, \quad s_3 = s_4 = J\sqrt{\frac{k_R}{I_d}}, \quad s_5 = s_6 = -J\sqrt{\frac{k_T}{m}}, \quad s_7 = s_8 = -J\sqrt{\frac{k_R}{I_d}} \quad (33)$$

Como as raízes encontradas na equação (33) são pares complexos conjugados, a frequência natural é derivada a partir da forma  $s_i = Jw_i, s_{i+4} = -Jw_i, i=1, \dots, 4$  então:

$$w_1 = w_2 = \sqrt{\frac{k_T}{m}} \quad e \quad w_3 = w_4 = \sqrt{\frac{k_R}{I_d}} \quad (34)$$

Onde  $W_1$  é a frequência natural do modo de vibração de translação e  $W_3$  é a frequência natural do modo de oscilação em torno do cg. Por convenção os valores de  $W_1 = W_2 \leq W_3 = W_4$ , logo se essa correlação não for satisfeita deve-se trocar as relações da equação (34), sempre de modo a  $W_1 = W_2 \leq W_3 = W_4$ .

Agora, substituindo os valores encontrados na equação (23) encontra-se:

$$u(t) = u_{01}e^{s_1 t} + u_{02}e^{s_5 t} = a_u \text{sen}(w_1 t) + b_u \text{sen}(w_1 t) = c_u \cos(w_1 t + \alpha_u) \quad (35)$$

$$v(t) = v_{01}e^{s_2 t} + v_{02}e^{s_6 t} = a_v \text{sen}(w_2 t) + b_v \text{sen}(w_2 t) = c_v \cos(w_2 t + \alpha_v) \quad (36)$$

$$\theta(t) = \theta_{01}e^{s_3 t} + \theta_{02}e^{s_7 t} = a_\theta \text{sen}(w_3 t) + b_\theta \text{sen}(w_3 t) = c_\theta \cos(w_3 t + \alpha_\theta) \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \psi_{01}e^{s_4 t} + \psi_{02}e^{s_8 t} = a_\psi \text{sen}(w_4 t) + b_\psi \text{sen}(w_4 t) \\ &= c_\psi \cos(w_4 t + \alpha_\psi) \end{aligned} \quad (38)$$

A vibração do rotor é uma combinação destes movimentos, dependendo das condições iniciais.

Se os valores iniciais de deslocamentos  $u(0), v(0)$  e as velocidades iniciais  $\dot{u}(0)$  e  $\dot{v}(0)$  forem conhecidos, pode-se determinar os movimentos subsequentes do rotor nas direções  $x$  e  $y$  a partir das equações (35) e (36). De forma similar se forem conhecidos os valores das rotações iniciais e as velocidades angulares ao redor de  $O_x$

e  $O_y$ , pode-se determinar as rotações subsequentes ao redor desses dois eixos (FRISWELL *et al.*, 2010).

### Incluindo o efeito elástico do acoplamento

Neste tópico, o efeito elástico do acoplamento será levado em conta, dessa maneira deve-se considerar  $k_c \neq 0$ . O efeito giroscópio continuará sendo desconsiderado, logo  $I_p \Omega = 0$ .

A partir das equações (20), (21), (22) e (23) e novamente procurando soluções da forma da equação (28), levando em conta que  $e^{st} \neq 0$ , encontra-se:

$$(ms^2 + k_T)u_0 + k_C \psi_0 = 0 \quad (39)$$

$$k_C u_0 + (I_d s^2 + k_R) \psi_0 = 0 \quad (40)$$

$$(ms^2 + k_T)v_0 - k_C \theta_0 = 0 \quad (41)$$

$$-k_C v_0 + (I_d s^2 + k_R) \theta_0 = 0 \quad (42)$$

Deve se pensar nas equações acima como dois pares de equações. Primeiramente considerando as equações (39) e (40) como um par, as raízes podem ser encontradas rearranjando-as:

$$u_0 = -\frac{k_C \psi_0}{(ms^2 + k_T)} = -\frac{(I_d s^2 + k_R) \psi_0}{k_C} \quad (43)$$

Consequentemente

$$(ms^2 + k_T)(I_d s^2 + k_R) - k_C^2 = 0 \quad (44)$$

A seguir, multiplicando os termos dos parênteses e dividindo cada termo por  $mI_d$ , encontra-se uma equação quadrática em  $s^2$

$$s^4 + \left(\frac{k_R}{I_d} + \frac{k_T}{m}\right) s^2 + \frac{k_R k_T - k_C^2}{mI_d} = 0 \quad (45)$$

De maneira análoga utilizando o par de equações (41) e (42) encontra-se:

$$v_0 = \frac{k_C \theta_0}{(ms^2 + k_T)} = \frac{(I_d s^2 + k_R) \theta_0}{k_C} \quad (46)$$

Rearranjando a equação encontra-se uma equação idêntica a (45). As raízes dessas duas equações quadráticas são

$$s^2 = -\left(\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m}\right) \pm \gamma \quad (47)$$

Onde

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{k_R}{2I_d} - \frac{k_T}{2m}\right)^2 + \frac{k_c^2}{mI_d}} \quad (48)$$

Dessa forma, a partir das duas equações quadráticas, os valores de  $s$  que satisfazem as equações (39), (40), (41) e (42) são:

$$\begin{aligned} s_1 = s_2 &= j\sqrt{\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m}} - \gamma, & s_3 = s_4 &= j\sqrt{\frac{k_R}{2I_d} - \frac{k_T}{2m}} + \gamma, \\ s_5 = s_6 &= -j\sqrt{\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m}} - \gamma, & s_7 = s_8 &= -j\sqrt{\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m}} + \gamma \end{aligned} \quad (49)$$

Essas oito raízes formam dois pares de raízes conjugadas complexas, analogamente ao caso anterior, onde se considerava  $k_c = 0$ . Como  $s_i = jw_i$ ,  $s_{i+4} = -jw_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  as frequências naturais do sistema são:

$$w_1 = w_2 = \sqrt{\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m}} - \gamma \quad \text{e} \quad w_3 = w_4 = \sqrt{\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m}} + \gamma \quad (50)$$

Dessa maneira, agora se tem uma ligação entre os deslocamentos e rotações em cada plano e comportamento do corpo associado com cada raiz que pode ser calculada. Na equação (43) encontra-se que  $s^2$  pode assumir apenas dois valores específicos,  $s_1^2$  e  $s_3^2$ , dessa maneira se  $s$  for substituído por  $s_i$  ( $i=1$  ou  $3$ ) na equação (43) pode se determinar uma taxa entre  $u_0$  e  $\psi_0$  para o valor específico de  $s$ .

$$\left(\frac{u_0}{\psi_0}\right)^i = -\frac{I_d s_i^2 + k_R}{k_c} = -\frac{k_c}{m s_i^2 + k_T}, \quad i = 1, 3 \quad (51)$$

De maneira similar  $s^2$  pode assumir apenas dois valores específicos na equação (46),  $s_2^2$  e  $s_4^2$ . Dessa forma encontramos:

$$\left(\frac{v_0}{\theta_0}\right)^i = \frac{I_d s_i^2 + k_R}{k_c} = \frac{k_c}{m s_i^2 + k_T}, \quad i = 2, 4 \quad (52)$$

Como  $s_1^2 = s_2^2$  as formas modais obtidas da equação (51) e (52) são idênticas, embora em planos diferentes, e são as formas modais associadas com as frequências naturais  $w_1$  ou  $w_2$ . O mesmo ocorre para  $s_3$  e  $s_4$ . A amplitude da forma modal não é única e consegue-se apenas obter as taxas  $(u_0/\psi_0)^i$  e  $(v_0/\theta_0)^i$ .

### **Incluindo o efeito giroscópico**

Nesta seção será considerada a inclusão do efeito giroscópico. Segundo

Friswell *et al.* (2010), quando se ignora o valor o efeito giroscópio as velocidades de rotação são irrelevantes. O efeito giroscópio deve ser considerado principalmente em rotores de alta rotação e rotores em balanço.

Primeiramente será considerado o efeito giroscópio isoladamente, para um melhor entendimento, e em seguida será adicionado o efeito elástico do acoplamento.

Partindo das equações (20), (21), (22) e (23) e considerando  $k_c=0$ , encontra-se as seguintes relações:

$$m\ddot{u} + k_T u = 0 \quad (53)$$

$$m\ddot{v} + k_T v = 0 \quad (54)$$

$$I_d \ddot{\theta} + I_p \Omega \dot{\psi} + k_R \theta = 0 \quad (55)$$

$$I_d \ddot{\psi} - I_p \Omega \dot{\theta} + k_R \psi = 0 \quad (56)$$

Separando as equações em dois pares, quando se utiliza as equações (53) e (54) elas não tem ligação, logo:

$$s_1 = s_2 = J\sqrt{\frac{k_T}{m}}, s_5 = s_6 = -J\sqrt{\frac{k_T}{m}} \quad (57)$$

$$w_1 = w_2 = \sqrt{\frac{k_T}{m}} \quad (58)$$

Agora utilizando as equações (55) e (56), as mesmas tem ligação entre elas, utilizando  $\theta(t) = \theta_0 e^{st}$  e  $\psi(t) = \psi_0 e^{st}$  encontra-se:

$$(I_d s^2 + k_R)\theta_0 + I_p \Omega s \psi_0 = 0 \quad (59)$$

$$-I_p \Omega s \theta_0 + (I_d s^2 + k_R)\psi_0 = 0 \quad (60)$$

Rearranjando

$$(I_d s^2 + k_R)^2 + (I_p \Omega s)^2 = 0 \quad (61)$$

Em seguida movendo o ultimo termo para o lado direito e retirando a raiz quadrada:

$$I_d s^2 + k_R = \pm j I_p \Omega s \quad (62)$$

Logo, as quatro soluções para equação (59) e (60) podem ser obtidas:

$$s_{3,4} = j \left\{ \pm \frac{I_p \Omega s}{2I_d} + \sqrt{\left(\frac{I_p \Omega s}{2I_d}\right)^2 - \frac{k_R}{I_d}} \right\}, s_{7,8} = -s_{3,4} \quad (63)$$

Como  $s_i = jw_i, s_{i+4} = -jw_i, i = 3,4$ , logo

$$w_3 = -\frac{I_p \Omega}{2I_d} + \sqrt{\left(\frac{I_p \Omega}{2I_d}\right)^2 + \frac{k_R}{I_d}}, w_4 = \frac{I_p \Omega}{2I_d} + \sqrt{\left(\frac{I_p \Omega}{2I_d}\right)^2 + \frac{k_R}{I_d}} \quad (64)$$

Essas frequências naturais dependem da velocidade de rotação, o que

difere da situação que prevalece em todas as estruturas fixas. Em estruturas fixas, a frequência natural depende essencialmente da rigidez e da massa do sistema. Neste caso as frequências naturais são valores fixos e não variam de acordo com o movimento do corpo (FRISWELL *et al.*, 2010).

Rearranjando as equações (59) e (60), é obtido:

$$\left(\frac{\theta_0}{\psi_0}\right)^{(i)} = -\frac{I_p \Omega s_i}{I_d s_i^2 + k_R} = \frac{I_d s_i^2 + k_R}{I_p \Omega s_i} \quad (65)$$

Os termos do lado direito são da forma  $-A/B = B/A$ , logo  $B/A$  deve ser igual a  $\pm j$ . Nota-se que  $s_i^2 = -w_i^2$ , onde a frequência natural  $w_i$  é positivo, logo a equação (65) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \text{Se } k_R > w_i^2 I_d \\ (\theta_0/\psi_0)^i &= \begin{cases} -j & \text{se } s_i = jw_i \\ j & \text{se } s_i = -jw_i \end{cases} \\ & \text{Se } k_R < w_i^2 I_d \\ (\theta_0/\psi_0)^i &= \begin{cases} j & \text{se } s_i = jw_i \\ -j & \text{se } s_i = -jw_i \end{cases} \end{aligned} \quad (66)$$

O sinal da diferença entre  $\theta_0$  e  $\psi_0$  determina a direção da rotação dos modos de giro.

A resposta real é obtida adicionando a contribuição dos dois modos complexos conjugados. Pelo fato de a escala das formas modais serem arbitrárias, deve-se assumir, sem perda em generalidade, que  $\theta_0=1$  para todos autovetores. Se  $k_R > w_i^2 I_d$ , então para a raiz  $s_i=jw_i$ ,  $\theta_0=-j\psi_0$  e conseqüentemente  $\psi_0=j$ . Para a raiz conjugada complexa  $\psi_0=-j$ , então a resposta no tempo é:

$$\begin{Bmatrix} \theta(t) \\ \psi(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ j \end{Bmatrix} e^{jw_i t} + \begin{Bmatrix} -1 \\ j \end{Bmatrix} e^{-jw_i t} = 2 \begin{Bmatrix} \cos(w_i t) \\ -\text{sen}(w_i t) \end{Bmatrix} \quad (67)$$

No plano  $(\theta, \psi)$ , a órbita é circular. O modo gira no sentido horário, e pelo fato de a rotação positiva do rotor ter sido definida para ser no sentido anti-horário, é chamado de *precessão reversa*. Similarmente, para  $k_R < w_i^2 I_d$ :

$$\begin{Bmatrix} \theta(t) \\ \psi(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -j \end{Bmatrix} e^{jw_i t} + \begin{Bmatrix} 1 \\ j \end{Bmatrix} e^{-jw_i t} = 2 \begin{Bmatrix} \cos(w_i t) \\ \text{sen}(w_i t) \end{Bmatrix} \quad (68)$$

Neste caso o modo ocorre no sentido anti-horário, então é chamado de *precessão direta*.

É muito difícil de visualizar os modos de giro no plano  $(\theta, \psi)$ . Entretanto com referência à Figura 8, os deslocamentos em  $x$  e  $y$  no mancal 1 são:

$$\begin{aligned} O_x: u_0 - a\psi_0 \\ O_y: v_0 + a\theta_0 \end{aligned} \quad (69)$$

Como a órbita no plano  $(\theta, \psi)$  é circular, logo no plano  $(x, y)$  deve ser circular também.

Agora o efeito elástico do acoplamento será adicionado e será considerado junto com o efeito giroscópio, ou seja,  $k_C \neq 0$ . Partindo das equações (20), (21), (22) e (23) e assumindo respostas na forma da equação (28), encontra-se

$$(ms^2 + k_T)u_0 + k_C\psi_0 = 0 \quad (70)$$

$$(ms^2 + k_T)v_0 - k_C\theta_0 = 0 \quad (71)$$

$$-k_Cv_0 + (I_d s^2 + k_R)\theta_0 + I_p \Omega s \psi_0 = 0 \quad (72)$$

$$k_C u_0 - I_p \Omega s \theta_0 + (I_d s^2 + k_R)\psi_0 = 0 \quad (73)$$

Usando as equações (70) e (71) para eliminar  $\theta_0$  e  $\psi_0$  nas equações (72) e (73), e em seguida eliminando também  $u_0$  e  $v_0$  encontra-se:

$$(ms^2 + k_T)(I_d s^2 + k_R) - k_C^2 = \pm j I_p \Omega s (ms^2 + k_T) \quad (74)$$

Rearranjando a equação (74), tem-se:

$$(ms^2 + k_T)(I_d s^2 \mp j I_p \Omega s + k_R) - k_C^2 = 0 \quad (75)$$

Realizando a multiplicação e em seguida dividindo cada termo por  $mI_d$ :

$$s^4 \mp \left(\frac{I_p}{I_d}\right) \Omega s^3 + \left(\frac{k_R}{I_d} + \frac{k_T}{m}\right) s^2 \mp j \left(\frac{k_T I_p}{m I_d}\right) \Omega s + \frac{k_R k_T - k_C^2}{m I_d} = 0 \quad (76)$$

A partir das definições de  $k_R$ ,  $k_T$  e  $K_C$ , pode se mostrar que  $k_R k_T - k_C^2 > 0$ , então os termos reais da equação (76) são sempre positivos. As raízes desta equação são puramente imaginárias e ocorrem em pares conjugados de acordo com o sinal dos termos imaginários da equação (76). É conveniente concordar que  $s = j\omega$  para que os coeficientes da equação se tornem reais:

$$\omega^4 \mp \left(\frac{I_p}{I_d}\right) \Omega \omega^3 + \left(\frac{k_R}{I_d} + \frac{k_T}{m}\right) \omega^2 \mp \left(\frac{k_T I_p}{m I_d}\right) \Omega \omega + \frac{k_R k_T - k_C^2}{m I_d} = 0 \quad (77)$$

As raízes ocorrem em quatro pares com sinais opostos, e na prática as raízes são determinadas numericamente.

Devem-se determinar as formas modais para cada raiz  $s_i$ , para  $i=1, \dots, 8$ . Pelos mesmos argumentos usados para obter as equações (65), (66), (74) e (75) resulta em  $u_0 = \pm j v_0$ . Então das equações (70) e (71),  $\theta_0 = \pm j \psi_0$ . Usando os mesmos argumentos

para quando  $k_c=0$ . Da equação (67), as orbitas nos planos  $(x,y)$  e  $(\theta,\psi)$  são circulares.

Além disso:

$$\left(\frac{u_0}{\psi_0}\right)^{(i)} = -\left(\frac{v_0}{\theta_0}\right)^{(i)} = -\frac{k_c}{ms_1^2 + k_T} \quad (78)$$

Essa razão é real para raízes puramente imaginárias,  $s_1$ , sendo o mesmo para ambas as raízes de um par complexo conjugado. Isto mostra que para determinada raiz existe uma relação fixa entre  $u_0$  e  $\psi_0$  e entre  $v_0$  e  $\theta_0$ .

### Coordenadas complexas

Outra alternativa para determinar as frequências naturais de um rotor rígido circular em suportes isotrópicos é combinar as quatro coordenadas necessárias para descrever o movimento em duas coordenadas complexas. A vantagem de se utilizar as coordenadas complexas é o fator de se conseguir equações mais simples de serem resolvidas. As coordenadas complexas  $r$  e  $\varphi$  são:

$$\begin{aligned} r &= u + jv \\ \varphi &= \psi - j\theta \end{aligned} \quad (79)$$

Onde  $j = \sqrt{-1}$ . Adicionando  $j$  vezes a equação (21) na equação (20) e subtraindo  $j$  vezes a equação (22) da equação (23) e levando em conta que  $j\dot{\varphi} = j\dot{\psi} + \dot{\theta}$ . Encontra-se:

$$m\ddot{r} + k_{TR}r + k_C\varphi = 0 \quad (80)$$

$$I_d\ddot{\varphi} - jI_p\Omega\dot{\varphi} + k_Cr + k_R\varphi = 0 \quad (81)$$

Assim as quatro equações (20), (21), (22) e (23), foram transformadas em duas equações, (80) e (81), porém expressas em coordenadas complexas. Esta simplificação só é válida se os suportes são isotrópicos em ambas as direções  $Ox$  e  $Oy$ . Procuram-se soluções da forma  $r(t) = r_0e^{st}$  e  $\varphi(t) = \varphi_0e^{st}$ . Notando que  $e^{st} \neq 0$  e realizando as devidas substituições nas equações (80) e (81), encontra-se:

$$(ms^2 + k_T)r_0 + k_C\varphi_0 = 0 \quad (82)$$

$$(I_d s^2 - jI_p \Omega s + k_R)\varphi_0 + k_C r_0 = 0 \quad (83)$$

Se forem feitas as operações necessárias em cada caso, as equações utilizando coordenadas complexas resultarão em frequências naturais iguais às encontradas com as coordenadas comuns,  $x$  e  $y$  (FRISWELL *et al.*, 2010).

As coordenadas complexas são mais utilizadas para a resolução de problemas de desbalanceamento.

### **Rotor rígido sobre suportes flexíveis anisotrópicos**

Diferentemente dos modelos mencionados anteriores, esta análise matemática levará em conta que as propriedades de rigidez nos mancais materiais são diferentes nas direções  $x$  e  $y$ .

Desta forma, obtêm-se as seguintes equações, que são análogas às equações (20), (21), (22) e (23):

$$m\ddot{u} + k_{xT}u + k_{xC}\psi = 0 \quad (84)$$

$$m\ddot{v} + k_{yT}v - k_{yC}\theta = 0 \quad (85)$$

$$I_d\ddot{\theta} + I_p\Omega\dot{\psi} - k_{yC}v + k_{yR}\theta = 0 \quad (86)$$

$$I_d\ddot{\psi} - I_p\Omega\dot{\theta} + k_{xC}u + k_{xR}\psi = 0 \quad (87)$$

Para facilitar estas equações serão representadas em forma de matrizes:

$$M\ddot{q} + \Omega G\dot{q} + Kq = 0 \quad (88)$$

Onde:

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \\ 0 & 0 & -I_p & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_{xT} & 0 & 0 & k_{xC} \\ 0 & k_{yT} & -k_{yC} & 0 \\ 0 & -k_{yC} & k_{yR} & 0 \\ k_{xC} & 0 & 0 & k_{xR} \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$q = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}$$

Para determinar as raízes da equação (88) deve-se rearranjá-la de maneira mais conveniente:

$$\begin{bmatrix} \Omega G & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (89)$$

Em seguida pode ser escrita da seguinte maneira:

$$A\dot{x} + Bx = 0 \quad (90)$$

Onde:

$$x = \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix}, \quad \dot{x} = \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \Omega G & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}.$$

Procurando por uma solução da forma  $x(t) = x_0 e^{st}$  logo com  $\dot{x} = sx_0 e^{st}$ , dessa maneira a equação (90) se torna:

$$sAx_0 = -Bx_0 \quad (91)$$

Este problema deve ser resolvido numericamente e resulta em oito raízes,

que provem de quatro coordenadas em que cada solução gera um par de soluções complexa, e cada uma das oito raízes representa uma frequência natural (FRISWELL *et al.*, 2010).

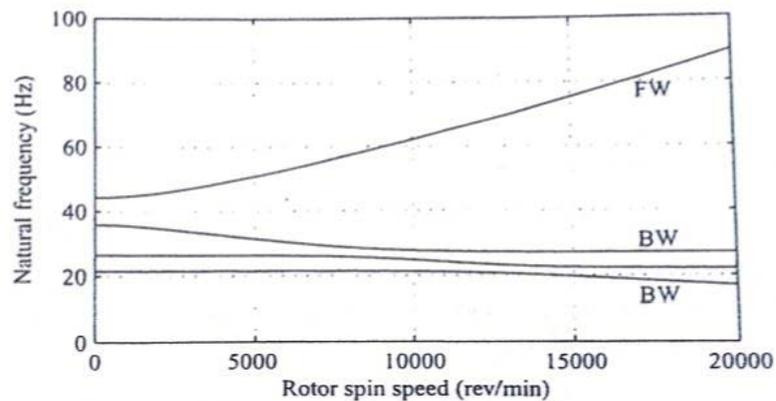
$$\begin{aligned} s_1 &= +j\omega_1, & s_2 &= +j\omega_2, & s_3 &= +j\omega_3, & s_4 &= +j\omega_4, \\ s_5 &= -j\omega_1, & s_6 &= -j\omega_2, & s_7 &= -j\omega_3, & s_8 &= -j\omega_4 \end{aligned} \quad (92)$$

### Mapas de frequências naturais

Como visto anteriormente, por causa do efeito giroscópico, as raízes das equações características variam de acordo com a velocidade de rotação. Não somente pelo efeito giroscópico, isso ocorre também em casos de sistemas rotativos com mancais hidrodinâmicos, nos quais as propriedades de rigidez e de amortecimento variam com a velocidade de rotação. Por esse motivo, é interessante ilustrar graficamente a maneira como as raízes variam de acordo com a velocidade de rotação.

Geralmente a velocidade de rotação é demonstrada no eixo x, e a parte imaginária das raízes, ou a frequência natural são demonstradas no eixo y. Como pode ser visto Figura 9.

Figura 9 – Exemplo de mapa de frequência natural

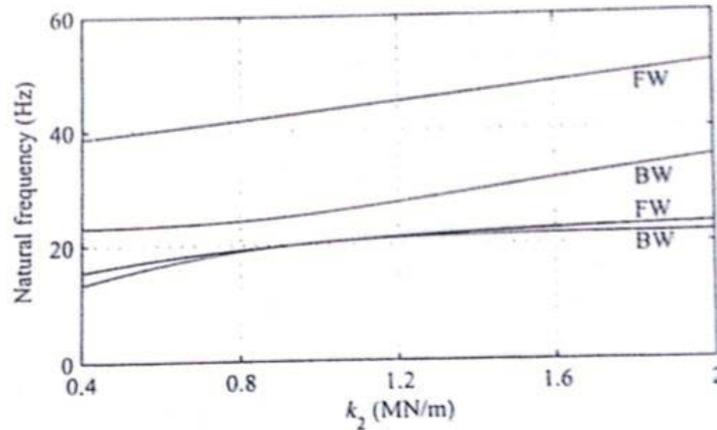


Fonte: Friswell (2010)

Este tipo de mapa de frequências naturais, não só fornece uma quantidade significativa de informações sobre as raízes do sistema, como pode fornecer um método simples para se determinar velocidades críticas. Este tipo de gráfico pode ilustrar também uma relação entre ressonância e outros parâmetros que não sejam a velocidade de rotação, como rigidez nos mancais (Figura 10) e propriedades de

inércia do rotor (FRISWELL *et al.*, 2010).

Figura 10 - Exemplo de mapa de frequência natural em relação à dureza do mancal.



Fonte: Friswell, (2010)

### Efeito do amortecimento nos suportes

Neste tópico será considerado o efeito do amortecimento viscoso nos mancais. Assumindo que o mesmo é inserido em paralelo com cada elemento de rigidez (mola) do mancal, as equações (13), (14), (15) e (16) se tornam:

$$f_{x1} = k_{x1}(u - a\psi) + c_{x1}(\dot{u} - a\dot{\psi}) \quad (93)$$

$$f_{x2} = k_{x2}(u + b\psi) + c_{x2}(\dot{u} - b\dot{\psi}) \quad (94)$$

$$f_{y1} = k_{y1}(v + a\theta) + c_{y1}(\dot{v} + a\dot{\theta}) \quad (95)$$

$$f_{y2} = k_{y2}(v - b\theta) + c_{y2}(\dot{v} - b\dot{\theta}) \quad (96)$$

Onde  $c$  é o coeficiente de amortecimento viscoso e é definido como a força necessária para produzir uma unidade de velocidade através do elemento de amortecimento. Sendo:

$$\begin{aligned} c_{xT} &= c_{x1} + c_{x2}, & c_{yT} &= c_{y1} + c_{y2} \\ c_{xC} &= -ac_{x1} + bc_{x2}, & c_{yC} &= -ac_{y1} + bc_{y2} \\ c_{xR} &= a^2c_{x1} + b^2c_{x2}, & c_{yR} &= a^2c_{y1} + b^2c_{y2} \end{aligned} \quad (97)$$

Usando as definições acima e substituindo as equações (93), (94), (95) e (96) nas equações (8), (9), (10) e (11), encontra-se:

$$m\ddot{u} + c_{xT}\dot{u} + c_{xC}\dot{\psi} + k_{xT}u + k_{xC}\psi = 0 \quad (98)$$

$$m\ddot{v} + c_{yT}\dot{v} + c_{yC}\dot{\theta} + k_{yT}v - k_{yC}\theta = 0 \quad (99)$$

$$I_d\ddot{\theta} + I_p\Omega\dot{\psi} - c_{yC}\dot{v} + c_{yR}\dot{\theta} - k_{yC}v + k_{yR}\theta = 0 \quad (100)$$

$$I_d\ddot{\psi} - I_p\Omega\dot{\theta} + c_{xC}\dot{u} + c_{xR}\dot{\psi} + k_{xC}u + k_{xR}\psi = 0 \quad (101)$$

Para simplificar analisa-se apenas o caso onde  $k_{xC} = k_{yC} = 0$  e  $c_{xC} = c_{yC} = 0$ , assim as equações acima se tornam:

$$m\ddot{u} + c_{xT}\dot{u} + k_{xT}u = 0 \quad (102)$$

$$m\ddot{v} + c_{yT}\dot{v} + k_{yT}v = 0 \quad (103)$$

$$I_d\ddot{\theta} + I_p\Omega\dot{\psi} + c_{yR}\dot{\theta} + k_{yR}\theta = 0 \quad (104)$$

$$I_d\ddot{\psi} - I_p\Omega\dot{\theta} + c_{xR}\dot{\psi} + k_{xR}\psi = 0 \quad (105)$$

### **Rotor rígido com suporte isotrópico e amortecido**

Assumindo um suporte com propriedades isotrópicas, ou seja, com propriedades iguais nas direções  $x$  e  $y$ . Assim é correto afirmar que  $k_{xT} = k_{yT} = k_T$ ,  $c_{xT} = c_{yT} = c_T$ , dessa maneira pode-se escrever:

$$m\ddot{u} + c_T\dot{u} + k_Tu = 0 \quad (106)$$

$$m\ddot{v} + c_T\dot{v} + k_Tv = 0 \quad (107)$$

$$I_d\ddot{\theta} + I_p\Omega\dot{\psi} + c_R\dot{\theta} + k_R\theta = 0 \quad (108)$$

$$I_d\ddot{\psi} - I_p\Omega\dot{\theta} + c_R\dot{\psi} + k_R\psi = 0 \quad (109)$$

As equações (106) e (107) são desacopladas das demais, e podem ser resolvidas assumindo as soluções da forma  $u(t) = u_0e^{st}$  e  $v(t) = v_0e^{st}$  para se encontrar

$$(ms^2 + c_Ts + k_T)u_0 = 0 \quad (110)$$

$$(ms^2 + c_Ts + k_T)v_0 = 0 \quad (111)$$

Se  $c_T^2 < 4mk_T$ , então as equações (110) e (111) tem raízes complexas conjugadas repetidas:

$$s_1 = s_2 = -\frac{c_T}{2m} + j\sqrt{\frac{k_T}{m} - \left(\frac{c_T}{2m}\right)^2} \quad (112)$$

$$s_5 = s_6 = -\frac{c_T}{2m} - j\sqrt{\frac{k_T}{m} - \left(\frac{c_T}{2m}\right)^2} \quad (113)$$

As equações (108) e (109) são acopladas entre si e devem ser solucionadas assumindo soluções da forma  $\theta(t) = \theta_0 e^{st}$  e  $\psi(t) = \psi_0 e^{st}$ , logo:

$$(I_d s^2 + c_R s + k_R)\theta_0 + I_p \Omega s \psi_0 = 0 \quad (114)$$

$$-I_p \Omega s \theta_0 + (I_d s^2 + c_R s + k_R)\psi_0 = 0 \quad (115)$$

A solução encontrada é:

$$(I_d s^2 + c_R s + k_R)^2 + (I_p \Omega s)^2 = 0 \quad (116)$$

Ou

$$I_d s^2 + (c_R \mp j I_p \Omega) s + k_R = 0 \quad (117)$$

As raízes da equação (117) não podem ser expressas em uma equação algébrica simples, com parte real e imaginária. Porém sabe-se que as raízes da equação (116) são da seguinte forma:

$$s_{3,7} = -\zeta_3 w_3 \pm j w_{d3} \text{ e } s_{4,8} = -\zeta_4 w_4 \pm j w_{d4} \quad (118)$$

Nesta equação  $w_{di} = w_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}$ . Essas quatro raízes são a solução das duas equações quadráticas da equação (117), e as raízes podem se unir como  $[s_3, s_8]$  e  $[s_4, s_7]$ . Agora gerando a equação quadrática a partir do par de soluções  $s_4$  e  $s_7$ :

$$(s - (-\zeta_3 w_3 - j w_{d3}))(s - (-\zeta_4 w_4 + j w_{d4})) = 0 \quad (119)$$

Expandindo a equação (119) obtém-se:

$$s^2 + ((\zeta_3 w_3 + \zeta_4 w_4) - j(w_{d4} - w_{d3}))s + ((\zeta_3 \zeta_4 w_3 w_4 + w_{d3} w_{d4}) + j(w_{d3} \zeta_4 w_4 - w_{d4} \zeta_3 w_3)) = 0 \quad (120)$$

Observando a equação (117) nota-se que o termo constante é real, portanto na equação (120) a parte imaginária do termo constante deve ser zero, ou seja,  $w_{d3} \zeta_4 w_4 - w_{d4} \zeta_3 w_3 = 0$ . Assim segue que  $w_3 w_4 \zeta_4 \sqrt{1 - \zeta_3^2} = w_3 w_4 \zeta_3 \sqrt{1 - \zeta_4^2}$ . Rearranjando, pode-se encontrar a seguinte equação:

$$\frac{\zeta_3}{\sqrt{1 - \zeta_3^2}} = \frac{\zeta_4}{\sqrt{1 - \zeta_4^2}} \quad (121)$$

Consequentemente se percebe que  $\zeta_3 = \zeta_4$ .

Isto mostra que quando um par de frequências naturais se separa devido ao efeito giroscópio, o fator de amortecimento para os dois modos de vibração são iguais se os mancais forem isotrópicos (FRISWELL *et al.*, 2010).

## Rotor rígido em suporte com amortecimento anisotrópico

Neste caso, considera-se que as rigidez dos suportes são idênticas nas direções  $x$  e  $y$ , porém o amortecimento não. Assim podemos afirmar que  $k_{xT} = k_{yT} = k_T$ . Logo as equações (102), (103), (104) e (105) se tornam:

$$m\ddot{u} + c_{xT}\dot{u} + k_T u = 0 \quad (122)$$

$$m\ddot{v} + c_{yT}\dot{v} + k_T v = 0 \quad (123)$$

$$I_d\ddot{\theta} + I_p\Omega\dot{\psi} + c_{yR}\dot{\theta} + k_R\theta = 0 \quad (124)$$

$$I_d\ddot{\psi} - I_p\Omega\dot{\theta} + c_{xR}\dot{\psi} + k_R\psi = 0 \quad (125)$$

As equações (122) e (123) não são dependentes, e podem ser resolvidas diretamente. Mantendo a atenção para as equações que são dependentes (124) e (125), e resolvendo a equação para encontrar  $\theta(t) = \theta_0 e^{st}$  e  $\psi(t) = \psi_0 e^{st}$ , logo estas equações se tornam:

$$(I_d s^2 + c_{yR} s + k_R)(I_d s^2 + c_{xR} s + k_R) + I_p^2 \Omega^2 s^2 = 0 \quad (126)$$

Agora rearranjando a equação acima

$$(I_d s^2 + c_{mR} s + k_R)^2 = (c_{dR}^2 - I_p^2 \Omega^2) s^2 \quad (127)$$

Onde  $c_{mR} = (c_{xR} + c_{yR})/2$  e  $c_{dR} = (c_{xR} - c_{yR})/2$ . Se  $\Omega^2 < c_{dR}^2/I_p^2$ , o termo do lado direito é positivo. Assumindo que  $\alpha^2 = c_{dR}^2 - I_p^2 \Omega^2$  e tirando a raiz quadrada encontra-se:

$$I_d s^2 + (c_{mR} \pm \alpha) s + k_R = 0 \quad (128)$$

Assim está claro que se  $\Omega^2 < c_{dR}^2/I_p^2$ , então as frequências naturais das duas raízes da equação (127) são iguais, mais os coeficientes de amortecimento, e consequentemente as razões de amortecimento, são diferentes dependendo se utiliza-se  $(c_{mR} + \alpha)$  ou  $(c_{mR} - \alpha)$ . Quando  $\Omega = 0$ ,  $(c_{mR} \pm \alpha)$  simplifica para  $C_{xR}$  e  $C_{yR}$ . À medida que  $\Omega$  aumenta,  $\alpha$  tende à zero, e ambos os coeficientes de amortecimento se tornam  $C_{mR}$  (FRISWELL *et al.*, 2010).

Se  $\Omega^2 > c_{dR}^2/I_p^2$  o lado direito da equação (127) é negativo e podemos definir uma transformada para a velocidade  $\hat{\Omega}$  como:

$$\hat{\Omega}^2 = \Omega^2 - \left(\frac{c_{dR}}{I_p}\right)^2 \quad (129)$$

Portanto a equação (127) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$(I_d s^2 + c_{mR} s + k_R)^2 + I_p^2 \hat{\Omega}^2 s^2 \quad (130)$$

Pode ser observado que a equação (130) é similar à equação (126), dessa forma percebe-se que quando  $\Omega^2 > c_{dR}^2 / I_p^2$ , o amortecimento anisotrópico fornece o mesmo padrão de comportamento que no isotrópico, exceto que o comportamento é dependente do coeficiente médio de amortecimento ao invés do coeficiente efetivo de amortecimento, e ainda a velocidade do rotor é mudada de  $\Omega$  para  $\hat{\Omega}$  (FRISWELL *et al.*, 2010).

## Balanceamento de rotores

As máquinas rotativas ideais são projetadas para operar de forma que o seu eixo de rotação coincida com o seu eixo principal de inércia, que se estende na direção axial do rotor. Porém, esta condição não pode ser inteiramente atendida na prática, dando origem a forças centrífugas e momentos que resultam na transmissão de grandes esforços aos mancais e a estrutura de suporte das máquinas. O desbalanceamento excessivo do rotor pode ocasionar grandes amplitudes de movimento, gerando altos níveis de vibração, que se traduzem em danos a vários componentes do sistema. Verificando-se na prática, o desbalanceamento e o desalinhamento estão entre as duas principais causas de mau funcionamento e de falhas catastróficas em máquinas rotativas, e isso compromete a segurança e a confiabilidade das instalações industriais, além dos riscos de danos causados ao meio ambiente.

O desbalanceamento em uma máquina pode ser causado por vários fatores, como por exemplo, pelo próprio processo de manufatura devido às tolerâncias de fabricação e a heterogeneidade do material. Além dos fatores citados anteriormente, o desbalanceamento pode ser provocado ainda por fatores relacionados à operação da máquina, tais como o acúmulo de partículas indesejáveis como, por exemplo, gelo, sujeira, resinas, etc. nas pás do rotor ou a remoção do material das pás quando o fluido de trabalho possui partículas duras. Portanto, pode-se concluir que qualquer fator que altere a simetria do rotor em relação ao seu eixo principal de inércia pode

causar o desbalanceamento.

Existem várias formas para realizar o balanceamento de rotores, sendo que a maior parte delas se baseia na hipótese de linearidade do sistema. Desta forma, caso ocorram não linearidades, o processo se torna iterativo. O principal conceito do balanceamento consiste no monitoramento dos efeitos da resposta síncrona (ou seja, 1x a rotação) da máquina devida a uma, ou mais, pequenas massas instaladas no rotor e então escalar esta influência para determinar a quantidade de desbalanceamento presente no sistema (FRISWELL *et al.*, 2010). Usualmente, tais massas são instaladas em planos pré-determinados e perpendiculares ao eixo axial do rotor, sendo chamados de planos de correção ou planos de balanceamento.

Apartir deste ponto, é conveniente definir quando um rotor deve ser considerado como um rotor rígido ou flexível; e esta definição está diretamente relacionada com o comportamento dinâmico nas velocidades de operação, e o mesmo pode ser determinado através de uma análise das velocidades críticas do sistema. De acordo com esta análise, se a energia potencial de deformação nos mancais corresponder a mais de 80% da energia potencial de deformação total do sistema, em geral, este rotor pode ser considerado como rígido (EHRICH, 2004). Deste modo, o rotor em análise poderá ser balanceado de maneira satisfatória utilizando-se de apenas dois planos de correção arbitrários. Além disso, o sistema manterá o seu balanceamento ao longo de toda a sua faixa de velocidades de operação. Porém, caso a energia potencial de deformação do eixo exceder 20% da energia potencial de deformação do sistema e eixo operar acima de uma ou mais velocidades críticas, então o rotor pode ser classificado como flexível (EHRICH, 2004). De acordo com esta classificação, as condições de um balanceamento em dois planos em muitos casos podem não ser suficientes, sendo necessário utilizar planos de correção adicionais para balancear o rotor adequadamente, reduzindo a vibração do sistema a níveis aceitáveis.

Para maiores informações a respeito do assunto, sugerem-se as seguintes referências: Ehrich (2004), Muszynska (2005) e Vance (1988). Além disso, existem diversas normas internacionais que tratam a respeito processo de balanceamento de

rotores de maneira bastante prática, tais como: ISO 1925, ISO 1940 e API 684.

### ***Balaceamento de rotores rígidos***

Em relação aos problemas de balanceamento em engenharia, os rotores rígidos consistem nos casos mais simples desses problemas. Todo o conjunto de deslocamentos transversais de qualquer rotor rígido pode ser definido empregando-se somente quatro coordenadas de deslocamento, sendo que as mesmas podem ser especificadas de diversas formas. Uma forma bastante comum é utilizar as translações do centro de gravidade do rotor nas direções  $x$  e  $y$ , assim como as rotações do centro de gravidade em torno destes eixos. Devido ao rotor ser considerado como um corpo rígido, usualmente os modos são classificados como modos de translação e de rotação. O primeiro tipo consiste em um movimento de translação pura do rotor em uma direção transversal. Já o outro caso consiste em uma rotação pura em torno de um eixo transversal que passa pelo centro de gravidade do rotor. Embora esta terminologia seja muito empregada na prática, não é uma terminologia que pode ser considerada totalmente correta, pois se refere a um padrão de deslocamento, que pode não se referir a um modo específico do sistema.

Qualquer padrão de desbalanceamento em um rotor que possa excitar diretamente um modo de translação é classificado como um desbalanceamento estático. Este tipo de desbalanceamento estático está presente quando há somente uma massa de desbalanceamento, podendo estar localizada ou não no plano do centro de gravidade do rotor. Por outro lado, qualquer desbalanceamento capaz de excitar diretamente um modo de rotação é denominado desbalanceamento dinâmico, que é caracterizado pela presença de duas massas de desbalanceamento, localizadas em planos distintos. Os termos desbalanceamento estático e desbalanceamento dinâmico podem parecer, indicar que no primeiro caso o nível de excitação independe da velocidade, e ao passo que no segundo caso, o nível de excitação depende diretamente da velocidade de rotação. Mas na verdade, em ambos os casos, os níveis de excitação são proporcionais ao quadrado da velocidade de rotação. O termo desbalanceamento estático se ocasiona do fato de que se um rotor horizontal

é suportado por mancais perfeitos e sem atrito, a gravidade fará com que este rotor gire até que o seu centro de gravidade se mova para a sua posição mais inferior possível. Um exemplo clássico de desbalanceamento estático acontece a partir do momento que se suspende uma roda de bicicleta, que tende a girar até que o seu centro de gravidade (que geralmente está na mesma direção radial da válvula do pneu) encontre a posição mais inferior possível. Em contrapartida, a gravidade não gera nenhum movimento quando o desbalanceamento presente no rotor possui um caráter puramente dinâmico.

Para a obtenção de um rotor rígido perfeitamente balanceado, se dá através da instalação de massas de correção de desbalanceamento em dois planos iguais do rotor; as propriedades dinâmicas da estrutura de suporte independe, para se obter um rotor perfeitamente balanceado. Por isso, na maior parte dos procedimentos de balanceamento na indústria os rotores são considerados como corpos rígidos. Além disso, em casos de rotores que possuem o diâmetro bem maior do que o comprimento na direção axial o balanceamento em apenas um plano geralmente produz resultados satisfatórios.

### **Balanceamento em um plano**

Para analisar o balanceamento em um plano, é necessário considerar um rotor rígido e simétrico, dotado exclusivamente de graus de liberdade de translação. Além disso, assumi-se também que qualquer desbalanceamento presente deverá estar localizado em um plano de simetria normal ao eixo axial do rotor e que a rigidez dos suportes em cada extremidade deste plano sejam idênticas, sendo que as massas de correção serão também aplicadas neste mesmo plano.

Em primeiro lugar, supõe-se que a resposta inicial do rotor, em uma dada velocidade de rotação  $\Omega$ , seja  $r_0$ . Se um desbalanceamento adicional  $b_c = m_c \varepsilon_c$  for instalado no plano de correção e o rotor for novamente operado na mesma velocidade de rotação  $\Omega$ , será medida uma nova resposta  $r_c$ . Como o rotor é considerado como um sistema linear, esta nova resposta pode ser escrita de seguinte forma:

$$r_c = r_0 + R(\Omega)b_c \quad (131)$$

Onde:

$R(\Omega)$  é uma função de resposta que independe da massa de teste adicionada.

Desta maneira, o objetivo do procedimento de balanceamento é determinar a correção do desbalanceamento,  $b_c$ , capaz de anular a resposta do sistema, ou seja,  $r_c = 0$ . Para tanto, deve-se determinar  $R(\Omega)$ . Este trabalho pode ser realizado com base em um modelo numérico confiável, porém, é necessário citar que o modelo deve representar tanto o comportamento dinâmico do sistema quanto do sistema de medição utilizado. Por esse motivo, o procedimento adotado, na maior parte dos casos na indústria, é a determinação experimental da função de resposta, que será brevemente apresentada a seguir.

Em primeiro lugar, instala-se no plano de correção uma massa de teste  $b_1 (= m_1 \varepsilon_1)$ , que produz uma nova resposta  $r_1$ , dada pela equação (132):

$$r_1 = r_0 + R(\Omega)b_1 \quad (132)$$

Com base na resposta original,  $r_0$  e na resposta devida à massa de teste,  $r_1$ , é possível chegar a:

$$r_d = (r_1 - r_0) \quad (133)$$

$$R(\Omega) = \frac{r_d}{b_1} \quad (134)$$

Em seguida, basta substituir  $R(\Omega)$  na equação (131) e considerar  $r_c = 0$ :

$$b_c = \frac{-r_0}{R(\Omega)} = \frac{-r_0 \times b_1}{r_d} \quad (135)$$

Deve-se observar que o cálculo da correção do desbalanceamento envolve uma divisão pela grandeza  $r_d$ , que caso possua magnitude muito pequena em relação à  $r_0$ , pode causar problemas devidos a incertezas. Para superar este problema, na prática, costuma-se utilizar uma massa de teste que produza uma alteração significativa na resposta do sistema, garantindo que  $r_d$  seja similar a  $r_0$ .

### **Balanceamento em dois planos**

Em primeiro lugar, é necessário definir o que consiste o balanceamento em dois planos. O balanceamento em dois planos consiste em um procedimento de

correção no qual duas massas de balanceamento são instaladas em dois planos de correção distintos e perpendiculares ao eixo axial do rotor, sendo capaz de corrigir qualquer problema de desbalanceamento em rotores rígidos. Isto pode ser justificado devido ao fato de que apesar da massa estar distribuída ao longo do eixo, a força de desbalanceamento resultante é determinada pela posição do centro de massa. De forma análoga, o momento desbalanceado resultante é determinado pelo desalinhamento entre o eixo do rotor e o eixo principal de inércia. Desta maneira, tanto a força de desbalanceamento quanto o momento desbalanceado resultante podem ser ajustados através da alteração da distribuição de massa em dois planos distintos na direção axial.

Como o sistema é linear, é possível obter uma relação entre os deslocamentos e as forças atuantes. Assumindo que as únicas forças atuantes no sistema sejam devidas ao desbalanceamento, pode-se obter a equação (136):

$$r = R(\Omega)b \quad (136)$$

Onde:

$r$  = representa um vetor de deslocamentos;

$b$  = representa um vetor de massas de desbalanceamento;

$R(\Omega)$  = é a matriz das funções de resposta; sendo que todas as grandezas envolvidas pertencem ao conjunto dos números complexos. Quando as respostas do sistema são medidas em deslocamento, a matriz  $R(\Omega)$  pode ser encontrada a partir da matriz de receptância para o sistema completo, multiplicada por  $\Omega^2$  (FRISWELL *et al.*, 2010). No entanto, assim como no caso de balanceamento em um plano, os modelos numéricos são geralmente insatisfatórios e  $R(\Omega)$  deve ser medido na prática. Já em relação ao balanceamento em dois planos, é necessário empregar, no mínimo, duas grandezas de resposta independentes. Com base na Figura 11, a equação (136) assume a seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} = R(\Omega) \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (137)$$

Onde:

$b_1 = m_1 \varepsilon_1$ : desbalanceamento inicial no disco 1;

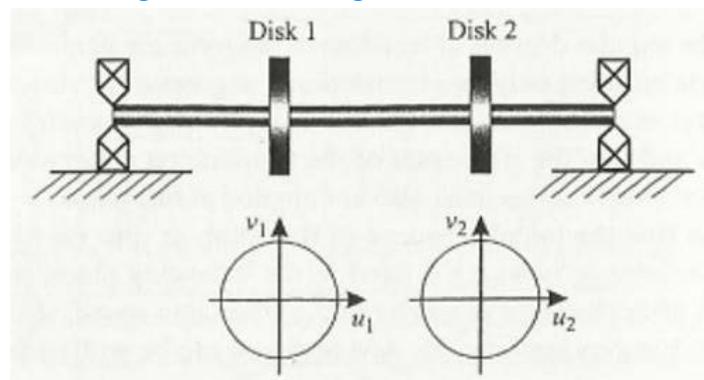
$b_2 = m_2 \varepsilon_2$ : desbalanceamento inicial no disco 2;

$m_1, m_2$ : massas de desbalanceamento nos discos 1 e 2, respectivamente;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ : números complexos representando a localização das massas de desbalanceamento nos planos 1 e 2, respectivamente;

$r_1, r_2$ : grandezas que representam as respostas independentes, medidas nos planos 1 e 2, respectivamente.

Figura 11 - Rotor rígido com dois discos.



Fonte: Friswell (2010)

Representando por  $r_0$  o vetor das respostas iniciais, a equação (136) pode ser usada para expressar o vetor de resposta,  $r_c$ , na presença de qualquer conjunto de massas de correção,  $b_c$ :

$$r_c = r_0 + R(\Omega)b_c \quad (138)$$

Quando a matriz de resposta,  $R(\Omega)$ , é conhecida, então neste caso, um vetor adequado de massas de correção do desbalanceamento,  $b_c$ , pode ser determinado diretamente. Todavia, como a matriz  $R(\Omega)$  é desconhecida, é necessário utilizar massas de teste para determiná-la experimentalmente. Em relação ao balanceamento em apenas um plano,  $R(\Omega)$  é um escalar e requer a utilização de apenas uma massa (ou desbalanceamento) de teste. Já no caso de balanceamento em dois planos,  $R(\Omega)$  é uma matriz  $2 \times 2$ , o que torna necessária a utilização de duas massas de teste. Em resumo, o procedimento utilizado baseia-se na instalação de apenas uma massa de teste no disco 1, e a resposta é medida nos dois pontos; em seguida, a massa de teste

do disco 1 é removida, e é instalada outra massa de teste (mas também poderia ser usada a mesma) no disco 2, repetindo novamente as medições das respostas. Através deste procedimento, é possível garantir que todos os vetores de desbalanceamento,  $b$ , sejam independentes.

Considerando que uma combinação de massas de teste  $b_1$ , é instalada no disco 1, produzindo um vetor de respostas  $r_1$ , pode-se escrever a expressão (139):

$$r_1 = r_0 + R(\Omega)b_1 \quad (139)$$

Em seguida, a massa de teste anterior é removida e uma nova combinação de massas de teste,  $b_2$ , é instalada no disco 2, produzindo um vetor de respostas  $r_2$ . Tornando possível obter uma expressão análoga à equação (139):

$$r_2 = r_0 + R(\Omega)b_2 \quad (140)$$

Com base nas equações (139) e (140) pode-se escrever as seguintes relações:

$$r_{d1} = (r_1 - r_0) \quad (141)$$

$$r_{d2} = (r_2 - r_0) \quad (142)$$

Substituindo as equações (141) e (142), respectivamente nas equações (139) e (140), tem-se:

$$r_{d1} = R(\Omega)b_1 \quad (143)$$

$$r_{d2} = R(\Omega)b_2 \quad (144)$$

As equações (143) e (144) formam um sistema linear com quatro incógnitas:

$$[r_{d1} \ r_{d2}] R(\Omega) [b_1 \ b_2] \quad (145)$$

$$R(\Omega) = [r_{d1} \ r_{d2}] [b_1 \ b_2]^{-1} \quad (146)$$

Substituindo a equação (146) na equação (138), e levando em consideração que  $r_c = 0$ , chega-se a equação (147):

$$b_c = R(\Omega)^{-1}r_0 = [b_1 \ b_2] [r_{d1} \ r_{d2}]^{-1}r_0 \quad (147)$$

A equação (147) é análoga a expressão para o balanceamento em um plano, dada pela equação (135). Também é interessante mencionar que a abordagem apresentada funciona bem para rotores com suportes anisotrópicos, nos quais as respostas são medidas em apenas uma direção em cada um dos planos.

Para que o procedimento de balanceamento em dois planos seja bem

sucedido, as massas de correção estimadas,  $b_C$ , não devem ser afetadas por pequenas quantidades de ruído presentes nos vetores de resposta  $r_0$ ,  $r_1$ , e  $r_2$ . Outra preocupação é que as alterações nas respostas,  $r_{d1}$  e  $r_{d2}$  sejam significativamente diferentes de  $r_0$  (para reduzir os efeitos da contaminação por ruído nas medições) e entre si, para garantir que a matriz  $[r_{d1} \ r_{d2}]$  seja bem condicionada. Portanto, a escolha das massas de teste,  $b_1$  e  $b_2$ , deve ser feita com cautela, pois uma matriz  $[b_1 \ b_2]$  mal condicionada produzirá uma matriz  $[r_{d1} \ r_{d2}]$  também mal condicionada (FRISWELL *et al.*, 2010).

## EXEMPLOS NUMÉRICOS

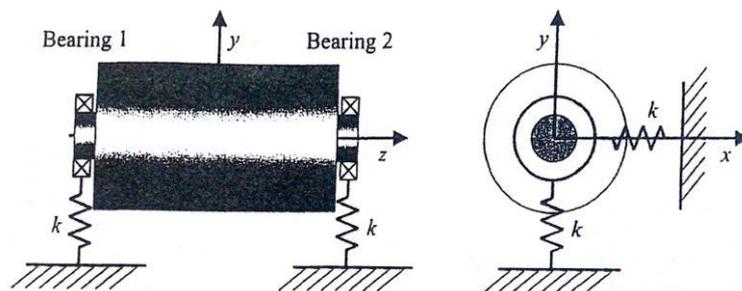
Nesta seção, serão analisados quatro casos numéricos com a finalidade de ilustrar os conceitos teóricos apresentados anteriormente. Os dois primeiros casos são dedicados a investigação da resposta dinâmica de sistemas rotativos. Já os dois últimos são empregados na análise do processo de balanceamento de rotores.

Todas as simulações foram realizadas com base no toolbox Dynamics of Rotating Machinery (FRISWELL *et al.*, 2010), desenvolvido em ambiente Matlab.

### Caso 1

Neste caso, será analisado um rotor rígido montado sobre dois suportes flexíveis, conforme a Figura 12, com centro de gravidade localizado ao centro entre os suportes. O rotor tem massa de 800 kg, momento polar de inércia de  $30 \text{ kg m}^2$  e momento diametral de inércia  $50 \text{ kg m}^2$ . O rotor é suportado em mancais isotrópicos, os quais estão à 1m de distância um do outro, com rigidez em ambas as direções de  $4 \text{ MN/m}$ . A máquina é operada a 3000 RPM.

Figura 12 – Esquemática de um rotor rígido (caso 1).



Fonte: Friswell (2010)

Com base no sistema apresentado, foram investigadas a influência da variação dos seguintes parâmetros sobre as suas frequências naturais:

1ª Variação: Rotação da máquina em 10000 RPM;

2ª Variação: Rotação da máquina em 1000 RPM;

3ª Variação: Rigidez de  $2 \text{ MN/m}$  nos dois mancais e ambas direções;

4ª Variação: Rigidez de 8 MN/m nos dois mancais e ambas direções;

Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 1.

**Tabela 1 – Resultados do caso 1 e suas variações.**

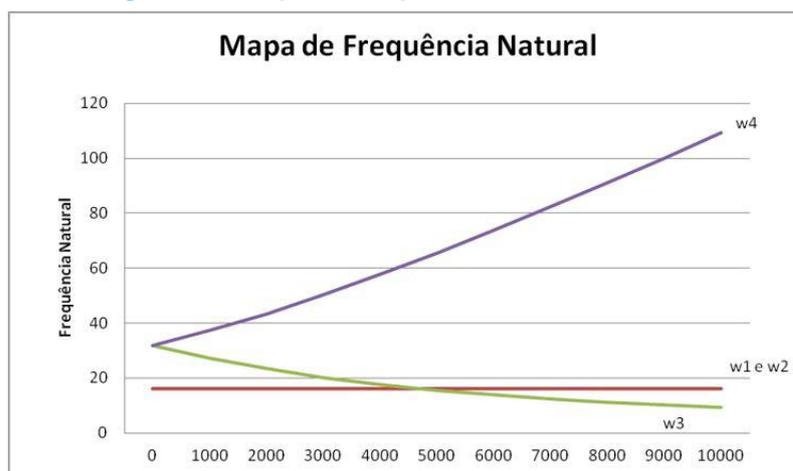
Frequências naturais	Referência	1ª Variação	2ª Variação	3ª Variação	4ª Variação
1ª	15,9155 Hz	15,9155 Hz	15,9155 Hz	10,0658 Hz	20,1317 Hz
2ª	15,9155 Hz	15,9155 Hz	15,9155 Hz	10,0658 Hz	20,1317 Hz
3ª	20,1882 Hz	9,2724 Hz	27,2213 Hz	12,0482 Hz	32,4492 Hz
4ª	50,1882 Hz	109,2724 Hz	37,2213 Hz	42,0482 Hz	62,4492 Hz

Com base nos resultados obtidos acima é possível observar primeiramente que alterando a velocidade de rotação do rotor, neste caso, as duas primeiras frequências naturais não se alteram, pois as mesmas são dependentes apenas da massa e da rigidez, isto acontece porque estas frequências são relativas aos movimentos de translação, e não de rotação. Percebe-se ainda que a primeira e segunda frequências são iguais em todas variações. Estes dois fatos acontecem porque as rigidezes dos mancais são iguais nos dois mancais, além de os mesmos serem isotrópicos, aliado ainda ao centro de massa do rotor estar centralizado entre os dois mancais.

Ainda observando as alterações na velocidade de rotação a terceira e quarta frequências naturais são alteradas de formas bastante distintas, no caso de um aumento para 10000 RPM (1ª Variação) observou-se uma diminuição de mais da metade da terceira frequência natural e um aumento de mais que o dobro da quarta. Da mesma maneira com a rotação a 1000 RPM (2ª Variação) a terceira frequência natural aumentou e a quarta diminuiu. Isto acontece porque cada frequência natural está relacionada a um modo de vibração, e cada modo de vibração se comporta de maneira diferente, como pode ser observados no mapa de frequência abaixo (Figura 13), um é o modo de precessão reversa ( $\mathbf{W}_3$ ), enquanto o outro é o modo de precessão direta ( $\mathbf{W}_4$ ) do caso em questão.

Os modos de vibração são diferentes por causa do efeito giroscópio, quando o mesmo age no mesmo sentido da rotação, acontece a precessão direta, enquanto quando ele age no sentido contrário da rotação, ocorre a precessão inversa.

Figura 13 - Mapa de frequência natural do caso 1



Fonte: Autoria própria.

Outro ponto importante neste resultado é observar que quando a rigidez é alterada, os valores das frequências naturais sofrem variações significativamente maiores do que quando se alteram a velocidade de rotação, ou seja, neste caso uma maneira mais eficiente para se alterar o comportamento da máquina é alterando a rigidez dos mancais.

Quando a rigidez foi diminuída (3ª Variação) todas as frequências naturais também diminuiram, e quando a rigidez aumentou (4ª Variação), todas as frequências naturais aumentaram em consequência. Desta maneira pode se observar uma relação de certa proporcionalidade, onde as variações de rigidez para menos ou para mais, alteram as frequências naturais do sistema para menos ou para mais de acordo com a alteração.

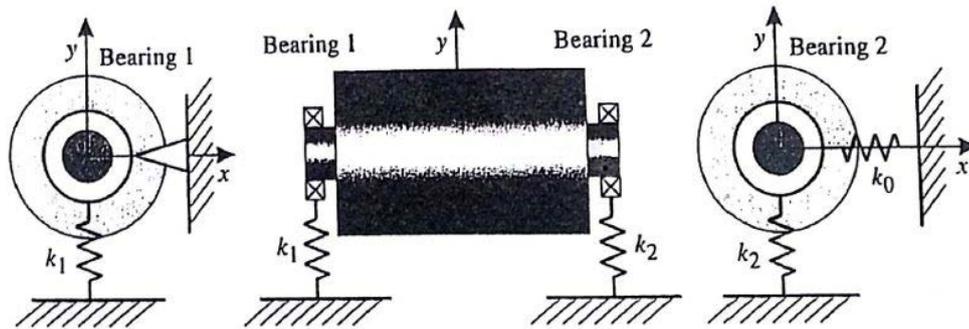
Destes resultados pode-se concluir que sempre que for necessária uma alteração para diminuir vibrações, se a mesma for causada por coincidência de uma frequência natural do sistema, deve-se levar em consideração primeiramente, a possibilidade de se alterar a massa ou a rigidez do sistema, por serem mais efetivas e mais previsíveis também.

## Caso 2

Neste caso, será estudado o comportamento de um rotor rígido de aço com 1 m de comprimento que é suportado por rolamentos simples a cada extremidade, como

mostrado na Figura 14. Na direção  $y$ , a rigidez efetiva dos mancais e das fundações é dada por  $k_1$  e  $k_2$  nas extremidades esquerda e direita, respectivamente. Na direção  $x$ , a extremidade esquerda a combinação da rigidez efetiva das fundações e dos mancais é tão alta que pode ser considerada como rígida. Já a combinação da rigidez na extremidade direita é  $k_0$ . O centro de massa do rotor é localizado ao centro do mesmo.

Figura 14 – Esquema de um rotor rígido (caso 2)



Fonte: Friswell (2010)

Supondo  $k_0 = k_1 = k_2 = 2,0 \text{ MN/m}$ ,  $m = 150 \text{ kg}$ ,  $I_p = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  o momento diametral de inércia ao redor do centro de massa é  $I_d = 8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , e  $a = L/2 = 0,5 \text{ m}$ . Empregando o teorema dos eixos paralelos, verifica-se que o momento diametral de inércia na extremidade esquerda é  $I_{de} = 38 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Devem ser determinadas as frequências naturais deste sistema e de suas variações nas seguintes condições:

- a)  $\Omega=0$ ;
- b)  $\Omega=10000 \text{ RPM}$ ;

Neste caso, serão avaliados os efeitos das variações dos seguintes parâmetros:

- 1ª Variação:  $k_0 = k_1 = k_2 = 5,0 \text{ MN/m}$ ;
- 2ª Variação:  $k_0 = k_1 = k_2 = 500 \text{ KN/m}$ ;
- 3ª Variação:  $L = 2 \text{ m}$ ;

A seguir na Tabela 2, apresentam-se os resultados encontrados através da simulação numérica.

**Tabela 2 – Resultados do caso 2 e suas variações**

Frequências naturais		Referência	1ª Variação	2ª Variação	3ª Variação
1ª	a)	25,9899 Hz	41,0936 Hz	12,9949 Hz	25,9899 Hz
	b)	25,9899 Hz	41,0936 Hz	12,9949 Hz	25,9899 Hz
2ª	a)	33,3679 Hz	52,7593 Hz	16,6840 Hz	35,8127 Hz
	b)	31,2595 Hz	51,2985 Hz	13,6071 Hz	35,6753 Hz
3ª	a)	56,2698 Hz	88,9703 Hz	28,1349 Hz	112,5395 Hz
	b)	60,0649 Hz	91,5040 Hz	34,4967 Hz	112,9729 Hz

Analogamente ao caso anterior, a primeira frequência de todas as variações não se altera quando a velocidade de rotação é alterada, isto porque ela é uma frequência atrelada ao movimento de translação.

Observando os outros resultados, percebe-se que mesmo alterando significativamente a velocidade de rotação do motor, os valores alteram de maneira discreta, porém ocorre como no caso 1, onde se tem dois modos de vibração distintos, um de precessão reversa ( $w_2$ ) e outro de precessão direta ( $w_3$ ).

Levando em conta a 1ª Variação, onde a rigidez dos mancais é significativamente maior, percebe-se que todas as frequências naturais foram deslocadas para cima. Ao mesmo tempo em que na 2ª Variação, quando a rigidez dos mancais diminui, as frequências naturais também se deslocam para baixo. Estes fatos são intuitivos, e na prática acabam realmente sendo de grande valia, pelo fato de ser possível observar que quanto maior for a rigidez, maiores devem ser as excitações para que o sistema possa responder dinamicamente.

Observou-se que na 3ª Variação, com o aumento do comprimento do rotor, apenas a terceira frequência natural sofreu uma mudança significativa, e foi alterada para um valor bem mais alto, sendo possível então observar, que rotores de maior comprimento geralmente tem problemas para serem operados a grandes velocidades, e por este fato, se forem muito longos deverão ser analisados como rotores flexíveis. Entretanto em baixas rotações, pode-se fazer uma aproximação para rotores rígidos.

### Caso 3

Um rotor rígido carrega quatro discos rígidos distantes 0,5 m entre si. Os discos

são chamados de A, B, C e D ao longo do rotor, a partir de uma das extremidades. Foi descoberto que, no plano do disco A existe um desbalanceamento de 0,5 kg a um raio de 200 mm; no plano do disco B existe um desbalanceamento de 0,15 kg a um raio de 100 mm, e numa fase de 76°; no plano do disco C o desbalanceamento é de 0,6 kg ao raio de 200 mm, e numa fase de 132°; e finalmente no plano do disco D existe um desbalanceamento de 0,2 kg a um raio de 250 mm, e na fase de 212°. Todos os ângulos de fase são em relação ao desbalanceamento no plano A.

Neste caso, serão determinadas as magnitudes e posições angulares das massas de correção que deverão ser adicionadas ao raio de 100 mm aos discos B e D para balancear o rotor.

A partir deste caso as variações que serão feitas são as seguintes:

1ª Variação: Mesmo procedimento para os discos A e C;

2ª Variação: Massas de correção ao raio de 200 mm;

3ª Variação: Massa de desbalanceamento no disco C de 1 kg ao raio de 300 mm, e numa fase de 132°;

4ª Variação: Massa de desbalanceamento no disco A de 0,1 kg ao raio de 100 mm, massa de desbalanceamento no disco B de 0,05 kg ao raio de 100 mm, e numa fase de 76°, massa de desbalanceamento no disco C de 0,1 kg ao raio de 50 mm, e numa fase de 132°, e massa de desbalanceamento no disco D de 0,1 kg ao raio de 50 mm, e numa fase de 212°;

Os resultados obtidos do caso 3 estão listados na Tabela 3.

**Tabela 3– Resultados do caso 3 e suas variações**

	Massa de correção (kg)		Fase (°)	
Referência	Mb=1,2797	Md=1,3378	-152,4727	-7,7727
1ª Variação	Ma=1,2472	Mc=1,5298	-170,5274	-21,7585
2ª Variação	Mb=0,63984	Md=0,66891	-152,4727	-7,7727
3ª Variação	Mb=1,3682	Md=2,1067	-112,9091	-23,7883
4ª Variação	Mb=0,1601	Md=0,10942	-105,2247	4,1495

Comparando os resultados obtidos do caso de referencia e sua 1ª Variação pode-se observar que quando se altera o plano no qual o balanceamento será feito,

todos os parâmetros são alterados, ou seja, as massas e as fases que serão utilizadas para balancear o rotor serão diferentes.

Já observando a 2ª Variação, onde se deseja colocar as massas de correção a uma distância maior do centro do disco, observa-se que as massas diminuem significativamente, como era o esperado, porém as fases se mantêm as mesmas. Isso pelo fato de que o desbalanceamento é causado pela força centrífuga, dessa maneira aumentando a distância do raio onde a massa se encontra, deve-se diminuir a massa para que a força centrífuga resultante permaneça a mesma. Por outro lado a força é necessária na mesma fase, dessa forma a fase segue inalterada.

Na análise da 3ª Variação, pode se observar que com o aumento da massa de desbalanceamento e o raio da mesma, assim consequentemente aumentando a força desbalanceadora, uma maior massa de correção é necessária, além de também alterar as fases nas quais deverão ser aplicadas. Desta maneira fica explícito que o desbalanceamento é resultado do somatório das forças centrífugas.

Por último, observando o comportamento dos resultados após a 4ª Variação, nota-se que com massas de desbalanceamento, e em raios menores, assim consequentemente com uma força desbalanceadora menor, as massas de correção necessárias são significativamente menores, e por ser um sistema diferente dos outros visto anteriormente, as fases onde a massas devem ser colocadas também se alteram.

## Caso 4

A Figura 15 mostra um rotor situado no eixo  $z$ , o qual tem um comprimento total de 1,5 m. O rotor é suportado por pequenos e duros mancais à  $z = 0$  e  $z = 1,2$  m. Três discos rígidos, numerados de 1 a 3, estão fixados no rotor e o centro de massa de cada um é ligeiramente excêntrico. A Tabela 4 mostra a posição de cada disco e detalhes do desbalanceamento inicial presente em cada disco.

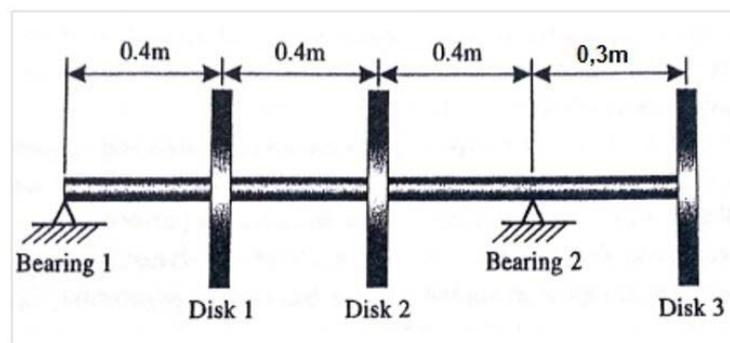
**Tabela 4 – Distribuição dos desbalanceamentos para os três discos (caso 4)**

Disco	Posição (m)	Massa do disco (kg)	Excentricidade (mm)	Orientação Angular (graus)
1	0,4	10	0,15	120
2	0,8	50	0,10	15
3	1,5	20	0,20	-45

a) Serão calculadas as magnitudes e fases das forças de reações nos mancais, causadas pelo desbalanceamento, quando o rotor está girando a 1000 RPM, assumindo que o rotor é rígido.

b) Serão determinadas as massas de correção a serem aplicadas nos discos 1 e 3, de modo a corrigir o desbalanceamento.

**Figura 15 – Uma máquina com eixo leve e três discos.**



**Fonte: Friswell (2010)**

As variações que serão feitas são as seguintes:

1ª Variação: Rotação do rotor em 3000 RPM;

2ª Variação: Massa do disco 1 de 30 kg;

3ª Variação: Massa do disco 3 de 40 kg;

4ª Variação: Excentricidade do desbalanceamento em 1 de 0,15 mm, em 2 de 0,20 mm e em 3 de 0,25 mm.

5ª Variação: Comprimento do rotor em 2 m e posição do disco 3 em 2 m.

O próximo passo é apresentar e analisar os resultados obtidos a partir do caso 4 e suas variações (Tabela 5).

**Tabela 5 – Resultados do caso 4 e suas variações.**

	a)		b)		
		Forças de reação (N)	Fase (°)	Massa de correção (g.m)	Fase (°)
Referência	F <sub>1</sub>	22,4211	-101,3613	M <sub>1</sub> 3,3321	-144,5522
	F <sub>2</sub>	75,4485	161,9913	M <sub>3</sub> 4,7258	152,7837
1ª Variação	F <sub>1</sub>	201,7902	-101,3613	M <sub>1</sub> 3,3321	-144,5522
	F <sub>2</sub>	679,0361	161,9913	M <sub>3</sub> 4,7258	152,7837
2ª Variação	F <sub>1</sub>	41,4959	-80,9190	M <sub>1</sub> 4,6820	-104,9198
	F <sub>2</sub>	67,5565	167,1148	M <sub>3</sub> 4,7258	152,7837
3ª Variação	F <sub>1</sub>	29,9228	-83,5962	M <sub>1</sub> 3,3923	-150,4782
	F <sub>2</sub>	127,0249	150,0932	M <sub>3</sub> 8,2932	145,0229
4ª Variação	F <sub>1</sub>	35,0170	-125,0952	M <sub>1</sub> 6,5774	-155,4782
	F <sub>2</sub>	118,9525	167,9693	M <sub>3</sub> 6,8845	159,7913
5ª Variação	F <sub>1</sub>	35,9273	-76,3033	M <sub>1</sub> 3,4598	-116,1896
	F <sub>2</sub>	92,2243	156,0171	M <sub>3</sub> 6,3333	148,1736

Observando os resultados do caso 4 e também de sua 1ª Variação é possível observar que aumentando a velocidade de rotação, as forças de desbalanceamento serão mais pronunciadas, elas aumentam de acordo com o quadrado da velocidade pelo fato de o desbalanceamento ser causado pela força centrífuga, porém ainda estão concentradas no mesmo lugar, por esta razão a fase em que acontece não muda. De maneira análoga, a massas de correção e suas fases também não se alteram, pois não foi alterada a constituição das massas e excentricidades do sistema.

Em relação à 2ª Variação, é conveniente destacar o fato de um aumento de massa, e em consequência do desbalanceamento, no disco 1 aumenta as forças de reação no mancal 1, enquanto diminui a do mancal 2. Isto ocorre, pois a resultante de desbalanceamento foi deslocada para mais próximo ao mancal 1, dessa maneira a intensidade da reação no mesmo aumenta. Como o aumento da força de desbalanceamento não foi grande o suficiente, a força de reação no mancal 2 diminuiu, porém este não é o comportamento padrão. Observa-se que como o desbalanceamento foi alterado com um todo, então a fase das forças reativas foram alteradas, bem como as massas de correção e suas respectivas fases.

Levando em conta as alterações feitas na 3ª Variação é constatado que de maneira análoga ao que ocorre na 2ª Variação, a resultante de desbalanceamento é deslocada para mais próximo do mancal 2. Dessa maneira a intensidade da força

de reação no mancal 2 aumenta. Porém diferentemente da 2ª Variação, a força de reação também aumenta no mancal 1, isto ocorre porque a alteração foi grande o suficiente para que mesmo com o deslocamento da resultante de balanceamento, a mesma ainda causasse uma reação maior no mancal 1. Ainda de acordo com a 2ª Variação, como o desbalanceamento foi alterado com um todo, então as fases das forças reativas, bem como as massas de correção e suas respectivas fases, também foram alteradas.

A alteração promovida pela 4ª Variação foi alterar as excentricidades dos discos para mais, e conseqüentemente isto alterou o desbalanceamento também para mais. Dessa forma como o esperado, ambas as forças reativas foram aumentadas, bem como as massas de correção necessárias. Assim como ocorreu nas duas variações anteriores, o fato de o desbalanceamento ser totalmente alterado leva a alterações nas fases das forças e também das massas de correção.

A 5ª Variação, talvez seja a mais difícil de prever todas as alterações que acontecem. Com o aumento do comprimento, e conseqüentemente alteração na posição do disco 3, então se pode notar um aumento nas duas forças reativas, e isso ocorre porque deslocando do disco 3, desloca-se também a resultante desbalanceadora, além de intensificá-la. Um aumento nas massas de correção necessárias também é notado pelo mesmo motivo. E como acontece nas variações anteriores, quando se altera o arranjo desbalanceador, alteram-se também as fases onde ocorrem as forças causadas pelo desbalanceamento, e também as fases das massas de correção.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

É possível notar que nem sempre é fácil prever no que alterações no sistema podem resultar. Em alguns casos, realmente os sistemas se comportam como o esperado, porém em várias situações uma análise muito simples pode não refletir corretamente a realidade.

Levando em consideração as respostas encontradas durante o presente estudo, pode-se afirmar que se necessário intervenções em um sistema dinâmico de modo a diminuir as influências de vibrações, é mais efetivo se alterar as propriedades de massa e rigidez do sistema, pois são elas que têm influencia sobre todas as frequências de um sistema, além de poderem alterar o balanceamento da máquina e também o amortecimento do sistema. Enquanto a variação na velocidade de rotação seria mais indicada apenas em casos em que permitam tal alteração, além de ser indicada somente quando se tem uma coincidência de operação com frequências naturais do sistema.

Outro ponto importante observado é sobre os diferentes modos de vibração, fazendo com que o mesmo sistema tenha comportamentos diferentes dependendo das variações que possam ocorrer no mesmo. Isto mostra a importância de uma análise mais detalhada nas alterações que devem ser feitas em sistemas reais que sofram com problemas de vibração.

É possível perceber que um deslocamento da resultante desbalanceadora causa também um deslocamento nas reações da estrutura. Esta informação pode ser útil em casos onde um dos apoios sofra mais que os outros com as forças causadas pelo desbalanceamento.

Pode ser comprovado também que um sistema desbalanceado irá vibrar de maneira mais visível em velocidades mais altas. Dessa maneira observa-se que em aplicações em máquinas de altas rotações, temos duas grandes dificuldades para prever e controlar o comportamento dinâmico de máquinas rotativas, eles são o fato de um rotor ligeiramente longo em altas rotações se comporta como rotor flexível,

e também o fato de forças desbalanceadoras ficarem muito pronunciadas em altas rotações.

Assim informações importantes puderam ser comprovadas além de serem apresentadas de maneira que leigos interessados no assunto possam ter uma noção básica do comportamento de máquinas rotativas. Foi possível ainda despertar o interesse para um maior aprofundamento no presente tema, além de criar uma base sólida para que isso possa realmente acontecer.

Para trabalhos futuros, até como complementação dos assuntos tratados neste trabalho, sugere-se uma análise prática, em uma máquina ou equipamento real das condições aqui estudadas, além de outros assuntos sobre máquinas rotativas como: análise de rotores flexíveis, análise sobre vibrações em máquinas rotativas, mancais magnéticos, entre outros.

## REFERÊNCIAS

ADAMS JR, Maurice L. Rotating Machinery Vibration: from Analysis to Troubleshooting. New York: by Marcel Dekker. Inc, 2001.

CASTILHO, Adhemar. Uma visão global da rotodinâmica de turbomáquinas: ênfase no método de elementos finitos e na propriedade dos autovetores giroscópicos desacoplarem as equações de movimento. 2007. 390f. Tese (Doutorado em Ciências em Engenharia Oceânica) – Faculdade de Engenharia Naval, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

CHIBA, Akira; Fukao, Tadashi; Ichikawa, Osamu; Oshima, Masahide; Takemoto, Masatsugu; DORRELL, David G. Magnetic Bearings and Bearingless Drives. 1. ed. London: Elsevier/ Newnes, 2005.

COTA, Raimundo E. Análise Dinâmica de Rotores em Balanço Utilizando Procedimentos Computacionais e Experimentais. 2008. 94f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Escola de Engenharia da UFMG, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008. Disponível em: <[http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/bitstream/handle/1843/MDAD-7W7K9K/disserta\\_\\_o\\_mestrado\\_rev\\_final.pdf?sequence=1](http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/bitstream/handle/1843/MDAD-7W7K9K/disserta__o_mestrado_rev_final.pdf?sequence=1)> Acesso em: 28. fev. 2013.

EHRICH, Fredric F. Handbook of Rotordynamics. 3. ed. Malabar, FL-USA: Krieger Publishing Company, 2004.

FRISWELL, M. I., Penny, J. E., Garvey, S. D., Lees, A. W. Dynamics of Rotating Machines. New York: Cambridge University Press, 2010.

ISO: International Organization for Standardization 1940-1. 2. ed. 2003. Mechanical vibration — Balance quality requirements for rotors in a constant (rigid) state — Part 1: Specification and verification of balance tolerances editada em agosto de 2003.

ISO: International Organization for Standardization 17359. 1. ed. 2003. Condition monitoring and diagnostics of machines — General guidelines editada em julho de 2003.

MARTIN, Byron. Vibration Is Not The Only Method For Balancing. Proceedings of Meetings on Acoustics, New Zeland, nov. 2006. Disponível em: < [http://www.acoustics.asn.au/conference\\_proceedings/AASNZ2006/papers/p92.pdf](http://www.acoustics.asn.au/conference_proceedings/AASNZ2006/papers/p92.pdf)>. Acesso em: 17 jun. 2013.

MENDES, António C. Máquinas de Conversão de Energia Rotodinâmicas. Catálogo Bibliográfico, Covilha, set. 2001.

MUSZYNSKA, Agnieszka. Rotordynamics. 1. ed. Boca Raton, FL-USA: Taylor & Francis, 2005.

NELSON, Frederick C. Rotor Dynamics without Equations. International Journal of COMADEM, v.10, n.2, jul. 2007. Disponível em: <<http://www.comadem.com/sample%20copy%20journal%20website.pdf>>. Acesso em: 28 jun. 2013.

OGATA, Katsushiko. MATLAB for Control Engineers. Upper Sanddle River: Pearson Prentice Hall, 2008.

PEDREIRA, Javã A. Dinâmica de máquinas rotativas em mancais hidrodinâmicos. 2006.

114f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006.

PEREIRA, José Carlos. Introdução à Dinâmica de Rotores. Santa Catarina: Florianópolis, 2003.

RAMALHO, Denise A. Estudo da Influência dos Perfis de Solo em Sistemas Rotor-Mancais-Fundação. 2010. 153f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2010. Disponível em: <<http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=000783190&fd=y>> Acesso em: 20 fev. 2013.

RAO, S.S. Vibrações mecânicas. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, c2009.

SCHWEITZER, G., Maslen, E. H. Magnetic Bearings: Theory, Design, and Application to Rotating Machinery. Berlin: Springer-Verlag, 2009.

SILVA, Edson L da. Dinâmica de Rotores: Modelo Matemático de Mancais Hidrodinâmicos. 2004. 110f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2004. Disponível em: <[http://www.pgmecc.ufpr.br/dissertacoes/dissertacao\\_046.pdf](http://www.pgmecc.ufpr.br/dissertacoes/dissertacao_046.pdf)> Acesso em: 22 fev. 2013.

SONEIRO, Newton Sure. Análise Modal Experimental. Belém, PA, 2001. 74p. Apostila do curso de Mestrado em Engenharia Mecânica, Grupo de Vibrações e Acústica – Universidade Federal do Pará.

TAYLOR, James I. The Vibration Analysis Handbook: A Practical Guide for solving Rotation Machinery Problems. 2. ed. Vibration Consultants, 2003.

THORBY, Douglas. Structural Dynamics and Vibration in Practice: an Engineering Handbook. 1. ed. USA: Elsevier Ltd, 2008.

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ – UTFPR. Normas para elaboração de trabalhos acadêmicos. Disponível em: <<http://www.utfpr.edu.br/cornelioprocopio/biblioteca-e-producao-academica/normas-para-elaboracao-de-trabalhos-academicos>>. Acesso em: 16 abr. 2013.

VANCE, John M. Rotordynamics of Turbomachinery. 1. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 1988.

VANCE, J., Zeidan, F., and Murphy, B. Machinery Vibration and Rotordynamics. New Jersey: John Wiley & Sons, 2010.

---

## Sobre o Autor

## Jomar Berton Junior

Mestre em Engenharia Mecânica pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (2016). Possui graduação em Engenharia Industrial Mecânica pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (2013). Tem experiência na área de adequações de máquinas a normas de segurança, análise metalográfica, além de estudos na área de análise dinâmica de máquinas rotativas, vibrações e análise modal. Atualmente, é docente do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná (IFPR), campus Telêmaco Borba.

# Índice Remissivo

## A

análise 9, 10, 11, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 28, 35, 43, 49, 53, 54  
anisotrópico 20, 33, 34  
aprendizagem 8, 11

## B

balanceamento 8, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 48, 52, 53

## C

computacionais 8, 11  
conceito 35  
conceitos 9, 43  
coordenadas 15, 27, 28, 29, 36

## D

desbalanceador 52  
desbalanceamento 10, 28, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 48, 49, 50, 51, 52, 53  
diâmetro 37  
dinâmico 8, 9, 10, 11, 12, 13, 20, 35, 36, 37, 38, 53

## E

economizar 9  
elástico 12, 20, 22, 24, 26  
empresas 9  
engenharia 36  
equação 13, 14, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 32, 33, 34, 38, 39, 40, 41  
equações 15, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 41, 55  
excêntrico 49

## F

fenômenos 9, 10, 11, 15  
ferramentas 9, 11  
financeiros 9  
física 12, 13  
forças 10, 12, 13, 18, 19, 34, 39, 49, 50, 51, 52, 53, 54  
frequência 9, 10, 14, 15, 16, 21, 25, 29, 30, 44, 45, 47

## G

giroscópio 10, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 29, 32, 44  
gravidade 36, 37, 43

## I

isotrópicas 31  
isotrópico 18, 31, 34  
isotrópicos 27, 32, 43, 44

## L

leis da física 12

## M

máquina 9, 10, 12, 34, 35, 43, 45, 50, 53, 54  
máquinas 2, 8, 9, 10, 11, 12, 20, 34, 53, 54, 55  
massas 10, 35, 36, 37, 39, 40, 41, 42, 48, 49, 50, 51, 52  
mecânicos 9, 10

## N

naturais 9, 15, 23, 24, 25, 27, 29, 32, 33, 43, 44, 45, 46, 47, 53

## O

operações 27

## P

prática 26, 34, 36, 38, 39, 47, 54  
precessão 25, 44, 47  
precessão reversa 25, 44, 47  
projetos 9, 10  
proporcionalidade 45

## R

raízes 21, 22, 23, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33  
reativas 51, 52  
recursos naturais 9  
relação 10, 19, 27, 29, 30, 34, 36, 38, 39, 40, 45, 48, 51  
ressonância 10, 29  
rotação 9, 16, 18, 20, 24, 25, 29, 34, 35, 36, 37, 44, 45, 47, 51, 53  
rotativas 2, 8, 9, 10, 11, 12, 20, 34, 53, 54, 55  
rotinas 8, 11  
rotor 10, 12, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 25, 27, 30, 34, 35, 36, 37, 39, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 53  
rotores 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 24, 34, 35, 36, 37, 39, 41, 43, 47, 54

---

## **S**

simulação 11, 46

sistema 5, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 23, 25, 29,  
34, 35, 36, 37, 38, 39, 41, 43, 45, 46, 47, 49, 51, 53

soluções 21, 22, 24, 27, 29, 31, 32

## **T**

tecnológico 9

## **V**

velocidade 10, 16, 17, 19, 20, 24, 29, 30, 33, 34, 36,  
37, 44, 45, 47, 51, 53

vibração 10, 12, 13, 15, 21, 32, 34, 35, 44, 47, 53



